2.4. Κανονική κατανομή και εφαρμογές

Διδακτικοί στόχοι

- Τι είναι η κανονική κατανομή και πως χρησιμοποιείται
- Τι είναι η γκαουσιανή καμπύλη και η σχέση της με την κανονική κατανομή

Θεωρία και Μεθοδολογία

- **Κανονική κατανομή**

Είναι το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε πώς κατανέμονται σε έναν ιδεατό, άπειρο πληθυσμό οι τιμές μεταβλητών. Για την κανονική κατανομή, το μ εκφράζει το κέντρο συμμετρίας της και το σ είναι ένας δείκτης διασποράς της.

$$\boxed{y = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}}$$

Συμβολίζεται με N(μ,σ^2) , όπου μ = μέση τιμή και σ^2 = διακύμανση .

Εφαρμογή 1:

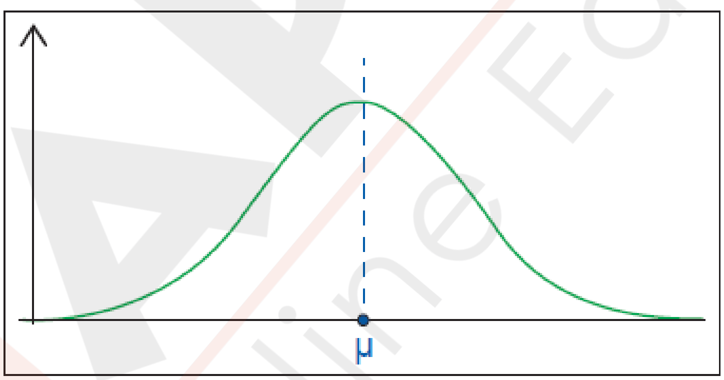
Το ύψος των μαθητών της τάξης μου είναι μια τυχαία μεταβλητή Χ , όπου Χ $\sim \mathrm{N}(170,16)$.

Διαβάζεται « η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή, με μέση τιμή 170 εκατοστά (δηλαδή το μέσο ύψος των μαθητών είναι 170 εκατοστά) και διακύμανση ίση με 16 εκατοστά

(δηλαδή απέχουν $\pm\sqrt{16} = \pm 4$ εκατοστά από τον μέσο όρο) .

- **Γκαουσιανή καμπύλη**

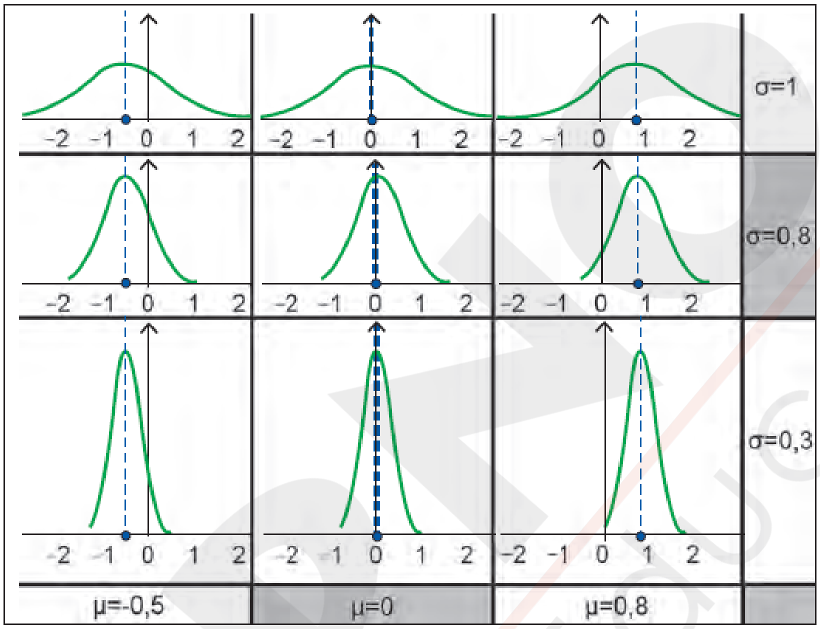
Είναι η γραφική παράσταση, όπου το πλήθος είναι αρκετά μεγάλο και το πλήθος των κλάσεων κατάλληλα μεγάλο, το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων τείνει να μοιάσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης y = $\frac{e^{\frac{-1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ για κάποιες τιμές των παραμέτρων μ και σ (η σ είναι θετική) .



Η ευθεία x = μ είναι ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

y = $\frac{e^{\frac{-1}{2}(\frac{X-\mu}{\sigma})^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. Συνεπώς, η τιμή του σ καθορίζει πόσο «απλωμένη» ή «μαζεμένη» είναι η καμπύλη γύρω από το μ και ποιο είναι το μέγιστο «ύψος» της. Η τιμή του μ επηρεάζει τη «θέση» της καμπύλης καθώς καθορίζει τη θέση του άξονα συμμετρίας της.

Όταν το σ μεγαλώνει, το σχήμα της μοιάζει να είναι πιο «απλωμένο» πάνω από τον οριζόντιο άξονα και το μέγιστο «ύψος» της καμπύλης μικραίνει. Τα αντίστροφα συμβαίνουν όταν το σ μικραίνει:



Σημείωση:

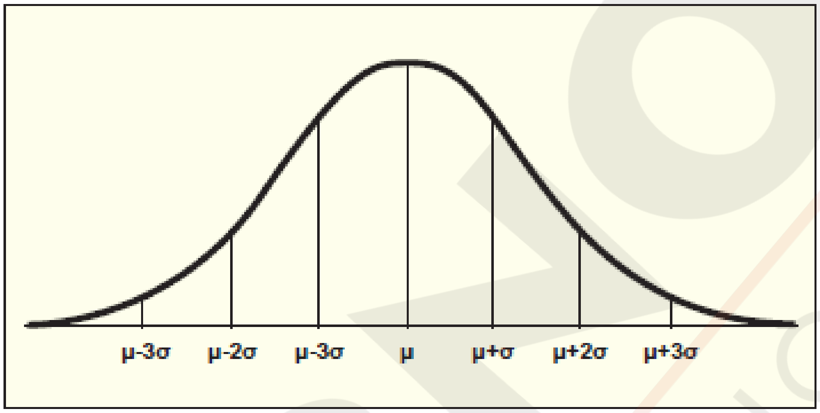
Έστω μία μεταβλητή που μοντελοποιείται από την κανονική κατανομή με μ και σ. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο/άτομο από τον άπειρο πληθυσμό και κοιτάξουμε την τιμή της μεταβλητής για αυτό το στοιχείο/άτομο, τότε η πιθανότητα αυτή η τιμή να βρίσκεται σε ένα διάστημα (α,β) ισούται με το εμβαδόν μεταξύ της γκαουσιανής καμπύλης και του άξονα x'x ανάμεσα στα α και β. Αποδεικνύεται ότι:

• η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι μεγαλύτερη από μ» ισούται με 0,5 και, λόγω συμμετρίας, η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι μικρότερη από μ» ισούται, επίσης με 0,5.

• η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ - σ, μ + σ) » ισούται κατά προσέγγιση με 0,68 ή 68%.

• η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ - 2σ , μ + 2σ) » ισούται κατά προσέγγιση με 0,95 ή 95%

• η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ - 3σ , μ + 3σ)» ισούται κατά προσέγγιση με 0,997 ή 99,7%.



Από τα προηγούμενα και λόγω συμμετρίας της κανονικής κατανομής, υπολογίζουμε τις πιθανότητες και άλλων ενδεχομένων.

Παράδειγμα: Η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα

(μ - σ , μ)» ισούται κατά προσέγγιση με 0,68 : 2 = 0,34.

Λόγω στατιστικής ομαλότητας, σε ένα μεγάλο δείγμα (ή σε ολόκληρο τον υπαρκτό πληθυσμό) μπορούμε να εκτιμήσουμε ότι:

- Το ποσοστό των στοιχείων/ατόμων για τα οποία η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ - σ , μ + σ), είναι περίπου το 68% του πληθυσμού
- Το ποσοστό των στοιχείων/ατόμων για τα οποία η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ - 2σ , μ + 2σ), είναι περίπου το 95% του πληθυσμού
- Το ποσοστό των στοιχείων/ατόμων για τα οποία η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα (μ - 3σ , μ + 3σ), είναι περίπου το 99,7% του πληθυσμού.

Λυμένες Ασκήσεις

Άσκηση 1 :

Οι πόρτες που κατασκευάζει μια εταιρία είναι τυποποιημένες με ύψος 183 cm. Θεωρούμε ότι τα ύψη των ενηλίκων στην Ελλάδα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 171 cm και τυπική απόκλιση 6 cm:

1) Παίρνουμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα ενηλίκων στην Ελλάδα. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των ενήλικων του δείγματος που είναι ψηλότεροι από την πόρτα.

2) Να βρείτε ποιο πρέπει να είναι το ύψος της πόρτας, ώστε αν επιλέξουμε τυχαία έναν ενήλικα στην Ελλάδα, η πιθανότητα να είναι ψηλότερος/η από την πόρτα να είναι περίπου 0,15%;

Λύση :

1) Τα ύψη των ενήλικων ανθρώπων ακολουθούν κανονική κατανομή με μ=171cm και σ = 6 cm. Ισχύουν:

$$\mu - 2\sigma = 171 - 2*6 = 159 \quad \text{και} \quad \mu + 2\sigma = 171+2*6 = 183$$

Παίρνουμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα ενηλίκων στην Ελλάδα. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι ψηλότερα από την πόρτα, δηλαδή από 183 cm. Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που το ύψος τους (σε cm) ανήκει στο διάστημα

(159 , 183) εκτιμάται σε 95%.

Λόγω **συμμετρίας της κανονικής κατανομής** εκτιμούμε:

• Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που το ύψος τους ανήκει στο διάστημα (171 , 183) σε 95 : 2 = 47,5 %.

• Το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι ψηλότερα από 171 cm σε 50%.

Επομένως, το ποσοστό των ατόμων του δείγματος που είναι ψηλότερα από 183 cm, άρα και από την πόρτα, εκτιμάται σε 50% - 47,7% ≈ 2,5%

2) Υποθέτουμε ότι η πόρτα έχει ύψος υ cm. Έστω ένας τυχαίος ενήλικας και το ενδεχόμενο «ο τυχαίος ενήλικας έχει ύψος μεγαλύτερο από υ cm». Θέλουμε να βρούμε την τιμή του υ, ώστε η πιθανότητα του ενδεχομένου να είναι περίπου 0,15%. Παρατηρούμε ότι:

$$0{,}15\% = 50\% - 49{,}85\%$$

Επίσης ισχύει ότι: $\mu+3\sigma = 171+3*6 = 189$.

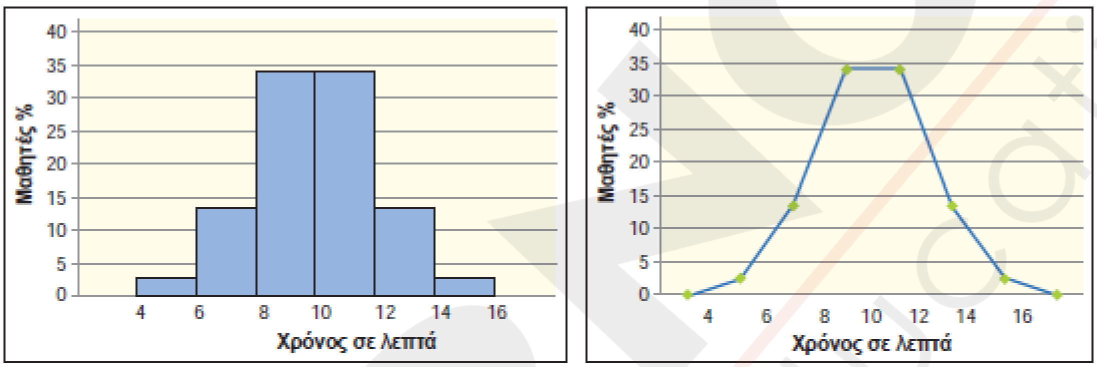
Η πιθανότητα ο τυχαίος ενήλικας να είναι ψηλότερος από 171 cm είναι 50% και η πιθανότητα να έχει ύψος (σε εκατοστά) που ανήκει στο διάστημα $(\mu,\ \mu+3\sigma)=(171,189)$ είναι περίπου ίση με: $\frac{99{,}7\%}{2} = 49{,}85\%$, λόγω **συμμετρίας** της κανονικής κατανομής.

Άρα, η πιθανότητα ο τυχαίος ενήλικας να είναι ψηλότερος από 189 cm είναι περίπου 50% - 49,85% = 0,15%. Άρα η πόρτα πρέπει να έχει ύψος υ = 189 cm.

Ασκήσεις για Διδασκαλία

Άσκηση 1 :

Το παρακάτω ιστόγραμμα και το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων παρουσιάζουν τον χρόνο, σε λεπτά, που χρειάζονται οι μαθητές για να πάνε από το σπίτι τους στο σχολείο. Η μέση τιμή είναι 10 λεπτά και η τυπική απόκλιση 2 λεπτά.



1) Τι έχετε να παρατηρήσετε για τη συμμετρία της κατανομής;

2) Τι ποσοστό μαθητών χρειάζονται το πολύ 10 λεπτά και πόσοι τουλάχιστον 10 λεπτά για να πάνε στο σχολείο;

3) Τι ποσοστό μαθητών χρειάζονται από 8 εως 12 λεπτά για να πάνε στο σχολείο;

4) Τι ποσοστό μαθητών χρειάζονται τουλάχιστον 8 λεπτά για να πάνε στο σχολείο;

Άσκηση 2 :

Τα τούνελ που κατασκευάζει μια εταιρία είναι τυποποιημένα με ύψος 450 cm. Θεωρούμε ότι τα ύψη των αυτοκινήτων στην Ευρώπη ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 150 cm και διακύμανση 16 cm:

1) Παίρνουμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα αυτοκινήτων στην Ευρώπη. Να εκτιμήσετε το ποσοστό των αυτοκινήτων του δείγματος που δεν περνάνε από τα τούνελ.

2) Να βρείτε ποιο πρέπει να είναι το ύψος των τούνελ, ώστε αν επιλέξουμε τυχαία ένα αυτοκίνητο στην Ευρώπη, η πιθανότητα να είναι ψηλότερο από το τούνελ να είναι περίπου 0,13%;

Άσκηση 3 :

a) Τι ονομάζουμε κανονική κατανομή και τι γνωρίζετε για αυτήν;

b) Τι είναι η γκαουσιανή καμπύλη και που χρησιμοποιείτε;

Άσκηση 4 :

Το σύνολο των μαθητών/τριών μιας πόλης, ρωτήθηκαν για τον χρόνο που κάνουν να πάνε από το σπίτι στο σχολείο. Το 50% περίπου έδωσε απαντήσεις που ήταν από 12 λεπτά και πάνω, ενώ το 16% περίπου έδωσε απαντήσεις που ήταν από 10 λεπτά και κάτω. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου της διαδρομής σπίτι-σχολείο των μαθητών είναι κανονική.

1) Να εκτιμήσετε τον μέσο χρόνο διαδρομής σπίτι-σχολείο, των μαθητών και την τυπική απόκλιση του χρόνου διαδρομής τους, σύμφωνα με τις απαντήσεις τους.

2) Αν οι μαθητές/τριες της πόλης είναι 4.000, να εκτιμήσετε πόσοι/ες απάντησαν ότι έχουν χρόνο διαδρομής σπίτι-σχολείο μεταξύ 14 και 16 λεπτών;

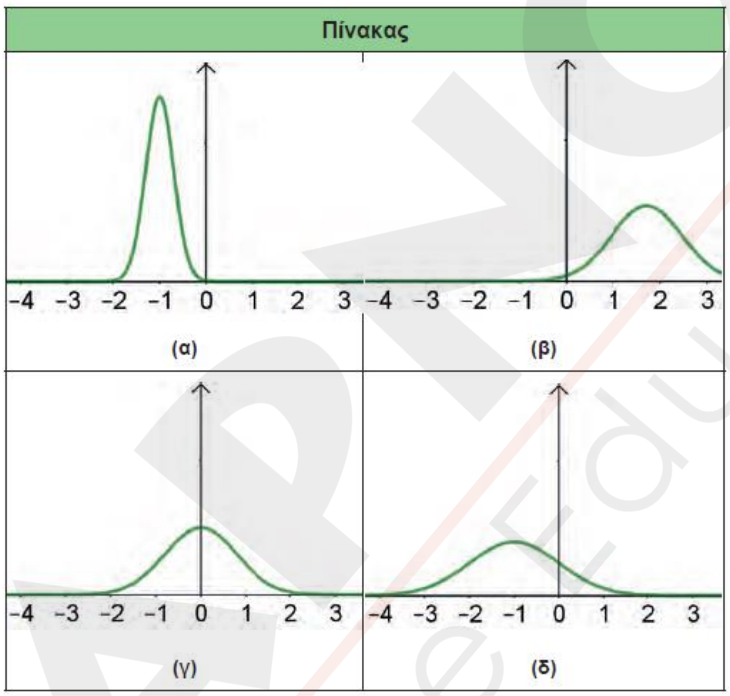
Άσκηση 5 :

Υποθέτουμε ότι το βάρος των μαθητών λυκείου ακολουθεί κανονική κατανομή και παίρνουμε ένα μεγάλο δείγμα μαθητών λυκείου. Το 50% των μαθητών του δείγματος έχουν βάρος το πολύ 65 Kg, ενώ περίπου το 47,5% αυτών έχουν βάρος από 65 Kg έως 75 Kg.

a) Να εκτιμήσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του βάρους των μαθητών του δείγματος.
b) Να εκτιμήσετε το ποσοστό των μαθητών του δείγματος που έχουν βάρος από 55 Kg έως 70 Kg.

Άσκηση 6 :

1) Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις των συνάρτησεων που είναι μοντέλα κανονικών κατανομών και περιέχονται στον παρακάτω πίνακα με τα ζεύγη τιμών των παραμέτρων σ και μ που ακολουθούν. Ο κατακόρυφος άξονας των συστημάτων συντεταγμένων ακολουθεί την ίδια κλίμακα σε όλες τις περιπτώσεις.



Α. $\mu = -1, \sigma = 1$ Β. $\mu = -1, \sigma = 0{,}3$ Γ. $\mu > 0, \sigma = 0{,}75$ Δ. $\mu = 0, \sigma < 1$

2) Να συγκρίνετε την τιμή του σ στο σχήμα (γ) με το 0,3.

Άσκηση 7 :

Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι άνθρωποι στην Αθήνα να πάνε στη δουλειά τους το πρωί από το σπίτι τους είναι 9 λεπτά με τυπική απόκλιση 4 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται για να πάνε στη δουλειά τους:

α) κάτω από 7 λεπτά

β) πάνω από 13 λεπτά

γ) το πολύ 9 λεπτά

δ) από 5 έως 11 λεπτά

Άσκηση 8 :

Υπολογίστε τα ποσοστά των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες από μ-3*σ και το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από μ+3*σ , σκεπτόμενοι ότι οι παρατηρήσεις είναι κανονικής κατανομής.

Άσκηση 9 :

Ο χρόνος αναμονής των πελατών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια τράπεζα ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 9 λεπτά και διακύμανση 4 λεπτά.

Α) Να βρείτε ποιο είναι το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο

a) Από 3 έως 9 λεπτά
b) Από 7 έως 13 λεπτά

Β) Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πελατών

Άσκηση 10 :

Αν ένα δείγμα παρατηρήσεων ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 4 και τυπική απόκλιση 1 και γνωρίζουμε ότι 3 παρατηρήσεις έχουν τιμή μικρότερη του 1 , να υπολογίσετε:

1) Το μέγεθος του δείγματος

2) Το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν τιμή στο διάστημα (2,3) .

Άσκηση 11 :

Από μια έρευνα που έγινε σχετικά με τους μισθούς των εργατών μιας επιχείρησης, προέκυψε ότι το 2,5% των εργατών έχει μηνιαίο μισθό μικρότερο από 500 ευρώ , ενώ το 84% των εργατών έχει μισθό μικρότερο από 800 ευρώ. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των μισθών ακολουθεί την κανονική κατανομή .

1) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μισθών

2) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιγενές

3) Αν η επιχείρηση απασχολή 400 εργάτες, να βρείτε:

a) Πόσοι εργάτες έχουν μισθό από 500 έως 800 ευρώ
b) Πόσοι εργάτες έχουν μισθό κάτω από 900 ευρώ.

Άσκηση 12 :

Οι ν τιμές μιας μεταβλητής X ακολουθούν την κανονική κατανομή , έχουν εύρος ίσο με 6 και το 2,5% αυτών είναι μικρότερες από το 10 .

a) Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας και να δείξετε ότι το δείγμα είναι ομοιογενές.

b) Αν έχουμε 400 παρατηρήσεις, τότε:

i) Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (13,14) .

ii) Αν οι τιμές αυξηθούν κατά 12 μονάδες , να δείξετε ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας των νέων τιμών θα γίνει ο μισός του αρχικού.

Άσκηση 13 :

Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με (Σ) εάν είναι σωστές ή με (Λ) εάν είναι λανθασμένες:

α) Το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή από x_i έως x_κ είναι $F_i\% - F_{\kappa-1}\%$.

β) Το πλήθος των παρατηρήσεων που έχουν το πολύ την τιμή x_i είναι N_i.

γ) Σε μία κανονική κατανομή η διάμεσος συμπίπτει με τη μέση τιμή.

δ) Σε μία κανονική κατανομή, με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s, εκτός του διαστήματος $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ δεν υπάρχουν παρατηρήσεις.

ε) Η απόσταση των διαδοχικών κεντρικών τιμών κλάσεων ίσου πλάτους ενός δείγματος ισούται με το πλάτος των κλάσεων αυτών.

στ) Αν α_i είναι το τόξο ενός κυκλικού τομέα στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, τότε $\alpha_i = \frac{f_i}{\nu} \cdot 360^0$ για κάθε $i = 1, 2, ..., \kappa$.

ζ) Το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα είναι πάντοτε το ίδιο πριν ομαδοποιηθούν.

Άσκηση 14 :

Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ ακολουθούν την κανονική κατανομή . Αν το 2,%% των παρατηρήσεων είναι μικρότερο από 6 και το 15,85% των παρατηρήσεων ανήκει στο διάστημα (9,11) , τότε:

Α) Βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

Β) Αν 136 παρατηρήσεις του δείγματος, βρίσκονται στο διάστημα (7,9) , να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Γ) Να βρείτε το πλήθος των παρατηρήσεων μεταξύ 7 και 10.

Άσκηση 15 :

Ένα σύνολο παρατηρήσεων που ακολουθεί την κανονική κατανομή είναι οριακά ομοιογενές (CV=10%) με μέση τιμή $\bar{x} = 2$, διάμεσο δ και τυπική απόκλιση s.

Έστω επίσης ένας δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ο οποίος αποτελείται από τα απλά ενδεχόμενα ω_i με $P(\omega_i) \neq 0, i = 1, 2, 3, 4, 5$

Αν για τα σύνθετα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_5\}$, $\Gamma = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ ανήκουν στο σύνολο $\{\bar{x},\ s,\ s/\delta, \delta/s\}$ και η πιθανότητα να συμβεί μόνο το ενδεχόμενο Γ είναι 30%, τότε να βρεθεί η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ.

Ασκήσεις για Μελέτη

Άσκηση 1 :

Σε δύο τμήματα Γ1, Γ2 της Γ΄ τάξης ενός Λυκείου ο μέσος όρος της βαθμολογίας στο Α΄ τετράμηνο ήταν $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 12$ με τυπική απόκλιση $s_1 = s_2 = 2$. Στο 2ο τετράμηνο όλοι οι μαθητές του Γ1 αύξησαν τη βαθμολογία τους κατά 1 μονάδα, ενώ οι μαθητές του Γ2 αύξησαν τη βαθμολογία τους κατά 10%.

α) Σε ποιο τμήμα η βαθμολογία παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια, μετά τις αυξήσεις του Β΄ τετραμήνου;

β) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή της θετικής σταθεράς c που πρέπει να προστεθεί στις βαθμολογίες των μαθητών του Γ2 μετά το τέλος του Β΄ τετραμήνου, ώστε το δείγμα της βαθμολογίας τους να γίνει ομοιογενές.

γ) Αν οι βαθμολογίες των μαθητών του Γ1 στο Β΄ τετράμηνο αποτελούν κανονική κατανομή, να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που είχαν βαθμολογία από 11 έως 19.

δ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των τετραγώνων των βαθμολογιών των μαθητών του Γ1 στο Α΄ τετράμηνο.

(Δίνεται: $s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu}\right]$)

Άσκηση 2 :

Οι δείκτες νοημοσύνης των μαθητών ενός λυκείου ακολουθούν την κανονική κατανομή ή περίπου την κανονική κατανομή . Ο ελάχιστος δείκτης του 16% των «εξυπνότερων μαθητών» είναι 108 και ο μέγιστος δείκτης του 16% των «λιγότερο έξυπνων μαθητών» είναι 84.

Α. Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος .

Β. Να βρείτε το εύρος και την διάμεσο του δείγματος .

Γ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που έχει δείκτη νοημοσύνηςτουλάχιστον 132.

Δ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές και αν όχι, να βρεθεί η ελάχιστη θετική ακέραια τιμή του c κατά την οποία πρέπει να αυξηθεί ο δείκτης νοημοσύνης κάθε μαθητή , ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές .

Ε. Αν 163 μαθητές έχουν δείκτη μεταξύ 72 και 108, να βρεθεί πόσους μαθητές έχει το σχολείο.

Άσκηση 3 :

Α) Αν t_1 , t_2 , ... , t_ν είναι οι τιμές των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής Χ, να αποδείξετε ότι:

$$S^2 = \overline{\left(x^2\right)} - \left(\bar{x}\right)^2.$$

Β) Σε μια πόλη κατά τις απολυτήριες εξετάσεις στο μάθημα της ιστορίας η βαθμολογία t_1 , t_2 , ... , t_ν των μαθητών ήταν περίπου κανονική κατανομή. Ο μέσος όρος των τετραγώνων των βαθμών ήταν 148 και ο συντελεστής μεταβλητότητας $\frac{1}{6}$.

α) Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο .

β) Αν 10 μαθητές είχαν βαθμολογία πάνω από 16 , να βρείτε πόσοι μαθητές συμμετείχαν στις εξετάσεις .

Άσκηση 4 :

Τα κέρδη σε ευρώ μιας αλυσίδας καταστημάτων ειδών διατροφής ακολουθούν περίπου την κανονική κατανομή . Γνωρίζουμε ότι το 84% των καταστημάτων έχουν κέρδη λιγότερα από 1200 ευρώ, ενώ το 97,5% των καταστημάτων έχουν κέρδη πάνω από 600 ευρώ.

Α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τη διάμεσο των κερδών.

Β) Να υπολογίσετε τη διακύμανση και να προσεγγίσετε το εύρος των κερδών.

Γ) Μπορεί το σύνολο των καταστημάτων της αλυσίδας να θεωρηθεί ομοιογενές ως προς τα κέρδη; Αν το δείγμα δεν είναι ομοιογενές, κατά ποια σταθερή ποσότητα πρέπει να αυξηθούν τα κέρδη των καταστημάτων για να γίνει το δείγμα ομοιογενές;

Δ) Αν μια μέρα τα κέρδη όλων των καταστημάτων μειωθούν κατά 20%, πόσο θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής;

Άσκηση 5 :

Μία εταιρία εμφιαλώνει μεταλλικό νερό από μία πηγή σε συσκευασία του 1 1t=1000 ml. Όμως όλα τα μπουκάλια δεν έχουν το ίδιο περιεχόμενο. Αν η διακύμανση είναι 16 και έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρεθεί το ποσοστό των μπουκαλιών που περιέχουν όγκο νερού:

α) Λιγότερο από 996 ml

β) 992-1008 ml

γ) Περισσότερο από 1008 ml

δ) 996-1008 ml

Άσκηση 6 :

Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή 16 και διακύμανση 16. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα :

α) (8,20)

β) (16, 24)

γ) (12, 28)

Άσκηση 7 :

Μια κανονική κατανομή έχει μέση τιμή 40 και συντελεστή μεταβολής CV = 25%. Να βρείτε το ποσοστό % των παρατηρήσεων που είναι:

α) κάτω από 30

β) πάνω από 60

γ) τουλάχιστον ίσες με 70

δ) το πολύ ίσες με 50

Άσκηση 8 :

Οι βαθμοί που έγραψαν οι μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα είναι πάνω από 4, έχουν μέσο όρο 12 και τυπική απόκλιση 2. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που έχει βαθμό:

α) κάτω από 10

β) πάνω από 16

γ) από 8 έως 14

δ) το πολύ 8

ε) τουλάχιστον 10

Άσκηση 9 :

Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση 4. Ποιο ποσοστό των παρατηρήσεων είναι:

α) πάνω από 28

β) κάτω από 16

γ) μεταξύ 16 και 28

δ) τουλάχιστον 12

ε) το πολύ 12 ή τουλάχιστον 24

Άσκηση 10 :

Η κατανομή συχνοτήτων των σωλήνων που παράγει μια μηχανή ως προς το μήκος τους είναι περίπου κανονική. Έστω ότι η διάμεσος των μηκών των σωλήνων είναι 3 m και το 2,5% των σωλήνων έχουν μήκος πάνω από 3,04 m.

α) Να βρείτε:

i) τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση, το εύρος και τον συντελεστή μεταβολής.

ii) το ποσοστό των σωλήνων που έχουν μήκος από 2,96 m έως 3,02 m.

β) Μια σωλήνα θεωρείται ελαττωματική όταν έχει μήκος μεγαλύτερο από 3,06 m ή μικρότερο από 2,94 m. Αν η μηχανή παράγει 4000 σωλήνες και οι 18 είναι ελαττωματικές να εξετάσετε αν η λειτουργία της μηχανής έχει βλάβη.