

## 2.6. Σύγκριση ποσοτικών χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού

### Διδακτικοί στόχοι

- Πώς συγκρίνουμε τα μέτρα θέσης και τι συμπεράσματα εξάγουμε
- Πώς συγκρίνουμε τα μέτρα μεταβλητότητας και τι συμπεραίνουμε
- Πώς συγκρίνουμε τα θηκογράμματα

### Θεωρία και Μεθοδολογία

#### ➤ Σύγκριση μέτρων θέσης

Είναι η ποιοτική σύγκριση ανάμεσα σε 2 ομάδες . Συγκρίνουμε μέση τιμή, διασπορά, ελάχιστη και μέγιστη τιμή διαστημάτων, ενδοτεταρτημοριακό εύρος και άλλα.

**Εφαρμογή 1 :** Ο οργανισμός συγκοινωνιών σε ένα νησί του Αιγαίου μετρά τη διάρκεια ενός συγκεκριμένου δρομολογίου σε λεπτά (min) καθημερινά για τους μήνες Μάιο και Ιούλιο του ίδιου έτους, προκειμένου να συγκρίνει το επίπεδο υπηρεσιών του μεταξύ Μαΐου και Ιουλίου. Τα δειγματικά στατιστικά μέτρα για κάθε μήνα φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

	Μάιος	Ιούλιος
$\bar{x}$	106,67 min	107,33 min
$\delta(Q_2)$	101 min	106 min
$Q_1$	95 min	95 min
$Q_3$	108 min	118 min
$x_{\min}$	81 min	85 min
$x_{\max}$	167 min	155 min
S	23,57 min	16,15 min

Απλά και Κατανοητά η Γνώση!

Η δειγματική μέση τιμή της διάρκειας του συγκεκριμένου δρομολογίου του Μαΐου είναι 106,67 λεπτά, ενώ η αντίστοιχη δειγματική μέση τιμή για τον Ιούλιο είναι 107,33 λεπτά. Εκ πρώτης όψεως θα μπορούσε κάποιος να πει ότι συγκρίνοντας τις δύο δειγματικές μέσες τιμές η μέση διάρκεια του συγκεκριμένου δρομολογίου δεν άλλαξε αισθητά, οπότε η εταιρεία δε χρειάζεται να προχωρήσει σε κάποια βελτιωτική ενέργεια.

Η δειγματική διάμεσος για τον μήνα Μάιο είναι 101 λεπτά, ενώ για τον Ιούλιο η αντίστοιχη τιμή είναι 106 λεπτά. Αυτό σημαίνει ότι τον Μάιο τα μισά περίπου συγκεκριμένα δρομολόγια εκτελούνται σε χρόνο το πολύ 101 λεπτά, ενώ τα υπόλοιπα σε χρόνο τουλάχιστον 101 λεπτών. Αντίστοιχα, τον Ιούλιο τα μισά περίπου δρομολόγια εκτελούνται το πολύ σε 106 λεπτά, ενώ τα υπόλοιπα σε 106 λεπτά και περισσότερο.

#### ➤ Σύγκριση μέτρων μεταβλητότητας

Είναι η σύγκριση μεταβλητότητας (CV) ανάμεσα σε 2 ομάδες.

**Εφαρμογή 2 :** Για το παραπάνω παράδειγμα έχουμε ότι:

Το εύρος της διάρκειας του δρομολογίου τον Μάιο είναι 86 λεπτά και τον Ιούλιο είναι 70 λεπτά, κάτι που σημαίνει ότι η διαφορά της διάρκειας του συντομότερου με το μακρύτερο δρομολόγιο τον Μάιο είναι μεγαλύτερη. Από την άλλη μεριά, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος της διάρκειας του δρομολογίου για το Μάιο είναι 13 λεπτά, ενώ για τον Ιούλιο είναι 23 λεπτά, κάτι που δηλώνει ότι το διάστημα  $[Q1, Q3]$  είναι κατά 10 λεπτά μεγαλύτερο, από το αντίστοιχο του Μαΐου. Επομένως, παρατηρείται πιο σημαντική μεταβολή για τη διάρκεια των δρομολογίων του Ιουλίου, που βρίσκονται στο διάστημα  $[Q1, Q3]$ , δηλαδή για τα δρομολόγια, τα οποία μπορούν να χαρακτηριστούν ως «μέσης διάρκειας» δρομολόγια, σε σύγκριση με τα αντίστοιχα δρομολόγια του Μαΐου.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

Αν δει κανείς, επιπλέον, τις τιμές των δύο δειγματικών τυπικών αποκλίσεων (23,57 λεπτά και 16,15 λεπτά), φαίνεται ότι διάρκειες των συνολικών δρομολογίων του Μαΐου ήταν πιο «διάσπαρτες» γύρω από τη μέση διάρκεια. Τέλος, αν υπολογίσουμε τους συντελεστές μεταβλητότητας για κάθε μήνα, τότε προκύπτουν  $CVM = 22,1\%$  περίπου και  $CVI = 15\%$ , περίπου. Άρα, φαίνεται ότι η διάρκεια των δρομολογίων του Μαΐου, συνολικά, παρουσιάζει μεγαλύτερη μεταβλητότητα και μικρότερη ομοιογένεια από αυτά του Ιουλίου.

### ➤ Σύγκριση θηκογραμμάτων

Είναι η σύγκριση του θηκογράμματος ανάμεσα σε 2 ομάδες .

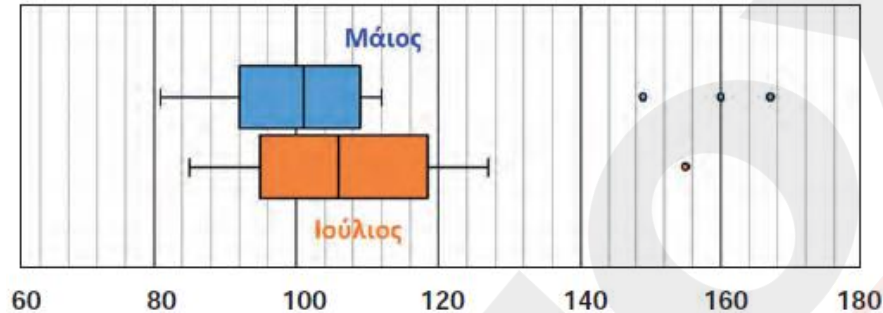
Το θηκόγραμμα είναι μια γραφική παράσταση που μας βοηθάει να απεικονίσουμε την κατανομή μιας ποσοτικής μεταβλητής στις κατηγορίες μιας ποιοτικής μεταβλητής. Από τη διάμεσο μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα για την κεντρική τάση των δεδομένων, ενώ από το μήκος του (ολόκληρου, αλλά και του ορθογωνίου) μπορούμε να δούμε πόσο ποικίλλουν οι τιμές (μεταβλητότητα).

**Εφαρμογή 3 :** Για το παραπάνω παράδειγμα έχουμε ότι:

Η μεταβλητότητα της διάρκειας του δρομολογίου τον Ιούλιο είναι μεγαλύτερη από τον μήνα Μάιο και για τα δρομολόγια «μέσης διάρκειας» (δηλαδή εντός ενδοτεταρτημοριακού εύρους), όπως φαίνεται από το μήκος του ορθογωνίου, αλλά και για όλα τα «τυπικά» δρομολόγια, όπως φαίνεται από το συνολικό μήκος των οριζοντίων γραμμών των θηκογραμμάτων. Επίσης, μπορούμε να εντοπίσουμε τις ακραίες τιμές της διάρκειας των δρομολογίων. Τον Ιούλιο έχουμε μόνο μία, ενώ τον Μάιο έχουμε τρεις ακραίες τιμές (από τις οποίες οι δύο είναι μεγαλύτερες από αυτή του Μαΐου). Ενδεχομένως να συνέβη κάτι έκτακτο σε εκείνα τα δρομολόγια. Λόγω των ακραίων τιμών, το εύρος της διάρκειας των δρομολογίων τον Μάιο είναι μεγαλύτερο, κάτι που φαίνεται και στα θηκογράμματα. Κοιτώντας μόνο τα θηκογράμματα, φαίνεται τα «τυπικά»

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

δρομολόγια τον Ιούλιο να κρατάνε λίγο περισσότερο και η διάρκειά τους να έχει λίγο μεγαλύτερη διασπορά.



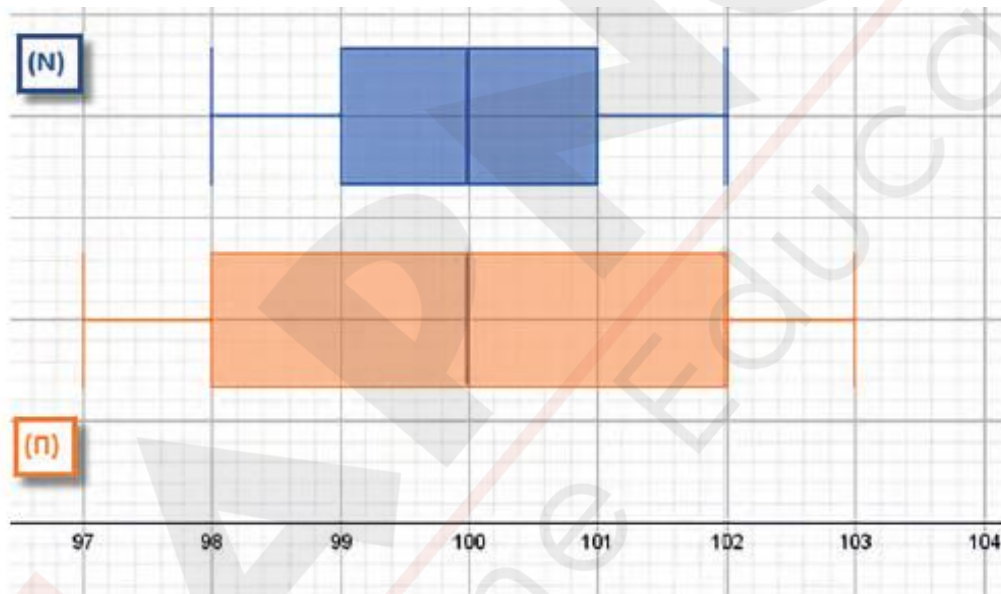
Αυτό, ενδεχομένως συμβαίνει γιατί τον Ιούλιο το λεωφορείο είναι περισσότερο γεμάτο και χρειάζεται περισσότερος χρόνος για την επιβίβαση/αποβίβαση, ενώ και η κίνηση στο νησί μπορεί να είναι μεγαλύτερη και να κάνει τη διάρκεια των δρομολογίων απρόβλεπτη. Ωστόσο, κοιτώντας τους μέσους χρόνους των δρομολογίων τους δύο μήνες, βλέπουμε ότι δε διαφέρουν πολύ. Άρα, αν συγκρίναμε μόνο τους μέσους χρόνους, χωρίς τα θηκογράμματα, δε θα είχαμε αυτή την εικόνα. Ο λόγος που οι μέσοι χρόνοι δε διαφέρουν πολύ είναι διότι επηρεάζονται από τις ακραίες τιμές και τον Μάιο είχαμε περισσότερες, όπως είπαμε.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

### Λυμένες Ασκήσεις

#### Άσκηση 1 :

Σ' ένα εργοστάσιο κατασκευής τροφίμων πρόκειται να αγοραστεί μια καινούργια μηχανή συσκευασίας (N) για να αντικαταστήσει την παλαιού τύπου μηχανή (Π). Έγινε μια δοκιμή για να ελεγχθεί η δυνατότητα παραγωγής της νέας μηχανής. Επελέγησαν 1000 πακέτα τροφίμων από κάθε μηχανή και μετρήθηκαν τα αντίστοιχα βάρη. Για τις δύο μηχανές δίνονται οι δειγματικές μέσες τιμές  $\chi_{\pi} = \chi_N = 100$  και τα αντίστοιχα θηκογράμματα τους.



Θα συστήνατε στον ιδιοκτήτη του εργοστασίου να αντικαταστήσει τη μηχανή (Π) με τη μηχανή (N); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

#### Λύση :

Οι δειγματικές μέσες τιμές για τις δύο μηχανές τύπου (Π) και (N) είναι ίσες, όπως και οι δειγματικές διάμεσοι, όπως προκύπτει από το παραπάνω θηκόγραμμα. Αν, λοιπόν, δεν εξετάζαμε κάποιο άλλο στοιχείο, τότε δε θα είχε νόημα να συστήσουμε στον ιδιοκτήτη του εργοστασίου να αλλάξει τη μηχανή. Όμως, βλέπουμε από το θηκόγραμμα ότι η μεταβλητότητα των δεδομένων

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

του δείγματος που πήραμε από τη μηχανή (N) είναι μικρότερη από τη μεταβλητότητα των δεδομένων του δείγματος που πήραμε από τη μηχανή (Π). Αυτό σημαίνει ότι για τα δύο δείγματα η μηχανή (Π) μας δίνει πακέτα τροφίμων που απέχουν περισσότερο από το μέσο βάρος των πακέτων της, σε σύγκριση με τη μηχανή (N). Συνεπώς, με δεδομένο ότι οι δειγματικές μέσες τιμές των πακέτων είναι ίσες για τις δύο μηχανές, θα συστήναμε στον ιδιοκτήτη του εργοστασίου να αλλάξει τη μηχανή, αν έχει σημασία η ακρίβεια του βάρους κάθε πακέτου.

### Άσκηση 2 :

Στο χρονόγραμμα που δίνεται παρακάτω φαίνονται οι γεννήσεις ζώων και οι θάνατοι στη χώρα μας από το 1932 έως και το 2016.



- α) Ποια χρονιά είχαμε τη μεγαλύτερη αύξηση του πληθυσμού;
- β) Ποια χρονιά ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας;
- γ) Τι παρατηρείτε την περίοδο 2005 – 2010 και τι συμβαίνει μετά το 2010;

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Λύση :**

α) Από το κοινό χρονόγραμμα δύο μεταβλητών (γεννήσεων και θανάτων) από το 1932 έως και το 2016, βλέπουμε ότι η μεγαλύτερη αύξηση πληθυσμού παρατηρήθηκε το 1934, δεδομένου ότι η διαφορά «γεννήσεις - θάνατοι» (στο σχήμα, η απόσταση του αριθμού των θανάτων από τον αριθμό των γεννήσεων το 1934) ήταν μεγαλύτερη από κάθε άλλη χρονιά. Από το αρχείο της ΕΛ.ΣΤΑΤ. μπορούμε να βρούμε και τους ακριβείς αριθμούς. Για το 1934 οι γεννήσεις

ήταν 208.929 και οι θάνατοι 100.651 (διαφορά: 108.278) και ακολουθούν οι χρονιές 1955 (διαφορά: 99482) και 1959 (διαφορά: 99.347).

β) Ο αριθμός των θανάτων ξεπερνά για πρώτη φορά τον αριθμό των γεννήσεων στη χώρα μας το 1996. Ωστόσο, εκείνη τη χρονιά η διαφορά ήταν πολύ μικρή (διαφορά: -22). Αν εξαιρέσουμε το 1997, όπου είχαμε αύξηση των γεννήσεων, από το 1998 μέχρι και το 2003 οι θάνατοι ήταν περισσότεροι.

γ) Την περίοδο 2005 – 2010 καταγράφηκε αύξηση του πληθυσμού, όπως φαίνεται και από το χρονόγραμμα, ενώ από το 2010 και μέχρι το 2016 είχαμε σημαντική μείωση του πληθυσμού. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι διαφορές από το 2011 έως και το 2016 ήταν: -4.671, -16.297,

-17.660, -21.591, -29.336 και -25.887, αντίστοιχα. Το γεγονός αυτό θα μπορούσε να αποδοθεί κατά κύριο λόγο στην οικονομική κρίση που ξεκίνησε στην Ελλάδα το 2010.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

## Ασκήσεις για Διδασκαλία

### Άσκηση 1 :

Δύο μεγάλες εταιρείες, μία αμερικάνικη και μία ευρωπαϊκή, λαμβάνουν υπηρεσίες και από εξωτερικούς συνεργάτες εκτός από τους υπαλλήλους τους (π.χ. εκπόνηση μελετών, υπηρεσίες φύλαξης, ταχυδρομικές, κτλ). Στο πλαίσιο ενός μεγάλου διαγωνισμού είχαν πολλές τέτοιες συνεργασίες. Επιλέγουμε τυχαία δύο δείγματα αμοιβών εξωτερικών συνεργατών (ένα για κάθε εταιρεία), που δόθηκαν γι' αυτό το σκοπό. Παρακάτω δίνονται οι δειγματικές μέσες τιμές και οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις.

- **A (αμερικάνικη εταιρεία):**  $\bar{x}_A = 700$  δολάρια και  $s_A = 80$  δολάρια
- **E (ευρωπαϊκή εταιρεία):**  $\bar{x}_E = 550$  ευρώ και  $s_E = 125$  ευρώ.

α) Να συγκρίνετε τους συντελεστές μεταβλητότητας των δύο δειγμάτων αμοιβών.

β) Οι δύο εταιρείες κατάφεραν να κερδίσουν στον διαγωνισμό και να αναλάβουν ένα έργο που θα τους αποφέρει αρκετά κέρδη. Για να επιβραβεύσουν τους συνεργάτες τους, η αμερικάνικη εταιρεία αποφάσισε να προσθέσει στην αμοιβή κάθε συνεργάτη 250 δολάρια και η ευρωπαϊκή εταιρεία να αυξήσει τη μηνιαία αμοιβή κάθε συνεργάτη κατά 40%. Να βρείτε τη νέα δειγματική μέση τιμή και τη νέα δειγματική τυπική απόκλιση των αμοιβών και για τις δύο εταιρείες.

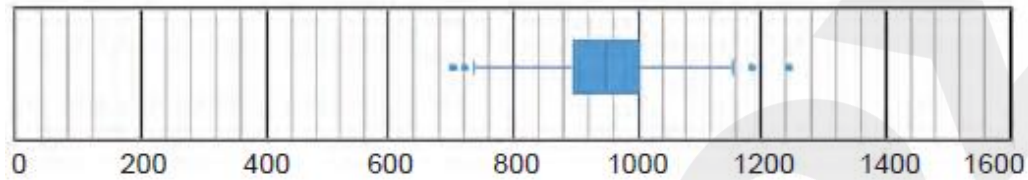
γ) Να συγκρίνετε τους συντελεστές μεταβλητότητας των δύο δειγμάτων αμοιβών μετά τις αυξήσεις.

δ) Παρακάτω φαίνονται τα θηκογράμματα των αμοιβών, μετά τις αυξήσεις, για τα δύο δείγματα της αμερικάνικης και της ευρωπαϊκής εταιρείας (σε δολάρια και ευρώ).

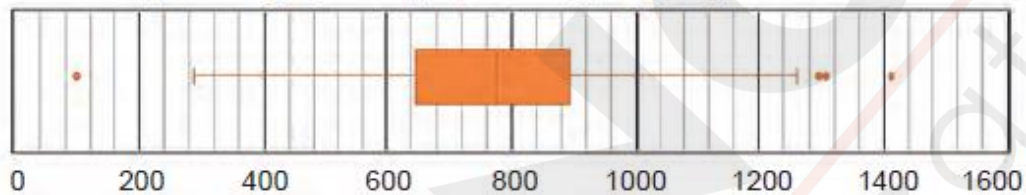
*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*



Για το δείγμα των αμοιβών της αμερικάνικης εταιρείας



Για το δείγμα των αμοιβών της ευρωπαϊκής εταιρείας



Για τα θηκογράμματα δίνονται, βοηθητικά, οι πίνακες:

	Αμερικάνικη εταιρεία	Ευρωπαϊκή εταιρεία
$Q_1 \rightarrow$	894,8	647,9
$\delta \rightarrow$	947,1	776,1
$Q_3 \rightarrow$	1000,5	893,8
Ακραίες τιμές	720,7 , 704,3 , 1188,5 , 1243,6	97,7 , 1296,5 , 1307,35 , 1411,9

Πώς μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα θηκογράμματα για να συγκρίνετε τη μεταβλητότητα στις αμοιβές των δύο εταιρειών;

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

### Άσκηση 2 :

Στους επόμενους πίνακες δίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών δύο τμημάτων της Β' τάξης ενός γενικού λυκείου σε μια γραπτή αξιολόγηση της Άλγεβρας:

Τμήμα Β <sub>1</sub>			
20	17	14	10
20	17	13	9
19	16	12	9
19	16	11	8
17	15	10	8

Τμήμα Β <sub>2</sub>			
20	19	14	11
20	19	14	10
20	18	14	9
20	15	13	9
19	15	12	8

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών/τριών σε κάθε τμήμα. Ποια πρώτη εικόνα σας δίνουν τα αποτελέσματα των παραπάνω στατιστικών μέτρων για την επίδοση κάθε τμήματος;

β) Να βρείτε τους συντελεστές μεταβλητότητας (CV) και να συγκρίνετε τα δύο τμήματα ως προς την ομοιογένειά τους.

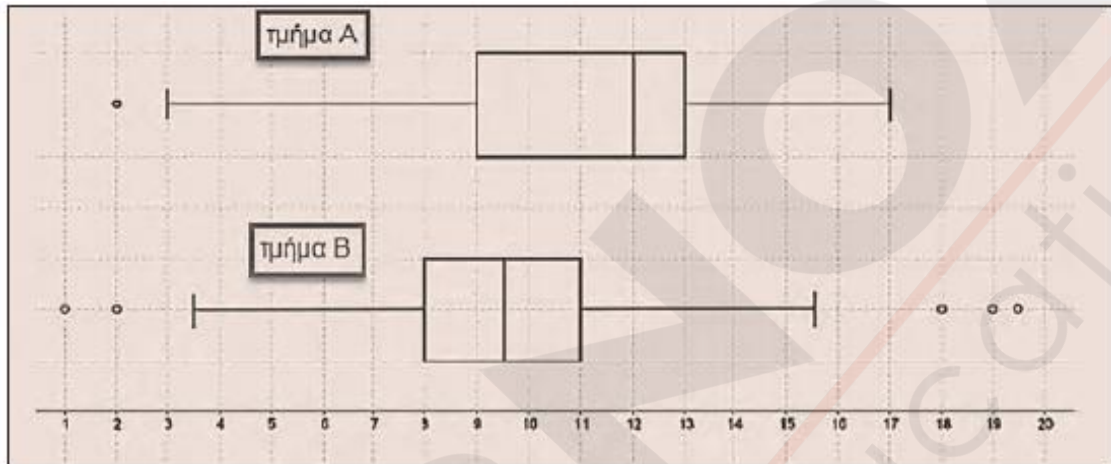
γ) Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές/μαθήτριες κάθε τμήματος που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 75% των μαθητών/τριών του τμήματος και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές/μαθήτριες που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 25% των μαθητών/τριών του τμήματος. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.

δ) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για κάθε τμήμα.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 3 :**

Τα παρακάτω θηκογράμματα παρουσιάζουν τους βαθμούς των μαθητών/τριών δύο τμημάτων Α και Β σε έναν μαθηματικό διαγωνισμό.



- α) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο εύρος βαθμών.
- β) Να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει το μεγαλύτερο ενδοτεταρτημοριακό εύρος βαθμών;
- γ) Σε ποιο από τα δύο τμήματα φαίνεται να είναι πιο συμμετρική γύρω από τη διάμεσο η κατανομή των βαθμών;
- δ) Να βρείτε το τμήμα και τη βαθμολογία των δύο μαθητών/τριών με τον καλύτερο βαθμό.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

#### Άσκηση 4 :

Ο επόμενος πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των απουσιών που έκαναν οι μαθητές ενός τμήματος τους μήνες Οκτώβριο και Νοέμβριο:

Απουσίες μαθητών ενός τμήματος																	
Οκτώβριος	14	7	0	19	21	7	3	0	0	25	2	9	8	7	14	20	0
Νοέμβριος	7	8	2	2	1	23	14	7	0	14	4	7	5	0	1	8	0

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα των απουσιών των μαθητών του τμήματος για κάθε μήνα χωριστά και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

#### Άσκηση 5 :

Για δύο τύπους μπαταριών Α και Β επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα σε χιλιάδες ώρες δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Μπαταρία τύπου Α	Μπαταρία τύπου Β
20	26
26	32
24	19
22	20
18	23

α) Να βρείτε τη δειγματική μέση τιμή της διάρκειας ζωής μιας μπαταρίας τύπου Α και μιας μπαταρίας τύπου Β.

β) Με βάση το παραπάνω δείγμα και το γεγονός ότι μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ, ποιου τύπου μπαταρία θα προτιμήσετε αν μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει:

- i) 40 ευρώ    ii) 42 ευρώ

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε μία από τις περιπτώσεις i) και ii).

γ) Να βρείτε τις δειγματικές τυπικές αποκλίσεις της A και της B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.

δ) Να βρείτε ποιο από τα δύο παραπάνω δείγματα μπαταριών τύπου A και B παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής.

### Άσκηση 6 :

Στις 12μ.μ. η θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λαμία και στη Θεσσαλονίκη το τελευταίο δεκαήμερο του Μαρτίου ήταν:

	Θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου									
Λαμία (Λ)	20	18	20	17	18	17	16	17	16	10
Θεσσαλονίκη (Θ)	18	16	17	15	16	12	16	17	20	22

α) Να βρείτε τη μέση, τη διάμεσο και την επικρατούσα θερμοκρασία των δειγμάτων της Λαμίας και της Θεσσαλονίκης.

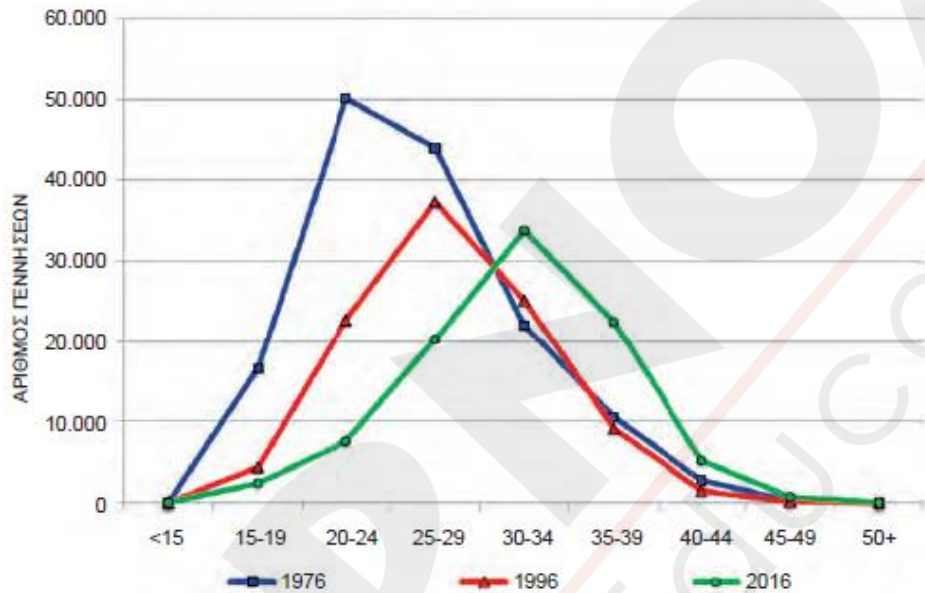
β) Αν η δειγματική τυπική απόκλιση (σε βαθμούς Κελσίου) για τη Λαμία και τη Θεσσαλονίκη είναι 2,66 και 2,59 αντίστοιχα, να δικαιολογήσετε σε ποια από τα δύο δείγματα οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη διασπορά.

γ) Εκ των υστέρων διαπιστώθηκε ότι το θερμόμετρο που χρησιμοποιήθηκε για τη μέτρηση της θερμοκρασίας στη Λαμία παρουσίαζε, λόγω κατασκευαστικού λάθους, αυξημένη θερμοκρασία κατά 5 βαθμούς. Αφού υπολογίσετε τις σωστές θερμοκρασίες της Λαμίας, να βρείτε σε ποια πόλη από τις δύο το συγκεκριμένο δεκαήμερο οι τιμές της θερμοκρασίας έχουν μεγαλύτερη ομοιογένεια. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 7 :**

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται τα πολύγωνα συχνότητας των γεννήσεων ζώντων κατά ομάδες ηλικιών της μητέρας για τα έτη 1976, 1996 και 2016 .



α) Σε ποια ηλικία των μητέρων έχουμε τις περισσότερες γεννήσεις το 1976, το 1996 και το 2016; Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

β) Να σχολιάσετε τον αριθμό γεννήσεων κατά ηλικιακή ομάδα των μητέρων για το 2016.

γ) Σε ποιες ηλικιακές ομάδες των μητέρων φαίνεται ο αριθμός των γεννήσεων το 2016 να ξεπερνάει τους αντίστοιχους αριθμούς για τα έτη 1996 και 1976; Γιατί πιστεύετε ότι συνέβη αυτό;

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 8 :**

Στον πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Η πέμπτη συχνότητα χάθηκε. Μπορείτε να την “ανακαλύψετε”, εάν γνωρίζετε ότι:

- α) η μέση τιμή είναι 4,4,
- β) η διάμεσος είναι το 4,5,
- γ) υπάρχουν δύο επικρατούσες τιμές;
- δ) Κατασκευάστε το ραβδόγραμμα

$x_i$	$v_i$
2	1
3	3
4	1
5	2
6	;
7	1

**Άσκηση 9 :**

Καθεμία από τις παρακάτω λίστες δεδομένων έχουν μέση τιμή 50.

- α) Σε ποια λίστα υπάρχει: (i) μεγαλύτερη (ii) μικρότερη διασπορά παρατηρήσεων;

(Να μη γίνουν πράξεις).

0, 20, 40, 50, 60, 80, 100

0, 48, 49, 50, 51, 52, 100

0, 1, 2, 50, 98, 99, 100

- β) Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για σύγκριση των δεδομένων αυτών το εύρος;

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 10 :**

Ο πίνακας αναφέρεται στη βαθμολογία 200 φοιτητών στο μάθημα της Στατιστικής.

Κλάσεις	$x_i$	$x_i^2$	$v_i$	$N_i$	$x_i \cdot v_i$	$x_i^2 \cdot v_i$
[0, 2)			35			
[2, 4)			40			
[4, 6)			45			
[6, 8)			50			
[8, 10)			30			
<b>Σύνολο</b>			200			

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα

β) Να υπολογιστεί η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση και ο συντελεστή μεταβλητότητας

γ) Ποιο βαθμό δεν υπερβαίνει το 85% των φοιτητών;

**Άσκηση 11 :**

Οι βαθμοί 100 μαθητών μιας τάξης του Λυκείου ομαδοποιημένοι σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	$f_i\%$
[0, 4)	35
[4, 8)	
[8, 12)	30
[12, 16)	

Αν ο μέσος όρος της βαθμολογίας των μαθητών αυτών είναι 7:

α) Να υπολογίσετε τις συχνότητες που λείπουν

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση

γ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

δ) Αν ο καθηγητής που διόρθωσε τα γραπτά ανεβάσει τη βαθμολογία όλων των μαθητών κατά μια μονάδα πόσο θα είναι τότε ο μέσος όρος της βαθμολογίας τους;

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*



**Άσκηση 12 :**

α) Έστω  $x_1, x_2, \dots, x_k$  οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  και  $f_1, f_2, \dots, f_k$  οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των προηγούμενων τιμών. Να αποδείξετε ότι:

i.  $0 \leq f_i \leq 1$  για κάθε  $i=1, 2, \dots, k$ .

ii.  $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ .

β) Πως ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας ενός δείγματος τιμών;

**Άσκηση 13 :**

A) Το καθημερινό δρομολόγιο ενός Λεωφορείου μιας γραμμής, που εκτελείται στις 8 π.μ, χρονομετρήθηκε τις δέκα πρώτες ημέρες του Σεπτεμβρίου, με τους εξής χρόνους σε λεπτά της ώρας:

14, 17, 13, 16, 18, 17, 15, 17, 15, 18

Να υπολογίσετε το μέσο όρο των χρόνων των δρομολογίων του Λεωφορείου στις 8 π.μ, στο πρώτο δεκαήμερο του Σεπτεμβρίου.

B) Σε έναν αγώνα ποδηλατοδρομίας, έλαβαν μέρος 25 ποδηλάτες και οι χρόνοι σε λεπτά της ώρας, που έκαναν για να διανύσουν μία συγκεκριμένη απόσταση, έχουν ως εξής:

8, 13, 10, 11, 15, 11, 15, 14, 14, 15, 8, 10, 16, 13, 13, 15, 11, 18, 11, 16, 14, 15, 16, 8, 10.

Να βρείτε το μέσο όρο (μέση τιμή), των χρόνων που έκαναν όλοι οι ποδηλάτες, για να διανύσουν αυτή την απόσταση.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 14 :**

Σε έρευνα που έγινε σε κάποιο Γυμνάσιο, σε ό,τι αφορά την υγεία της στοματικής κοιλότητας των μαθητών του, διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές έχουν επισκεφθεί τον οδοντίατρο 2, 3, 4, 5, 6 φορές το χρόνο σε αναλογία 5%, 25%, 45%, 15%, 10% αντίστοιχα. Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των επισκέψεων σε οδοντίατρο όλων των μαθητών του Σχολείου.

**Άσκηση 15 :**

Σε μία κάλη υπάρχουν 30 κόκκινες, άσπρες, γαλάζιες και πράσινες μπάλες, σε αναλογία 5%, 15%, 33%, 47%. Αν η μια κόκκινη μπάλα ζυγίζει 7 gr, μια άσπρη 9 gr, μια γαλάζια 8 gr και μια πράσινη 11 gr. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του βάρους για όλες τις μπάλες.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

## Ασκήσεις για Μελέτη

### Άσκηση 1 :

Δίνονται οι βαθμολογίες των μαθητών/τριών δύο τμημάτων της Γ΄ τάξης ενός γενικού λυκείου σε μια γραπτή αξιολόγηση της Άλγεβρας:

Τμήμα  $\Gamma_1$  : 15, 14, 20, 19, 18, 9, 10, 12, 14, 15 .

Τμήμα  $\Gamma_2$  : 17, 11, 10, 9, 18, 19, 20, 13, 12, 16 .

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας των μαθητών/τριών σε κάθε τμήμα.
- β) Να βρείτε τους συντελεστές μεταβλητότητας (CV) και να συγκρίνετε τα δύο τμήματα ως προς την ομοιογένειά τους.
- γ) Ο καθηγητής θέλει να δώσει βραβείο στους μαθητές/μαθήτριες κάθε τμήματος που πήραν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο από το 65% των μαθητών/τριών του τμήματος και να δώσει επιπλέον εργασία για το σπίτι στους μαθητές/μαθήτριες που πήραν βαθμό μικρότερο ή ίσο από το 35% των μαθητών/τριών του τμήματος. Να βρείτε τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα βραβευτούν και τους βαθμούς των μαθητών/τριών που θα πάρουν επιπλέον εργασία.
- δ) Να κατασκευάσετε τα θηκογράμματα για κάθε τμήμα και τα αντίστοιχα ραβδογράμματα.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

### Άσκηση 2 :

Παρουσιάζεται ο αριθμός των απουσιών που έκαναν οι μαθητές ενός τμήματος τους μήνες Δεκέμβριο, Γενάρη και Φεβρουάριο:

Δεκέμβριο: 14 , 7 , 25, 4 ,13 , 9 , 5 , 12 , 7 , 3 , 19 .

Ιανουάριο: 17 , 9 , 29, 0 ,12 , 6 , 2 , 18 , 1 , 6 , 22 .

Φεβρουάριο: 18 , 2 , 31, 4 , 2 , 8 , 12 , 8 , 15 , 16 , 12 .

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα των απουσιών των μαθητών του τμήματος για κάθε μήνα χωριστά και να συγκρίνετε τις απουσίες των μαθητών.

### Άσκηση 3 :

A) Να βρεθεί η διάμεσος των δεδομένων:

α) 16, 18, 13, 14, 15, 18, 19, 1, 16

β) 10, 15, 17, 8, 6, 20, 13, 14, 17, 15.

B) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων:

α) Πλοίο, Τρένο, Αεροπλάνο, Τρένο, Αυτοκίνητο, Πλοίο, Τρένο, Αεροπλάνο.

β) 10, 14, 17, 20, 13, 14, 17, 15, 14, 10, 17, 14, 20, 17, 20

γ) 10, 15, 17, 8, 6, 20, 13

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 4 :**

Έστω  $t_1, t_2, \dots, t_k$  οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής  $X$  ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , που έχουν μέση τιμή  $\bar{x}$  και τυπική απόκλιση  $s$ .

- i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμητικός μέσος των διαφορών  $t_1 - \bar{x}, t_2 - \bar{x}, \dots, t_k - \bar{x}$  είναι ίσος με μηδέν.
- ii. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής CV του δείγματος;

**Άσκηση 5 :**

Μια μεταβλητή  $X$  παίρνει τις τιμές  $x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 6$  και  $x_4 = 7$ . Αν οι συχνότητες των τιμών  $x_1, x_2$ , και  $x_4$  είναι 10, 3, και 6 αντίστοιχα, και η γωνία στο κυκλικό διάγραμμα που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2$  είναι  $40^\circ$ , τότε:

- α. Να δείξετε ότι η συχνότητα της τιμής  $x_3$  είναι ίσο με 8.
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των τιμών του δείγματος.
- γ. Να τη διασπορά του δείγματος.
- δ. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 6 :**

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα από μια έρευνα σ' ένα δείγμα 100 ατόμων

Τιμές ( $x_i$ )	Συχνότητα ( $\nu_i$ )
0	11
1	$\alpha$
2	12
3	8
4	11
<b>Σύνολο</b>	

- α) Να δείξετε ότι  $\alpha = 8$  .
- β) Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις στήλες  $f_i \%$  ,  $N_i$  ,  $F_i \%$  .
- γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή  $\bar{x}$  και τη διάμεσο  $\delta$  του δείγματος.
- δ) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

**Άσκηση 7 :**

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τις ημέρες άδειας που δικαιούνται 51 υπάλληλοι μιας επιχείρησης για ένα έτος εργασίας τους, ανάλογα με τα χρόνια υπηρεσίας τους.

Ημέρες άδειας [ , )	Κεντρική τιμή $x_i$	Συχνότητα $\nu_i$	$x_i \cdot \nu_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \nu_i$
[0,6)		11				
[6,12)		20				
[12,18)		5				
[18,24)		5				
[24,30)		10				
<b>Σύνολο</b>		51				

- α) Να μεταφέρετε τον παραπάνω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.
- β) Βρείτε τη μέση τιμή των ημερών αδειας των υπαλλήλων.
- γ) Πόσοι υπάλληλοι της επιχείρησης δικαιούνται άδεια λιγότερο από δεκαοκτώ (18) ημέρες τον χρόνο;
- δ) Βρείτε τη διακύμανση της παραπάνω κατανομής.
- ε) Βρείτε την τυπική απόκλιση.
- στ) Βρείτε τον συντελεστή μεταβολής.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*

### Άσκηση 8 :

Υπολογίστε τα ερωτήματα της άσκησης 7 , αν οι υπάλληλοι ήταν 100 .

Πως αλλάζουν τα δεδομένα; Τι συμπεράσματα εξάγετε;

### Άσκηση 9 :

Ο μέσος μισθός 150 υπαλλήλων σε έναν οργανισμό είναι  $x = 15000$  €. Η τυπική απόκλιση των μισθών είναι  $s = 1200$  €.

α. Αν οι 20 εργαζόμενοι με τον υψηλότερο μισθό έχουν μέσο μισθό 1800€, να βρείτε το μέσο μισθό των υπολοίπων υπαλλήλων.

β. Αν οι μισθοί όλων των υπαλλήλων αυξηθούν κατά 5%, να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής των νέων μισθών.

γ. Ομοίως αν οι αρχικοί μισθοί όλων των υπαλλήλων αυξηθούν κατά 50€, να βρείτε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής των νέων μισθών.

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*



**Άσκηση 10 :**

Οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  είναι ομαδοποιημένες σε κλάσεις ίσου πλάτους  $c$  , όπως δίνονται στον παρακάτω ελλιπή πίνακα:

Κλάσεις [ , )	$x_i$	$f_i$	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[3 , )		0,1		
[ , )				
[ , 12)				
[ , )				
<b>Σύνολο</b>				

Γνωρίζουμε επίσης ότι οι συχνότητες  $f_2$  ,  $f_3$  ,  $f_4$  είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 2, 3, 5 αντίστοιχα:

- α. Να βρείτε το  $c$  και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.
- β. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά των τιμών του δείγματος.
- γ. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.
- δ. Να βρείτε το συντελεστή μεταβολής των τιμών του δείγματος και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Ποια μεταβολή θα μπορούσατε να κάνετε ώστε το δείγμα να είναι ή να μην είναι ομοιογενές;

*Απλά και Κατανοητά η Γνώση!*