ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

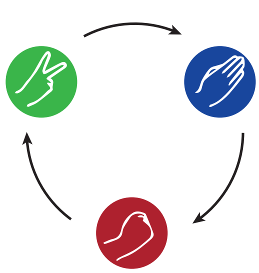
Εισαγωγή

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι ένας σύγχρονος κλάδος των Μαθηματικών που ξεκίνησε να αναπτύσσεται κυρίως μετά τον 16ο αιώνα, αλλά ακόμα περισσότερο τον 18ο αιώνα με τις εργασίες των διάσημων μαθηματικών Bernoulli, de Moivre, Laplace και Gauss. Είναι διαδεδομένη η άποψη ότι η Θεωρία Πιθανοτήτων έχει κυρίως ως εφαρμογή την μοντελοποίηση παιχνιδιών. Στην πραγματικότητα είναι πολύ περισσότερες οι εφαρμογές της στην Πληροφορική, τις Τηλεπικοινωνίες, την Ιατρική, τη Φυσική, σε Θετικές, Κοινωνικές και άλλες επιστήμες. Ήδη από τον 18ο αιώνα ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση παιχνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με εργασίες διάσημων μαθηματικών όπως οι Chebyshev, Markov, Von Mises και ιδιαίτερα με την αξιωματική θεμελίωση των Πιθανοτήτων από τον Kolmogorov 1933, έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο, παρέχοντας χρήσιμα μοντέλα και μεθόδους ανάλυσης για πολύπλοκα προβλήματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα θεμελιώδη στοιχεία της Θεωρίας Πιθανοτήτων και θα εμπλακούμε στη μοντελοποίηση πολύπλοκων φαινομένων, στα οποία υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την έκβασή τους.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.1. ΠΕΙΡΑΜΑΤΑ ΤΥΧΗΣ, ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ ΚΑΙ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Διερεύνηση



Η Άννα και ο Βασίλης παίζουν το γνωστό παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί».

α) Ο Βασίλης σκέφτηκε να διαλέγει συνέχεια «πέτρα». Πιστεύετε ότι αυτή η στρατηγική του δίνει πλεονέκτημα έναντι της Άννας;

β) Η Άννα πρότεινε να αλλάξουν το παιχνίδι και να παίξουν «πέτρα, ψαλίδι, μολύβι, χαρτί». Αν ο Βασίλης διατηρήσει την ίδια στρατηγική τότε ευνοείται από την αλλαγή του παιχνιδιού ή όχι, κατά τη γνώμη σας;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Πειράματα τύχης

Στο περιβάλλον μας υπάρχουν φαινόμενα που μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξή τους, αν γνωρίζουμε τις συνθήκες υπό τις οποίες συμβαίνουν. Για παράδειγμα, αν έχουμε ένα δοχείο με αποσταγμένο νερό σε θερμοκρασία 32^o Κελσίου και το θερμάνουμε μέχρι η θερμοκρασία του να φτάσει τους 100^o Κελσίου, τότε το νερό θα βράσει. Κάθε τέτοιο πείραμα, που η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται μας επιτρέπει να προκαθορίσουμε πλήρως το αποτέλεσμά του, λέγεται αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα.

Από την άλλη μεριά, δεν μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξη φαινομένων, όπως το πλήθος των κλήσεων ή των δεδομένων που θα δεχτεί ένα τηλεπικοινωνιακό κέντρο μέσα σε μία ώρα ή τη διάρκεια ζωής μιας λάμπας κτλ. Τέτοια πειράματα, το αποτέλεσμα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε και υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την έκβασή τους, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες, ονομάζονται πειράματα τύχης (random experiments) και μελετώνται από τη Θεωρία των Πιθανοτήτων.

Υπάρχουν πειράματα που έχουν «φύση» αιτιοκρατικού πειράματος, αλλά η αβεβαιότητα της έκβασής τους είναι πολύ μεγάλη, λόγω της πολυπλοκότητας του αιτιοκρατικού μοντέλου που τα περιγράφει. Ένα παράδειγμα είναι το στρίψιμο ενός αμερόληπτου (τίμιου) κέρματος: Αν κανείς γνωρίζει με ακρίβεια τις συνθήκες του στριψίματος, θεωρητικά είναι σε θέση να προβλέψει την έκβαση του πειράματος (δηλ. κεφαλή ή γράμματα) με βάση τους νόμους της κλασικής Φυσικής. Ωστόσο, το αποτέλεσμα του στριψίματος είναι εξαιρετικά «ευαίσθητο» σε πολύ μικρές αλλαγές των αρχικών συνθηκών και έτσι η εξαγωγή ενός τύπου που θα προέβλεπε την έκβαση του στριψίματος από τις αρχικές συνθήκες του πειράματος θα ήταν όχι μόνο εξαιρετικά δύσκολη στην πράξη αλλά και μη λειτουργική, λόγω της πολύπλοκης εξάρτησης του αποτελέσματος από τις αρχικές συνθήκες. Σε αυτή την περίπτωση, είναι πιο αποτελεσματικό να χρησιμοποιηθεί η Θεωρία Πιθανοτήτων, ώστε να μοντελοποιηθεί το στρίψιμο του κέρματος βάσει των πιθανών εκβάσεών του, δηλαδή ως πείραμα τύχης. Με άλλα λόγια, θα λέγαμε ότι «η τυχαιότητα μοντελοποιεί την πολυπλοκότητα».

Παιχνίδια όπως το στρίψιμο ενός κέρματος, η ρίψη ενός ζαριού, το παιχνίδι «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί» ή το τάβλι είναι χαρακτηριστικά παραδείγματα πειραμάτων τύχης. Ωστόσο, η Θεωρία των Πιθανοτήτων, εκτός από διασκεδαστικά παιχνίδια, χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση και την ανάλυση προβλημάτων από τον χώρο των Φυσικών Επιστημών, των Επιστημών Υγείας, της Οικονομικής Επιστήμης και άλλων, τα οποία είναι αρκετά πολύπλοκα για να διερευνηθούν ως αιτιοκρατικά πειράματα.

Δειγματικός χώρος

Αν ω_1, ω_2,...,ω_κ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa\}$.

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση ένος πειράματος τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές εκβάσεις του πειράματος. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε ως πείραμα τύχης την καταγραφή των επιλογών των δύο παικτών του παιχνιδιού «πέτρα, ψαλίδι, χαρτί», τότε ένα δυνατό αποτέλεσμα είναι το (πέτρα, χαρτί), όπου ο πρώτος παίκτης επιλέγει «πέτρα» και ο δεύτερος «χαρτί». Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται δειγματικός χώρος (sample space, εν συντομία δ.χ.) και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δ.χ. αποτελείται από όλα τα δυνατά διατεταγμένα ζεύγη των λέξεων «πέτρα», «ψαλίδι» και «χαρτί». Δηλαδή είναι:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (\text{πέτρα}, \text{χαρτί}), (\text{χαρτί}, \text{πέτρα}), (\text{πέτρα}, \text{ψαλίδι}), \\ (\text{ψαλίδι}, \text{πέτρα}), (\text{χαρτί}, \text{ψαλίδι}), (\text{ψαλίδι}, \text{χαρτί}) \\ (\text{πέτρα}, \text{πέτρα}), (\text{χαρτί}, \text{χαρτί}), (\text{ψαλίδι}, \text{ψαλίδι}) \end{matrix} \right\}$$

Αν θεωρήσουμε ως πείραμα τύχης τη ρίψη ενός ζαριού και μας ενδιαφέρει η ένδειξη της άνω έδρας, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δ.χ. είναι:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ενδεχόμενα

Οποιοδήποτε σύνολο δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης ονομάζεται ενδεχόμενο (event) ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού κάποια ενδεχόμενα είναι τα παρακάτω Α, Β και Γ:

Α: «Έρχεται άρτιος αριθμός»,

Β: «Έρχεται αριθμός μικρότερος του 5»,

Γ: «Έρχεται 1».

Κάθε ενδεχόμενο αντιστοιχεί σε ένα σύνολο στοιχείων του δ.χ.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

δηλαδή σε ένα υποσύνολο του Ω. Τα παραπάνω ενδεχόμενα γράφονται :

$$A=\{2, 4, 6\},\ B=\{1, 2, 3, 4\} \text{ και } \Gamma=\{1\}$$

Αν το αποτέλεσμα ενός πειράματος τύχης είναι το ω_ν τότε όλα τα ενδεχόμενα που περιέχουν το ω_ν λέμε ότι πραγματοποιούνται, ενώ τα ενδεχόμενα που δεν περιέχουν το ω_ν λέμε ότι δεν πραγματοποιούνται.

Αν γίνει μία ρίψη του ζαριού και το αποτέλεσμα είναι 3, τότε λέμε ότι το Β πραγματοποιείται γιατί περιέχει το 3, ενώ τα Α και Γ δεν πραγματοποιούνται, γιατί δεν περιέχουν το 3. Το 3 είναι ένα ευνοϊκό αποτέλεσμα για το Β. Άλλα ευνοϊκά αποτελέσματα για το Β είναι τα 1, 2 και 4. Αντίστοιχα, ευνοϊκά αποτελέσματα για το Α είναι τα 2, 4 και 6, ενώ για το Γ είναι μόνο το 1.

Η γλώσσα των συνόλων

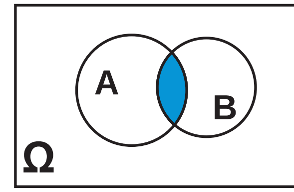
Όπως είδαμε τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δ.χ. Ω. Συνεπώς, μπορούν να αναπαρασταθούν με διαγράμματα Venn.

Η τομή των ενδεχομένων Α και Β συμβολίζεται με $A \cap B$ και πραγματοποιείται όταν το Α και το Β πραγματοποιούνται. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A \cap B = \{ 2, 4 \}$$

Άρα τα στοιχεία της τομής των Α και Β είναι τα κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα των δύο ενδεχομένων Α και Β.

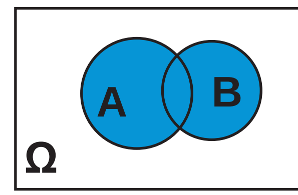
$A \cap B$



Αντίστοιχα, η ένωση των Α και Β συμβολίζεται με $A \cup B$ και πραγματοποιείται όταν ένα τουλάχιστον από τα Α ή Β πραγματοποιείται. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 6 \}$$

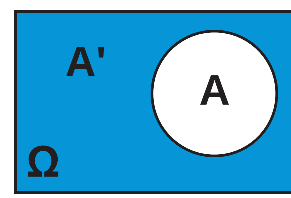
$A \cup B$



Το συμπληρωματικό ή αντίθετο του ενδεχομένου Α συμβολίζεται με Α΄ και πραγματοποιείται, αν το Α δεν πραγματοποιείται. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A' = \{ 1, 3, 5 \}$$

Α΄

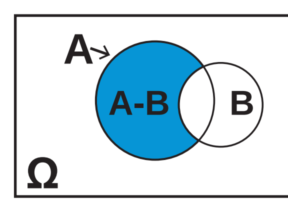


Δηλαδή το Α΄ πραγματοποιείται αν έρθει περιττός αριθμός.
Η διαφορά του Β από το Α συμβολίζεται με Α - Β και πραγματοποιείται όταν το Α πραγματοποιείται αλλά όχι το Β. Η Α – Β αποτελείται από τα ευνοϊκά αποτελέσματα του Α που δεν είναι ευνοϊκά για το Β. Για το παραπάνω παράδειγμα είναι:

$$A - B = \{ 6 \}$$

Δηλαδή, από τα 2, 4 και 6 που είναι ευνοϊκά για το Α «διαγράφουμε» τα 2 και 4 που είναι ευνοϊκά και για το Β. Με άλλα λόγια το Α - Β πραγματοποιείται αν έρθει άρτιος αριθμός που δεν είναι μικρότερος του 5. Ανάλογα, στο παράδειγμά μας $B - A = \{ 1, 3 \}$.

$A - B$



Με αφορμή το παράδειγμα του ζαριού κάνουμε τις παρακάτω γενικές παρατηρήσεις:

— Ένα ενδεχόμενο που περιέχει ένα μόνο στοιχείο του δ.χ., όπως το Γ στο παράδειγμά μας, ονομάζεται απλό ή στοιχειώδες.
— Ενδεχόμενα που περιέχουν περισσότερα από ένα στοιχεία του δ.χ., όπως τα Α και Β στο παράδειγμά μας, ονομάζονται σύνθετα.
— Το ενδεχόμενο $\varnothing$ ονομάζεται αδύνατο ενδεχόμενο.
— Αν δύο ενδεχόμενα δεν έχουν κοινά ευνοϊκά αποτελέσματα ή κοινά στοιχεία ως σύνολα (δηλαδή δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα), όπως τα Α και Γ στο παράδειγμά μας όπου $A \cap \Gamma = \varnothing$, λέμε ότι είναι ασυμβίβαστα. Έτσι, τα Α και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Το κενό σύνολο $\{ \ \}$ συμβολίζεται ως $\varnothing$.

— Το ενδεχόμενο Ω ονομάζεται βέβαιο ενδεχόμενο.

— Αν η ένωση δύο ενδεχομένων είναι όλος ο δ.χ. Ω, όπως η ένωση του Β και του $\Delta = \{ 3, 5, 6 \}$ στο παράδειγμά μας, όποιο κι αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος τύχης, θα πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από αυτά: είτε το Δ είτε το Β, είτε και τα δύο.

— Αν ένα στοιχείο Γ είναι υποσύνολο ενός ενδεχομένου Β, όπως στο παράδειγμά μας, όπου $\Gamma \subseteq B$, αν το Γ πραγματοποιείται, τότε και το Β πραγματοποιείται.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Η Αθηνά και ο Κωστής προσπαθούν να γράψουν έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης των τριών διαδοχικών ρίψεων ενός νομίσματος.

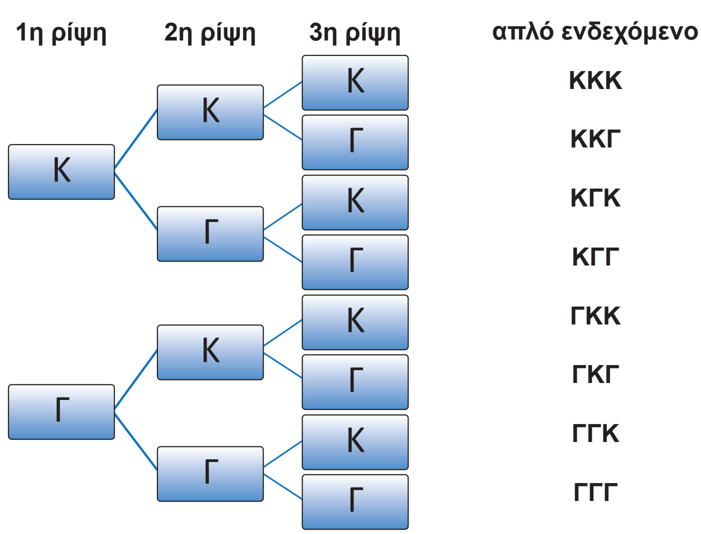
Η Αθηνά γράφει ότι υπάρχουν τα παρακάτω απλά ενδεχόμενα, όπου Κ σημαίνει κεφαλή και Γ σημαίνει γράμματα:

ω_1: 1Κ και 2 Γ, ω_2: 1Γ και 2 Κ, ω_3: 3Κ και ω_4: 3 Γ.

Άρα ο δ.χ. σύμφωνα με την Αθηνά είναι:

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \}.$$

Ο Κωστής έδωσε άλλη απάντηση κατασκευάζοντας το παρακάτω δενδροδιάγραμμα:



Άρα ο δ.χ. είναι:

$$\Omega = \{ \text{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} \}$$

Με ποιον από τους δύο συμφωνείτε;

Λύση

Και οι δύο δειγματικοί χώροι είναι σωστοί εφόσον περιέχουν όλες τις πιθανές εκβάσεις του πειράματος τύχης.
Ο δ.χ. του Κωστή περιγράφει με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την έκβαση του πειράματος και είναι καταλληλότερος για την μοντελοποίηση του πειράματος τύχης σε περιπτώσεις που είναι σημαντική η σειρά που εμφανίζονται τα Κ και Γ.
Για παράδειγμα, σκεφτείτε το παρακάτω πρόβλημα (1ο σενάριο):
«Σε ένα παιχνίδι με τρεις παίκτες, πρώτος στρίβει το κέρμα ο παίκτης Α, δεύτερος ο Β και τρίτος ο C και κερδίζουν δώρο όποιοι φέρουν Κ».
Αν έχουμε την πληροφορία ότι η έκβαση του πειράματος είναι το ω_2 του δ.χ. της Αθηνάς, δηλαδή ότι 1 παίκτης έφερε Γ και 2 παίκτες έφεραν Κ, τότε δεν μπορούμε να καταλάβουμε ποιοι κέρδισαν, γιατί δε γνωρίζουμε ποιοι είναι οι δύο που έφεραν Κ.
Αν όμως, σύμφωνα με τον δ.χ. του Κωστή, έχουμε την πληροφορία ότι η έκβαση είναι ΚΚΓ τότε κερδίζουν οι Α και Β. Αντίστοιχα, αν η έκβαση είναι ΚΓΚ κερδίζουν οι Α και C και η έκβαση είναι ΓΚΚ κερδίζουν οι Β και C.
Άρα, ο δ.χ. της Αθηνάς δεν είναι κατάλληλος για αυτό το πρόβλημα, γιατί δε «λαμβάνει υπόψη του» τη σειρά εμφάνισης των Κ και Γ.
Τα πράγματα αλλάζουν αν έχουμε το πρόβλημα (2ο σενάριο):
«Ένας παίκτης στρίβει τρεις φορές ένα αμερόληπτο κέρμα και κερδίζει δώρο αν φέρει περισσότερες φορές Κ από Γ».
Τότε και οι δύο δ.χ. είναι κατάλληλοι για τη μοντελοποίηση του πειράματος τύχης και μάλιστα ο δ.χ. της Αθηνάς είναι απλούστερος αφού περιέχει λιγότερα στοιχεία.

Το συμπέρασμα από αυτό το παράδειγμα είναι ότι ο δ.χ. ενός πειράματος τύχης δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος (π.χ. στο 2ο σενάριο και οι δύο δ.χ. είναι κατάλληλοι) και η επιλογή του δ.χ. είναι μέρος της μοντελοποίησης του πειράματος τύχης (π.χ. στο 1ο σενάριο ο δ.χ. της Αθηνάς δεν είναι ένα καλό μοντέλο για το πείραμα τύχης).

Εφαρμογή 2

Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Ω είναι ο δ.χ. του πειράματος τύχης που περιγράφεται στον διπλανό πίνακα.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Να γράψετε τα παρακάτω ενδεχόμενα με αναγραφή των στοιχείων τους:

Α: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός»,

Β: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,

Γ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

Στη συνέχεια να γράψετε τα ενδεχόμενα A', $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$ και $B - \Gamma$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Με πορτοκαλί το Α

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Με πράσινο το Β

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Με κίτρινο το Γ

Λύση

Έχοντας επιλέξει τον παραπάνω δ.χ. για το πείραμα τύχης, διακρίνουμε τα ζάρια σε πρώτο και δεύτερο. Για παράδειγμα, το (1,2) αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα που το πρώτο ζάρι φέρνει 1 και το δεύτερο 2, ενώ το (2,1) αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα που το πρώτο ζάρι φέρνει 2 και το δεύτερο 1. Κάθε διατεταγμένο ζεύγος σε κελί του πίνακα αντιστοιχεί σε ένα δυνατό αποτέλεσμα της ρίψης των δύο ζαριών.
Από τον πίνακα προκύπτει ότι:

$$A = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$$

$$B = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$$

και

$$\Gamma = \{(4,4), (4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

Το Α΄ πραγματοποιείται αν δεν πραγματοποιείται το Α. Το ενδεχόμενο Α΄ είναι το:

$$A' = \left\{\begin{array}{lll} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), & & \\ (2,1), & (2,3), & (2,5), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), & & \\ (4,1), & (4,3), & (4,5), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), & & \\ (6,1), & (6,3), & (6,5) \end{array}\right\}$$

Το $A \cup \Gamma$ πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται ή το Α ή το Γ.

Επομένως:

$$A \cup \Gamma = \left\{\begin{array}{l} (2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,4),(5,5),(5,6),(6,2),(6,4),(6,5),(6,6) \end{array}\right\}$$

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	~~4,4~~	4,5	~~4,6~~
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	~~6,4~~	6,5	~~6,6~~

Α – Γ: «Διαγράφουμε» τα στοιχεία του Α που ανήκουν και στο Γ

Το Α - Γ πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται το Α, αλλά όχι το Γ.

Άρα:

$$A - \Gamma = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (6,2)\}$$

Το Β - Γ πραγματοποιείται αν πραγματοποιείται το Β, αλλά όχι το Γ.
Το Β και το Γ δεν έχουν κοινά στοιχεία, άρα:

$$B - \Gamma = B$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Τα χρώματα μιας ομάδας βόλεϊ είναι λευκό, γαλάζιο και μαύρο. Για κάθε παίκτη/παίκτρια η ομάδα δίνει τα εξής ρούχα:

— Τρεις μονόχρωμες μπλουζες: Μία λευκή (Λ), μία γαλάζια (Γ) και μία μαύρη (Μ).

— Τρία μονόχρωμα σορτσάκια, στα ίδια χρώματα με τις μπλούζες.

— Δύο ζευγάρια κάλτσες, ένα μαύρο κι ένα λευκό.

Επιλέγουμε τυχαία μία μπλούζα, ένα σορτσάκι κι ένα ζευγάρι κάλτσες.

α) Να γράψετε έναν δ.χ. του πειράματος τύχης.

β) Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω δ.χ. να βρείτε το ενδεχόμενο Α: «τα ρούχα που επιλέξαμε έχουν ίδιο χρώμα».

2) Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Στον δ.χ. της εφαρμογής 2 να βρείτε τα ενδεχόμενα:

α) Α: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης.

β) Β: Το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός.

γ) Γ: Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι 6.

δ) $A \cap B$, $A \cup B$, $B - \Gamma$, $A - \Gamma$ και $\Gamma - A$.

3) Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μία άσπρη, μία κόκκινη και μία μαύρη. Παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα τυχαία και καταγράφουμε το χρώμα της. Μετά ξανατοποθετούμε τη μπάλα στο κουτί και επαναλαμβάνουμε άλλη μία φορά την τυχαία επιλογή μπάλας. Έτσι, στο τέλος έχουμε καταγράψει δύο χρώματα (ίδια ή διαφορετικά), ένα για κάθε μπάλα που επιλέξαμε. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ερωτήματα:

α) Ποιο είναι το ενδεχόμενο Α: «η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»;

β) Ποιο είναι το ενδεχόμενο Β: «η δεύτερη μπάλα είναι κόκκινη»;

γ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A \cap B$ και να το βρείτε.

δ) Να εκφράσετε λεκτικά το ενδεχόμενο $A - B$ και να το βρείτε.

4) Να λύσετε την άσκηση 3, αν αυτή τη φορά η μπάλα που εξάγεται την πρώτη φορά δεν επανατοποθετείται στο κουτί πριν τη δεύτερη εξαγωγή μπάλας.

5) Ρίχνουμε δύο ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα της ρίψης. Να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα A', $A \cup \Gamma$, $A - \Gamma$ και $B - \Gamma$, όπου:

Α: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι άρτιος αριθμός»,

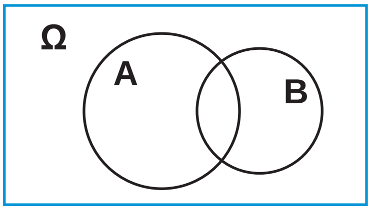
Β: «Το αποτέλεσμα των ρίψεων έχει άθροισμα 7»,

Γ: «Το αποτέλεσμα και των δύο ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 3».

6) Δύο παίκτες παίζουν σκάκι και συμφωνούν να είναι νικητής εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παρτίδες. Να γράψετε έναν δ.χ. για το πείραμα τύχης, από τον οποίο να προκύπτει πόσα παιχνίδια έγιναν μέχρι να βγει νικητής, ποιος προηγήθηκε και ποιος τελικά κέρδισε.

Πρόσθετο Υλικό

1) Οι ένοικοι μίας πολυκατοικίας παρκάρουν τα οχήματά τους σε ένα χώρο στάθμευσης αυτοκινήτων. Στο παρακάτω διάγραμμα Venn, το Α έχει ως στοιχεία τους ενοίκους που έχουν αυτοκίνητο και το Β εκείνους που έχουν μηχανή. Επιλέγουμε τυχαία έναν ένοικο.



Χρησιμοποιώντας τη γλώσσα των συνόλων (τομή, ένωση κτλ.) να εκφράσετε τα ενδεχόμενα ο ένοικος που επιλέγουμε:

α) έχει αυτοκίνητο και μηχανή.
β) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
γ) δεν έχει αυτοκίνητο ή μηχανή.
δ) δεν έχει αυτοκίνητο και δεν έχει μηχανή.
ε) δεν έχει (και) αυτοκίνητο και μηχανή.
στ) δεν έχει αυτοκίνητο ή δεν έχει μηχανή.
ζ) έχει μόνο αυτοκίνητο ή έχει μόνο μηχανή.
η) έχει αυτοκίνητο ή μηχανή, αλλά δεν ανήκει σε αυτούς που έχουν και αυτοκίνητο και μηχανή.

2) Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δ.χ. Ω να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της πρώτης στήλης με τα ίσα προς αυτά ενδεχόμενα της δεύτερης στήλης.

1η στήλη
$(A \cup B)'$
$(A \cap B)'$
$(A - B) \cup (B - A)$

2η στήλη
$A' \cup B'$
$(A \cup B) - (A \cap B)$
$A' \cap B'$

Στη συνέχεια να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα του πίνακα. Ποιες λεκτικές εκφράσεις αντιστοιχούν σε ίσα ενδεχόμενα;

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.2. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ: ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Διερεύνηση

Πόσο πιθανό είναι να συμβει;

Παρακάτω περιγράφονται δύο παιχνίδια για δύο παίκτες.

Παιχνίδι 1: Οι δύο παίκτες ο Α και ο Β στρίβουν ένα κέρμα δύο φορές ο καθένας και καταγράφουν τα αποτελέσματα. Ο παίκτης Α κερδίζει αν έρθει δύο φορές γράμματα. Ο παίκτης Β κερδίζει αν έρθει διαφορετικό αποτέλεσμα σε κάθε ρίψη.

Παιχνίδι 2: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος χωρισμένος σε τρεις ίσους κυκλικούς τομείς, από τους οποίους καθένας έχει άλλο χρώμα και έναν διαφορετικό αριθμό επάνω του. Το βέλος περιστρέφεται και σταματά. Αν σταμάτησε σε θετικό αριθμό κερδίζει ο παίκτης Α, ενώ αν σταμάτησε σε αρνητικό αριθμό κερδίζει ο παίκτης Β.

— Θεωρείτε ότι τα παραπάνω παιχνίδια είναι δίκαια και για τους δύο παίκτες;
— Πώς το εξηγείτε;
— Αν όχι, τι θα μπορούσε να αλλάξει ώστε να γίνουν;

Βασικές μαθηματικές έννοιες -Ιδέες-Διεργασίες

Εισαγωγικά για την έννοια της πιθανότητας

Τα παιχνίδια που περιγράφονται παραπάνω μπορούν να θεωρηθούν ως πειράματα τύχης, για τα οποία μιλήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, καθώς ένα κύριο χαρακτηριστικό τους είναι πως δεν μπορεί να προβλεφθεί το αποτέλεσμά τους. Δηλαδή υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με το ποιος παίκτης θα κερδίσει σε κάθε παιχνίδι. Η αβεβαιότητα αυτή όμως είναι ίδια και στις δύο περιπτώσεις παιχνιδιών; Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το ενδεχόμενο «κερδίζει ο παίκτης Α», η βεβαιότητα για την πραγματοποίηση του είναι η ίδια και στα δύο παιχνίδια; Πώς μπορούμε να «μετρήσουμε» τη βεβαιότητα αυτή;

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, όπως το προηγούμενο, είναι ένας αριθμός που εκφράζει το μέτρο της βεβαιότητας που αποδίδουμε στο να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο αυτό.

Στην ειδική περίπτωση που θεωρούμε ότι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης είναι ισοπίθανα, όπως στην ρίψη ενός αμερόληπτου κέρματος ή ζαριού, ισχύει ο παρακάτω ορισμός.

Κλασικός ορισμός πιθανότητας

Σε ένα πείραμα τύχης με ν ισοπίθανα αποτελέσματα, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α που περιέχει κ τέτοια αποτελέσματα είναι:

$$P(A)=\frac{\text{Πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το A}}{\text{Πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων}}=\frac{\kappa}{\nu}$$

Άμεσες συνέπειες του κλασικού ορισμού είναι οι παρακάτω:

— $P(\Omega) = 1$,

— $P(\varnothing) = 0$,

— Για κάθε ενδεχόμενο του δ.χ. Ω ισχύει $0 \leq P(A) \leq 1$

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της ρίψης ενός αμερόληπτου κέρματος με δ.χ.:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και το ενδεχόμενο Α: το αποτέλεσμα της ρίψης είναι μεγαλύτερο του 4, δηλαδή:

$$A = \{5, 6\}$$

Τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α είναι:

$$P(A)=\frac{2}{6}$$

Στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρώντας έναν δ.χ. ενός πειράματος τύχης, αυτό που κάναμε είναι ένα μέρος της μοντελοποίησης του πειράματος, λέγοντας τι μπορεί να συμβεί. Τώρα εμπλουτίζουμε το μοντέλο μας, αφού μπορούμε να πούμε και πόσο πιθανά θεωρούμε να συμβούν αυτά που μπορούν να συμβούν.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το άθροισμα των ενδείξεών τους. Ποιο άθροισμα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης;

Λύση

Μπορούμε να καταγράψουμε τα πιθανά αποτελέσματα όπως φαίνεται στον πίνακα. Στη συνέχεια θεωρούμε τα 36 διατεταγμένα ζεύγη στα κελιά του πίνακα ως στοιχεία του δ.χ. της ρίψης δύο ζαριών. Για δύο πραγματικά αμερόληπτα ζάρια είναι ρεαλιστικό να υποθέσουμε ότι τα 36 αυτά αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά.

Ο δειγματικός χώρος της ρίψης δύο ζαριών που χρησιμοποιούμε στην εφαρμογή 1

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας, το ενδεχόμενο A_7: το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 7, δηλαδή το

$$A_7 = \{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6)\}$$

έχει πιθανότητα να πραγματοποιηθεί:

Χρήση του κλασικού ορισμού

$$P(A_7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Αυτό είναι και το άθροισμα με τη μεγαλύτερη πιθανότητα εμφάνισης. Οποιοδήποτε άλλο άθροισμα έχει μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης, καθώς τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι λιγότερα από 6.
Π.χ. το ενδεχόμενο A_6: το άθροισμα των δύο ρίψεων είναι ίσο με 6

$$A_6 = \{(5,1), (4,2), (3,3), (2,4), (2,5), (1,5)\}$$

έχει πιθανότητα ίση με:

$$P(A_6) = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$$

Διερεύνηση

Παιχνίδι 3: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος χωρισμένος σε έναν κίτρινο και έναν μπλε τομέα. Ο παίκτης Α περιστρέφει μία φορά το βέλος. Κερδίζει αν το βέλος βρεθεί σε μπλε περιοχή, αλλιώς κερδίζει ο Β. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο παίκτης Α;

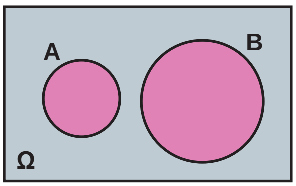
Βασικές μαθηματικές έννοιες -Ιδέες-Διεργασίες

Είναι ιδιαίτερα συνηθισμένο τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης να μην είναι ισοπίθανα. Υπάρχουν απλά παραδείγματα όπως το γνωστό παιχνίδι όπου κάποιος πετάει στον αέρα ένα μπουκάλι μισογεμάτο με νερό και καταγράφει αν θα πέσει όρθιο ή όχι στο έδαφος (bottle flip), αλλά και πιο σύνθετα όπως οι λειτουργίες κυκλωμάτων υπολογιστών και κινητών τηλεφώνων. Σε αυτή την κατηγορία εμπίπτουν τα περισσότερα από τα ενδιαφέροντα προβλήματα που μελετά η Θεωρία των Πιθανοτήτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ο αξιωματικός ορισμός, που εφαρμόζεται ευρύτερα από τον κλασικό.
Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε μία αντιστοιχία μεταξύ των ενδεχομένων ενός δ.χ. ενός πειράματος τύχης και πραγματικών αριθμών που να ανήκουν στο διάστημα [0, 1], έτσι ώστε κάθε αριθμός να εκφράζει πόσο πιθανό θεωρούμε να πραγματοποιηθεί το αντίστοιχο ενδεχόμενο. Παρακάτω περιγράφεται πώς μπορεί να κατασκευαστεί αυτή η αντιστοιχία.

Η αντιστοιχία που ορίζεται με τον αξιωματικό ορισμό

$A \to P(A)$

Ο απλός προσθετικός νόμος



$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Αξιωματικός ορισμός πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1, \omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δ.χ. ενός πειράματος τύχης. Σε κάθε ενδεχόμενο Α του Ω **αποδίδουμε** έναν πραγματικό αριθμό που ονομάζουμε πιθανότητα του Α και συμβολίζουμε με $P(A)$, έτσι ώστε:

— $P(A) \geq 0$, για οποιοδήποτε Α του Ω

— $P(\Omega) = 1$

— Ικανοποιείται ο απλός προσθετικός νόμος:

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω, τότε $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο ότι ο αξιωματικός ορισμός έχει τις παρακάτω συνέπειες:

$$P(A) \leq 1, \text{ για οποιοδήποτε ενδεχόμενο } A \text{ και } P(\varnothing) = 0.$$

Η πιθανότητα $P(A)$, δηλαδή ο αριθμός που αποδίδουμε στο Α και που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του ορισμού, είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο 0 και στο 1 και εκφράζει το πόσο πιθανό θεωρούμε να συμβεί το Α. Στο αδύνατο ενδεχόμενο αποδίδουμε πιθανότητα 0 και στο βέβαιο ενδεχόμενο (το Ω) αποδίδουμε πιθανότητα 1.

Για να μελετήσουμε, με χρήση του αξιωματικού ορισμού, ένα πείραμα τύχης κάνουμε το εξής:

Προσδιορίζουμε τα δυνατά αποτελέσματα $\omega_1, \omega_2,\dots,\omega_\nu$ δηλαδή έναν κατάλληλο δ.χ. για το πείραμα τύχης και αντιστοιχίζουμε στα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_1\}, \{\omega_2\},\dots, \{\omega_\nu\}$ τους πραγματικούς αριθμούς $p_1, p_2,\dots,p_\nu$ που εκφράζουν πόσο πιθανό θεωρούμε κάθε δυνατό αποτέλεσμα. Δηλαδή $P(\{\omega_i\})=p_i$ για κάθε $i = 1,2,3,\dots,\nu$.

Αυτό το κάνουμε ώστε να ισχύουν:

— $0 \leq p_i$, για κάθε $i = 1,2,\dots,\nu$ (αφού θέλουμε $P(A)\geq 0$)

— $p_1 + p_2 +\dots+p_\nu = 1$ (αφού θέλουμε $P(\Omega)=1$)

Στη συνέχεια, προκειμένου να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε άλλο ενδεχόμενο χρησιμοποιούμε το 3ο αξίωμα (τον απλό προσθετικό νόμο). Π.χ.

$$P(\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}) = P(\{\omega_1\}) + P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = p_1 + p_2 + p_3$$

Με αυτόν τον τρόπο αποδίδουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε σύνθετο ενδεχόμενο του Ω, εξασφαλίζοντας ότι ο αξιωματικός ορισμός ικανοποιείται.

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας είναι υποπερίπτωση του αξιωματικού ορισμού. Στην εφαρμογή 1, για παράδειγμα, θεωρούμε ως απλά ενδεχόμενα του δ.χ. τα $\{\omega_i\}$, για i=1, 2, ..., 36, όπου κάθε ω_i αντιστοιχεί σε ένα κελί του πίνακα που εκφράζει τον δ.χ. της ρίψης των δύο ζαριών.

Θεωρώντας -ρεαλιστικά- τα αποτελέσματα ω_i ισοπίθανα, τότε σε κάθε $\{\omega_i\}$ με i = 1,2,…,36 αποδίδουμε πιθανότητα $p_i = \frac{1}{36} \geq 0$.

Επίσης ισχύει $p_1 + p_2 + ... + p_{36} = 36 \cdot \frac{1}{36} = 1$.

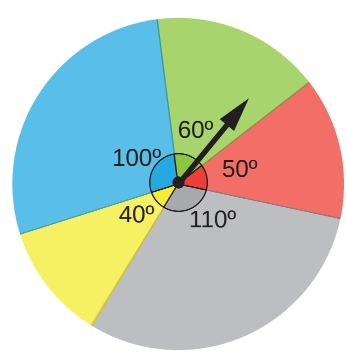
Όπως είδαμε, εφόσον ισχύουν τα παραπάνω, μπορούμε να αποδώσουμε πιθανότητα σε οποιοδήποτε σύνθετο ενδεχόμενο του Ω, εξασφαλίζοντας ότι ικανοποιείται ο αξιωματικός ορισμός.

Έτσι, αν π.χ. $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa\}$ τότε $P(A) = p_1 + p_2 + ... + p_\kappa = \frac{\kappa}{36}$, που είναι ακριβώς το ίδιο με αυτό που λέει ο κλασικός ορισμός. Άρα οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι στην περίπτωση αυτή.

Εφαρμογές

Εφαρμογή 2

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένας δίσκος, χωρισμένος σε χρωματισμένους κυκλικούς τομείς. Ο δίσκος χρησιμεύει σε ένα παιχνίδι με τους εξής κανόνες. Κάθε παίκτης επιλέγει ένα χρώμα και ένας από όλους περιστρέφει το βέλος με δύναμη. Το βέλος σταματάει την περιστροφή του. Νικητής είναι ο παίκτης που είχε επιλέξει το χρώμα του τομέα που σταμάτησε το βέλος.



Αν το βέλος σταματήσει μεταξύ δύο τομέων, τότε θεωρούμε ότι βρίσκεται στον τομέα που είναι το μεγαλύτερο μέρος του. Αν σταματήσει έτσι ώστε να μην είναι φανερό σε ποιον τομέα βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος του, η περιστροφή του βέλους επαναλαμβάνεται.

α) Η Γιάννα και ο Λεωνίδας προσπάθησαν να μοντελοποιήσουν το πείραμα τύχης ορίζοντας δ.χ. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ με τα απλά ενδεχόμενα:

ω_1: «το βέλος σταματάει στο πράσινο»

ω_2: «το βέλος σταματάει στο γαλάζιο»

ω_3: «το βέλος σταματάει στο κίτρινο»

ω_4: «το βέλος σταματάει στο γκρι»

ω_5: «το βέλος σταματάει στο κόκκινο»

Όμως ακολούθησαν δύο διαφορετικούς τρόπους:

Η Γιάννα αντιστοίχισε πιθανότητα $p_i = \frac{1}{5}$, σε κάθε ένα από τα $\{\omega_i\}$.

Ο Λεωνίδας αντιστοίχισε πιθανότητα p_i ίση με τις μοίρες του τομέα του αντίστοιχου χρώματος. Π.χ. $p_1 = 60$.
Να σχολιάσετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης.

β) Να βρείτε τις πιθανότητες να κερδίσει κάθε παίκτης, σε σχέση με το χρώμα που επέλεξε.

Λύση

α) Γιάννα: Σε αυτή την περίπτωση η αντιστοιχία που ορίζεται είναι συνεπής με τα τρία αξιώματα του αξιωματικού ορισμού των πιθανοτήτων.
Όμως, από την άλλη μεριά, αυτή η αντιστοίχιση δεν εκφράζει την αντίληψή μας για τις πιθανότητες έκβασης του συγκεκριμένου πειράματος τύχης. Π.χ.

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{5}$$

Ενώ αυτό που περιμένουμε να ισχύει είναι:

$$p_2 > p_1$$

καθώς ο γαλάζιος τομέας αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη επίκεντρη γωνία.
Συνεπώς, δε θα μπορούσε να μοντελοποιηθεί ρεαλιστικά το πείραμα τύχης με τον τρόπο αυτό.
Λεωνίδας: Σε αυτή την περίπτωση η αντιστοιχία που ορίζεται μπορεί να είναι συμβατή με την αντίληψή μας για την έκβαση του πειράματος τύχης, ωστόσο η μοντελοποίηση είναι προβληματική, γιατί:

— Αν μετρούσαμε τη γωνία σε rad, η τιμή της πιθανότητας κάθε απλού ενδεχομένου θα άλλαζε, ενώ η πιθανότητα πρέπει να είναι ανεξάρτητη από μονάδες μέτρησης.

— Δεν είναι συμβατή με την απαίτηση $P(\Omega)=1$ του αξιωματικού ορισμού καθώς προκύπτει $P(\Omega)=360$.

Στην πράξη, ορίζοντας με αυτό τον τρόπο την αντιστοιχία δεν μπορεί να απαντηθεί το εξής ερώτημα:

«Τι είναι πιθανότερο από τα επόμενα; Να σταματήσει το βέλος στο πράσινο χρώμα ή να έρθει άθροισμα 7, μετά από ρίψη δύο ζαριών;»
Συνεπώς, και αυτός ο τρόπος μοντελοποίησης είναι λανθασμένος.

β) Για να απαντήσουμε πρέπει να μοντελοποιήσουμε σωστά το πείραμα τύχης. Αν θεωρήσουμε ότι το βέλος περιστρέφεται χωρίς να «φρενάρει» ξαφνικά πάνω από κάποιο χρώμα, δηλαδή η περιστροφή του γίνεται με «φυσιολογικό» τρόπο (ή αλλιώς αμερόληπτα), τότε αναμένουμε η πιθανότητα του ενδεχομένου «Το βέλος σταματάει στο χρώμα Χ» να είναι ανάλογη της επίκεντρης γωνίας του τομέα χρώματος Χ.

Χρήση του αξιωματικού ορισμού

Έτσι μοντελοποιούμε το πείραμα τύχης με έναν δ.χ.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

ώστε κάθε ένα από τα απλά ενδεχόμενα $\{\omega_i\}$ να αντιστοιχεί σε ένα από τα πέντε χρώματα του δίσκου, όπως στην εκφώνηση, και ορίζουμε την πιθανότητα p_i ως εξής:

$$p_i = \frac{\text{οι μοίρες του τομέα που αντιστοιχεί στο } \omega_i}{360^o}$$

Π.χ. Η πιθανότητα του ενδεχομένου «το βέλος σταματάει στον πράσινο τομέα» είναι:

$$p_1 = \frac{60^o}{360^o} = \frac{1}{6}$$

Στη συνέχεια η πιθανότητα οποιουδήποτε ενδεχομένου του πειράματος τύχης μπορεί να υπολογιστεί με βάση τα p_i.
Π.χ. αν Α: «το βέλος σταματάει στο πράσινο ή στο γαλάζιο», τότε:

$$A = \{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}$$

Άρα:

$$P(A) = p_1 + p_2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Ποιες είναι οι πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) Το άθροισμα των ρίψεων είναι ίσο με 4.
β) Το άθροισμα των ρίψεων είναι μεγαλύτερο του 4.
γ) Το άθροισμα των ρίψεων είναι περιττός αριθμός.

2) Να αποδείξετε ότι ο απλός προσθετικός νόμος προκύπτει ως συνέπεια του κλασικού ορισμού.

3) Ένα κέρμα είναι κατασκευασμένο έτσι ώστε κατά τη ρίψη του η πιθανότητα του ενδεχομένου «εμφανίζεται κεφαλή» είναι 0,95. Θεωρείτε ότι το πείραμα αυτό είναι πείραμα τύχης;

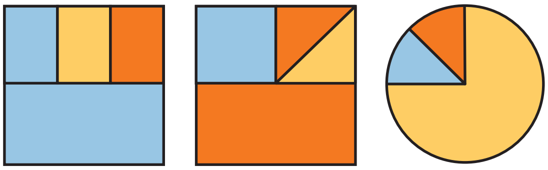
4) Ρίχνουμε δύο αμερόληπτα ζάρια και καταγράφουμε το αποτέλεσμα των ρίψεων. Να αντιστοιχίσετε τα ενδεχόμενα της 1ης στήλης με τις πιθανότητες της 2ης στήλης:

1η στήλη
— Έρχεται διπλή ζαριά (το ίδιο αποτέλεσμα και στα δύο ζάρια.)
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι περιττός αριθμός.
— Το αποτέλεσμα του ενός μόνο ζαριού είναι άρτιος αριθμός.
— Τουλάχιστον ένα από τα δύο ζάρια φέρνει άρτιο αποτέλεσμα.
— Το αποτέλεσμα και των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.
— Το άθροισμα των αποτελεσμάτων των δύο ζαριών είναι άρτιος αριθμός.

2η στήλη
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
0,5

5) Να μοντελοποιήσετε το πείραμα τύχης της εφαρμογής 2, χρησιμοποιώντας το μέτρο του κάθε τόξου σε rad αντί σε μοίρες, για να ορίσετε τις πιθανότητες των στοιχειωδών ενδεχομένων ω_i. Να συγκρίνετε τους δύο τρόπους μοντελοποίησης. Τι παρατηρείτε;

6) Κάθε ένα από τα παρακάτω τρία σχήματα (δύο τετράγωνα και ένα κυκλικό) εμφανίζεται στην οθόνη ενός από τρεις ίδιους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.



Πλαίσιο 1 Πλαίσιο 2 Πλαίσιο 3

Ένα πρόγραμμα στον υπολογιστή επιλέγει τυχαία και χρωματίζει με μαύρο χρώμα ένα pixel μέσα στο σχήμα. Σε κάθε πλαίσιο ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το pixel που θα χρωματιστεί:

α) Να ήταν κόκκινο;

β) Να ήταν γαλάζιο ή κίτρινο;

γ) Να μην ήταν κόκκινο;

7) Ο βοτανολόγος Γκρέγκορ Μέντελ, στα μέσα του 19ου αιώνα, πειραματίστηκε με την εμφάνιση των κληρονομικών χαρακτηριστικών των μοσχομπίζελων, διατυπώνοντας τους νόμους της Μενδελικής κληρονομικότητας. Από τα πειράματά του συμπέρανε τον νόμο της ομοιομορφίας, σύμφωνα με τον οποίο το χρώμα του άνθους μοσχομπίζελου είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο «κληρονομικών παραγόντων» που σήμερα ονομάζονται αλληλόμορφα γονίδια. Για το χρώμα υπάρχουν δύο γονίδια: το επικρατές B, που αντιστοιχεί στο ιώδες και το υπολειπόμενο b που αντιστοιχεί στο λευκό χρώμα.
Σε ένα φυτό, το χρώμα του άνθους του οφείλεται σε ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το πατρικό μοσχομπίζελο κι ένα αλληλόμορφο γονίδιο που κληρονομεί από το μητρικό. Όπως φαίνεται στον πίνακα για να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος, πρέπει και τα δύο αλληλόμορφα γονίδια να είναι τύπου b. Σε κάθε άλλη περίπτωση προκύπτει μοσχομπίζελο με ιώδες άνθος.
Διασταυρώνουμε δύο μοσχομπίζελα: ένα τύπου BB και ένα με λευκό άνθος. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να προκύψει μοσχομπίζελο με λευκό άνθος:
α) στην 1η (θυγατρική) γενιά.
β) στην 2η (θυγατρική) γενιά.

		♂	
		B	b
pistil ♀	B	BB	Bb
	b	Bb	bb

8) Σε ένα μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα από τα παιδιά που γεννήθηκαν το 30% ήταν αγόρια και το 70% ήταν κορίτσια. Με ποιες από τις παρακάτω προτάσεις συμφωνείτε;
α) Σε αυτό το μαιευτήριο τον προηγούμενο μήνα γεννήθηκαν περισσότερα κορίτσια.
β) Αν ένα ζευγάρι που περιμένει παιδί επιλέξει αυτό το μαιευτήριο για τον τοκετό, τότε η πιθανότητα να γεννηθεί κορίτσι είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα να γεννηθεί αγόρι.
γ) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί από τον κατάλογο των νεογέννητων του προηγούμενου μήνα σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι αγόρι είναι ίση με 0,3.
δ) Αν επιλέξουμε ένα παιδί στην τύχη από την λίστα των παιδιών που έχουν γεννηθεί σε αυτό το μαιευτήριο, τότε η πιθανότητα να είναι κορίτσι είναι 0,7.

9) Σε μία κλειστή κάλπη τοποθετούνται 5 κόκκινα και 6 πράσινα σφαιρίδια. Από την κάλπη βγάζουμε τυχαία ένα σφαιρίδιο. Αφού βγάλουμε το σφαιρίδιο, ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου να υπάρχει στην κάλπη ίδιος αριθμός σφαιριδίων από τα δύο χρώματα; Αν στην κάλπη αρχικά υπήρχαν περισσότερα σφαιρίδια, αλλά πάλι τα πράσινα ήταν περισσότερα από τα κόκκινα κατά 1, να διερευνήσετε αν και πόσο θα άλλαζε η πιθανότητα του ίδιου ενδεχομένου;

10) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο κέρμα δύο φορές και καταγράφουμε το αποτέλεσμα. Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:
Α: έρχεται το πολύ μία φορά Κεφαλή.
Β: έρχεται τουλάχιστον μία φορά Κεφαλή.
Γ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι διαφορετικό.

Δ: το αποτέλεσμα των δύο ρίψεων είναι το ίδιο.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=P(B)$ και ότι $P(\Gamma) = P(\Delta)$.

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$.

γ) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Γ', $\Gamma \cap \Delta$, $\Gamma \cup \Delta$, $B \cup \Gamma'$.

Πρόσθετο Υλικό

Ερωτήματα για διερεύνηση

1) Από τον ορισμό της πιθανότητας (κλασικό και αξιωματικό) γνωρίζετε ότι $A = \varnothing \Rightarrow P(A) = 0$. Ισχύει το αντίστροφο; Μπορεί να υπάρχει ενδεχόμενο A ενός δ.χ., που να μην είναι κενό και να ισχύει $P(A) = 0$;

2) **α)** Παρακάτω περιγράφεται ένα παιχνίδι (πείραμα τύχης) με αμερόληπτο κέρμα, για δύο παίκτες, την Άννα και τον Βασίλη.
Η Άννα κάνει 2 ρίψεις του κέρματος, στη συνέχεια κάνει 1 ρίψη ο Βασίλης και καταγράφεται το αποτέλεσμα των ρίψεων. Η Άννα κερδίζει αν φέρνει περισσότερες κεφαλές (Κ) από τον Βασίλη. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις κερδίζει ο Βασίλης. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η Άννα; Είναι δίκαιο το παιχνίδι;
β) Τι θεωρείτε ότι θα συνέβαινε στην πιθανότητα να κερδίσει η Άννα στο προηγούμενο παιχνίδι, αν γίνονταν περισσότερες ρίψεις του νομίσματος (η Άννα κάνει ν+1 ρίψεις και ο Βασίλης ν ρίψεις);

3) Αφού διαβάσετε το παρακάτω απόσπασμα να διερευνήσετε τα ερωτήματα (α) και (β), που ακολουθούν.

Συνθετική εργασία

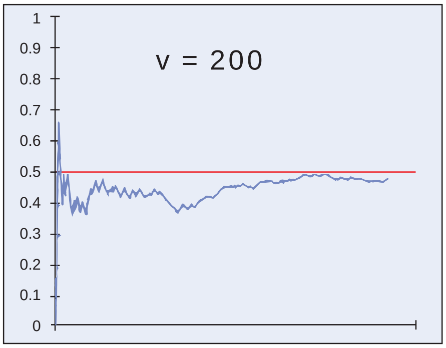
Ο νόμος των μεγάλων αριθμών

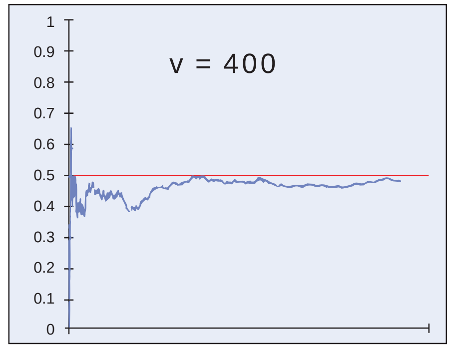
Σε έναν πίνακα καταγράφονται τα αποτελέσματα της εκτέλεσης του ακόλουθου πειράματος:

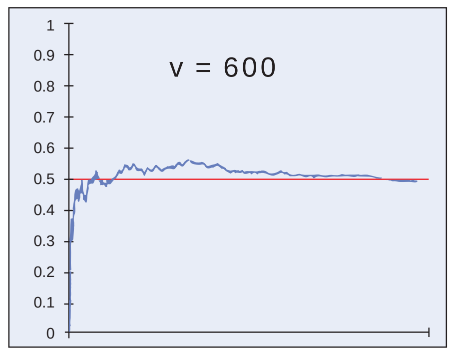
ν	κ	$\frac{\kappa}{\nu}$
10	7	0,7
20	13	0,65
30	16	0,533
40	23	0,575
50	26	0,52
…	…	…
180	89	0,494
190	93	0,489
200	99	0,495

Ρίχνουμε ένα συμμετρικό και ομογενές νόμισμα και σημειώνουμε με Κ το αποτέλεσμα “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα “γράμματα”. Στο διπλανό απόσπασμα του πίνακα φαίνονται το πλήθος των ρίψεων (ν), το πλήθος εμφάνισης Κ (κ) και ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$. Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός ν των ρίψεων ο λόγος $\frac{\kappa}{\nu}$ σταθεροποιείται γύρω από την τιμή 0,5 ή, όπως λέμε, “τείνει” στον αριθμό 0,5.

Αντίστοιχα, το ίδιο φαίνεται και στα παρακάτω διαγράμματα.



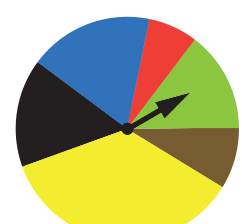




Στον οριζόντιο άξονα παριστάνεται το πλήθος των ρίψεων (ν) και στον κατακόρυφο άξονα η τιμή του λόγου $\frac{\kappa}{\nu}$, *όπου κ είναι το πλήθος εμφάνισης Κ (όπως αναφέρεται και παραπάνω). Το διάγραμμα πάνω αριστερά αντιστοιχεί σε μία αλληλουχία 200 ρίψεων, το πάνω δεξιά σε αλληλουχία 400 ρίψεων και το κάτω διάγραμμα σε αλληλουχία 600 ρίψεων.*

Αυτό επιβεβαιώνει την «αντίληψή» μας για το αποτέλεσμα της ρίψης ενός «αμερόληπτου» νομίσματος. Σε ανάλογα συμπεράσματα οδηγούμαστε και με άλλα παραδείγματα, όπως η ρίψη του ζαριού, που εκεί η συχνότητα εμφάνισης κάθε όψης τείνει στο $\frac{1}{6}$. *Το εμπειρικό αυτό εξαγόμενο, το οποίο αποδεικνύεται και θεωρητικά, ονομάζεται στατιστική ομαλότητα ή νόμος των μεγάλων αριθμών.*

α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας δίσκος που λειτουργεί όπως ο δίσκος της εφαρμογής 2 και χρησιμοποιείται για ένα αντίστοιχο παιχνίδι. Τρία παιδιά, η Άννα, η Ντενίζ και ο Κυριάκος πριν παίξουν, θέλουν να έχουν μία «εικόνα» για το πόσο πιθανό είναι το βέλος να σταματήσει σε κάθε χρώμα. Ωστόσο, δε γνωρίζουν αν το βέλος περιστρέφεται αμερόληπτα. Αποφάσισαν, λοιπόν, να κάνουν 100 δοκιμές περιστρέφοντας το βέλος και να καταγράψουν πόσες φορές σταματά πάνω από κάθε χρώμα.



Βρήκαν:

Χρώμα που σταμάτησε το βέλος	Πόσες φορές
Κίτρινο	18
Μαύρο	20
Μπλέ	17
Πράσινο	17
Κόκκινο	15
Καφέ	13

Η Άννα ισχυρίζεται ότι η πιθανότητα να σταματήσει το βέλος στο κίτρινο είναι 0,18. Ο Κυριάκος θεωρεί ότι το βέλος δεν περιστρέφεται αμερόληπτα, γιατί το εμβαδόν του κίτρινου τομέα είναι πολύ μεγαλύτερο του εμβαδού του μαύρου τομέα. Η Ντενίζ προτείνει ότι δεν είναι ασφαλές να βγάλουν συμπέρασμα με 100 στριψίματα και ότι χρειάζεται να στρίψουν το βέλος πολλές φορές ακόμα. Πώς σχολιάζετε τις ενέργειες και τις εικασίες των παιδιών;

β) Μία παρέα παιδιών η Ελένη, ο Χασάν, ο Βαγγέλης και η Γιάννα θέλουν να παίξουν με ένα μισογεμάτο μπουκάλι. Το πετάει κάποιος από όλους στον αέρα, ενώ προηγουμένως έχουν όλοι δηλώσει αν θα σταθεί όρθιο ή όχι. Όποιος «μαντέψει» σωστά, κερδίζει. Για να περιγράψουν πόσο πιθανό είναι να σταθεί το μπουκάλι όρθιο, τα παιδιά σκέφτηκαν το εξής: Θα πετάξουν 100 φορές το μπουκάλι στον αέρα και θα καταγράψουν πόσες φορές θα σταθεί όρθιο. Αν σταθεί ν φορές όρθιο τότε θα ορίσουν την πιθανότητα του ενδεχομένου «το μπουκάλι στέκεται όρθιο» ίση με $\frac{\nu}{100}$ και του ενδεχομένου «το μπουκάλι δε στέκεται όρθιο» ίση με $1-\frac{\nu}{100}$.

Πώς σχολιάζετε την εικασία των παιδιών;

Συνθετική εργασία

Ο Γκρέγκορ Γιόχαν Μέντελ ήταν Αυστριακός μοναχός και βοτανολόγος. Έκανε τα πειράματά του στο μοναστήρι που ζούσε, στο Μπρυν της Αυστροουγγαρίας. Η δημοσίευση των συμπερασμάτων του δεν έτυχε προσοχής από την επιστημονική κοινότητα της εποχής με αποτέλεσμα ο Μέντελ να επηρεαστεί και να εγκαταλείψει τα πειράματά του για πάντα, ασχολούμενος με τη διοίκηση του μοναστηριού όπου ζούσε.

4) Ανάμεσα στα έτη 1856 και 1863, ο Μέντελ καλλιέργησε και μελέτησε περίπου 28.000 μπιζελιές διατυπώνοντας τους νόμους του για την κληρονομικότητα.

α) Να ερευνήσετε γιατί ο Μέντελ χρησιμοποίησε μοσχομπίζελα στα πειράματά του.

β) Ένας σύγχρονος βοτανολόγος επανέλαβε το πείραμα του Μέντελ ξεκινώντας (πατρική γενιά) από μοσχομπίζελα τύπου ΒΒ και μοσχομπίζελα με λευκό άνθος, ώστε όσα είναι τα μεν να είναι και τα δε. Τελικά, όταν έφτασε στην 2η θυγατρική γενιά μοσχομπίζελων υπήρχαν 433 ιώδη και 170 λευκά μοσχομπίζελα. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα του πειράματος.

Προτεινόμενες ασκήσεις από την παράγραφο 1.2 του βιβλίου «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» της Α΄ Λυκείου:
Α΄ ομάδας: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Ερωτήσεις κατανόησης 1^{ου} κεφαλαίου: 1, 2.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.3. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Διερεύνηση

Οι μαθητές/τριες ενός Λυκείου έχουν τη δυνατότητα να συμμετέχουν στις παρακάτω δραστηριότητες:

— Θεατρική ομάδα
— Ομάδα στίβου
— Όμιλος μουσικής

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους μαθητές/τριες του Λυκείου. Έστω ότι η πιθανότητα να συμμετέχει ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε:

— στη θεατρική ομάδα είναι ίση με $\frac{2}{5}$,
— στην ομάδα στίβου είναι ίση με $\frac{7}{15}$,
— στον όμιλο μουσικής είναι ίση με $\frac{1}{4}$.

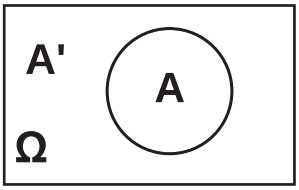
α) Θεωρείτε ότι σε αυτό το σχολείο απαγορεύεται ένας/μία μαθητής/τρια να συμμετέχει σε πάνω από μία δραστηριότητες;
β) Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου» είναι μικρότερη από $\frac{13}{15}$, τι μπορούμε να συμπεράνουμε;
γ) Αν η πιθανότητα του ενδεχομένου «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου» είναι ίση με $\frac{23}{30}$, τότε ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων:

— «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που συμμετέχει στη θεατρική ομάδα και στην ομάδα στίβου»
— «επιλέγουμε έναν/μία μαθητή/τρια που να συμμετέχει στην θεατρική ομάδα, αλλά όχι στην ομάδα στίβου»;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

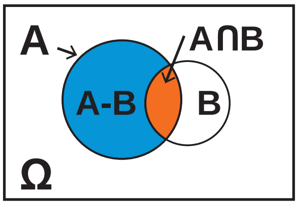
Για τις πιθανότητες των ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες, γνωστές ως “κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων”:

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων



$P(A') = 1 - P(A)$	(Π1)
Απόδειξη Τα Α και Α΄ είναι ασυμβίβαστα ενδεχόμενα και ισχύει: $A \cup A' = \Omega$ Από τον απλό προσθετικό νόμο προκύπτει ότι: $P(\Omega) = P(A) + P(A') \Leftrightarrow P(A) + P(A') = 1 \Leftrightarrow P(A') = 1 - P(A)$	

Κανόνες Λογισμού Πιθανοτήτων



$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$ (Π2)

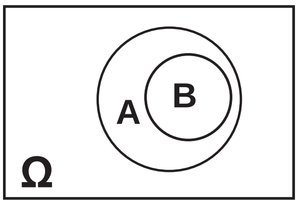
Απόδειξη

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και $A \cap B$ είναι ασυμβίβαστα και η ένωσή τους είναι το A, δηλαδή:

$$(A \cap B) \cup (A - B) = A$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P(\,(A \cap B) \cup (A - B)\,) = P(A \cap B) + P(A - B) \Leftrightarrow$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$$



Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A)$ (Π3)

Απόδειξη

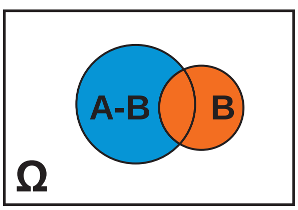
Σύμφωνα με τον (Π2): $P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$.

Εφόσον $B \subseteq A$, ισχύει ότι $A \cap B = B$, άρα:

$$P(A) = P(B) + P(A - B)$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας ότι $P(A - B) \geq 0$ προκύπτει:

$$P(A) \geq P(B)$$



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Π4)

Απόδειξη

Τα ενδεχόμενα $A - B$ και B είναι ασυμβίβαστα και ισχύει:

$$(A - B) \cup B = A \cup B$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P((A - B) \cup B) = P(A - B) + P(B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$$

Με τη βοήθεια του (Π2) για το $A - B$:

$$P(A \cup B) = [\,P(A) - P(A \cap B)\,] + P(B) \Leftrightarrow$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Παρατηρούμε ότι:

— Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

— Αν $A \cap B = \varnothing$ και συνεπώς $P(A \cap B) = 0$, τότε ο (Π4) ισοδυναμεί με τον απλό προσθετικό νόμο.

— Αν $P(A \cap B) > 0$, τότε από τον (Π4) προκύπτει η ανισότητα:

$$P(A \cup B) < P(A) + P(B)$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα, με βάση τα δεδομένα του ερωτήματος (γ) της Διερεύνησης:

A: Ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στη θεατρική ομάδα

B: Ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στην ομάδα στίβου

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A \cap B$.

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στην ομάδα στίβου αλλά όχι στη θεατρική ομάδα».

γ) Με Γ συμβολίζουμε το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει στον όμιλο μουσικής». Υπάρχουν μαθητές/τριες του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες; Αν ναι, μπορούμε να βρούμε σε ποια από τις άλλες ομάδες συμμετέχουν;

<u>Λύση</u>

α) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στη θεατρική ομάδα ή στην ομάδα στίβου» είναι το $A \cup B$ άρα θα είναι $P(A \cup B) = \frac{23}{30}$.

Από τον (Π4) έχουμε $\frac{23}{30} = \frac{2}{5} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{10}$.

β) Από τον (Π2) ισχύει $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{15} - \frac{1}{10} = \frac{11}{30}$, που είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου και όχι στη θεατρική ομάδα».

γ) Παρατηρούμε ότι:

$$P(A \cup B) + P(\Gamma) > 1$$

Αν υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν μαθητές/τριες του ομίλου μουσικής που συμμετέχουν σε κάποια από τις άλλες ομάδες, τότε θα ήταν $(A \cup B) \cap \Gamma = \varnothing$. Αυτό σημαίνει ότι, λόγω του απλού προσθετικού νόμου θα έχουμε $P[(A \cup B) \cup \Gamma] = P(A \cup B) + P(\Gamma)$, άρα $P[(A \cup B) \cup \Gamma] > 1$, που είναι άτοπο.

Σίγουρα, λοιπόν, η τομή $(A \cup B) \cap \Gamma$ δεν είναι κενή. Συνεπώς υπάρχουν μαθητές του ομίλου μουσικής που συμμέτεχουν και σε άλλη ομάδα (ή και στις δύο άλλες ομάδες). Ωστόσο, δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν το Γ έχει μη κενή τομή με το Α, με το Β ή και με τα δύο. Άρα δε γνωρίζουμε σε ποια άλλη ομάδα συμμετέχουν αυτοί οι μαθητές.

Εφαρμογή 2

Σε ένα άλλο Λύκειο από αυτό του προβλήματος της Διερεύνησης οι μαθητές/τριες έχουν τη δυνατότητα να συμμετάσχουν σε θεατρική ομάδα και ομάδα στίβου. Το 28% των μαθητών/τριών συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 20% στην ομάδα στίβου και το 12% και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου ο/η μαθητής/τρια που επιλέγουμε:

α) να συμμετέχει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες,

β) να συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα,

γ) να συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες,

δ) να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

Λύση

Αν Α είναι το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην θεατρική ομάδα» και Β «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει στην ομάδα στίβου», τότε
$P(A) = 0,28$, $P(B) = 0,2$. Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει και στις δύο ομάδες» είναι το $A \cap B$ και από τα δεδομένα του προβλήματος $P(A \cap B) = 0,12$.

α) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε τουλάχιστον μία από τις δύο ομάδες» είναι το $A \cup B$, συνεπώς από τον (Π4) με αντικατάσταση έχουμε $P(A \cup B) = 0,28 + 0,2 - 0,12 = 0,36$.

β) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στη θεατρική ομάδα» είναι το $A - B$ και σύμφωνα με τον (Π2) ισχύει $P(A - B) = 0,28 – 0,12 = 0,16$.

γ) Θα χρειαστεί πρώτα να βρούμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει μόνο στην ομάδα στίβου», δηλαδή του $B - A$. Από τον (Π2) είναι $P(B – A) = 0,2 - 0,12 = 0,08$.
Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια συμμετέχει σε μία μόνο από τις δύο ομάδες» είναι η ένωση των ασυμβίβαστων ενδεχομένων $A - B$ και $B - A$.
Σύμφωνα με τον απλό προσθετικό νόμο:

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=0,16+0,08=0,24$$

δ) Το ενδεχόμενο «ο/η μαθητής/τρια δε συμμετέχει σε καμία ομάδα» είναι το $(A \cup B)'$. Από τον (Π1) είναι:

$$P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=1-0,36=0,64$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Το 50% των δωματίων ενός ξενοδοχείου έχουν τζάκι, το 20% έχουν καλοριφέρ και το 10% και τζάκι και καλοριφέρ. Επιλέγουμε τυχαία ένα δωμάτιο του ξενοδοχείου.
Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου το δωμάτιο που επιλέξαμε:
α) να μην έχει τζάκι,
β) να μην έχει ούτε τζάκι ούτε καλοριφέρ,
γ) να έχει μόνο τζάκι;

2) Ας υποθέσουμε ότι Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος, αιτιολογώντας την απάντησή σας:
α) Αν ισχύει ότι $P(A) = 0,8$ και $P(B) = 0,1$, τότε θα ισχύει ότι $B \subseteq A$, γιατί $P(B) \le P(A)$.
β) Αν $P(A) = 0,3$, $P(B) =0,4$ και $P(A \cup B) = 0,6$, τότε τα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

γ) Αν $P(A) = 0,4$ και $P(B) = 0,6$, τότε το συμπληρωματικό του A είναι το B.
δ) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) \leq 1$.
ε) Ισχύει πάντα ότι $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$.
στ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) = 1,5$, τότε τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.
ζ) Αν ισχύει $P(A) + P(B) < 1$, τότε τα A και B είναι ασυμβίβαστα.
η) Ισχύει ότι $P(A \cap B) \leq P(A)$.

3) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα με την εφαρμογή 2, αν αντί για τα ποσοστά που δίνονται, γνωρίζετε αυτή τη φορά ότι το Λύκειο έχει συνολικά 120 μαθητές/τριες, από τους/τις οποίους/ες οι 32 συμμετέχουν στη θεατρική ομάδα, οι 28 στην ομάδα στίβου και 16 μαθητές/τριες συμμετέχουν και στις δύο ομάδες.

4) Από τους/τις μαθητές/τριες της Β΄ τάξης ενός Λυκείου το 55% είναι μαθήτριες, το 40% παίζουν μπάσκετ και το 10% είναι μαθήτριες που παίζουν μπάσκετ. Επιλέγουμε τυχαία έναν/μία μαθητή/τρια.
Να υπολογίσετε τις πιθανότητες να είναι:
α) μαθήτρια ή να παίζει μπάσκετ,
β) μαθήτρια και να μην παίζει μπάσκετ,
γ) μαθητής και να παίζει μπάσκετ,
δ) μαθητής ή να παίζει μπάσκετ.

5) Όλοι οι κάτοικοι μιας μικρής επαρχιακής πόλης έχουν συμβόλαιο κινητού τηλεφώνου. Το 47% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την εταιρεία FONATEL, το 35% των κατοίκων έχει συμβόλαιο με την TELEVIBE. Παίρνουμε τυχαία τηλέφωνο έναν κάτοικο της πόλης. Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο δεν έχει συμβόλαιο με καμία από τις FONATEL και TELEVIBE» είναι 23%.
Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου, ο κάτοικος που πήραμε τηλέφωνο:
α) να έχει συμβόλαιο με την FONATEL ή με την TELEVIBE,
β) να έχει συμβόλαιο και με τις δύο εταιρείες.

6) Από τον πληθυσμό μιας πόλης το 42% δεν έχουν κάνει ποτέ σκι το 58% δεν έχουν ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο, αλλά το 29% έχουν ήδη κάνει σκι και έχουν ταξιδέψει με αεροπλάνο. Αν πάρουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει κάνει ποτε σκι και να μην έχει ταξιδέψει ποτέ με αεροπλάνο;

Πρόσθετο Υλικό

Προτεινόμενες ασκήσεις από την παράγραφο 1.2 του βιβλίου «Άλγεβρα και Στοιχεία Πιθανοτήτων» της Α΄ Λυκείου:

Α΄ ομάδας: 7, 10, 12, 13, 14.

Β΄ ομάδας: 1, 2.

Ερωτήσεις κατανόησης 1ου κεφαλαίου: 4, 5, 10.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1.4. ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ & ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Μέρος Α΄: Διατάξεις – Μεταθέσεις

Διερεύνηση

Ένας μεγάλος δειγματικός χώρος

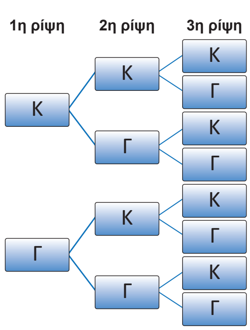
Σε ένα συγκεκριμένο μαιευτήριο κρατείται αρχείο γεννήσεων και, όπως είναι αναμενόμενο, καταγράφεται το φύλο κάθε νεογέννητου. Ποιο από τα δύο παρακάτω ενδεχόμενα είναι πιθανότερο;

— τα 2 πρώτα παιδιά του χρόνου είναι αγόρια.
— τα 5 πρώτα παιδιά του χρόνου είναι αγόρια.

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Η Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Σε πειράματα τύχης που οι δυνατές εκβάσεις είναι ισοπίθανες, ο υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου ανάγεται στο μέτρημα του πλήθους των εκβάσεων, ευνοϊκών ή/και δυνατών. Συχνά, το πλήθος αυτό είναι πολύ μεγάλος αριθμός και είναι δύσκολο να βρεθεί με καταγραφή και καταμέτρηση των εκβάσεων, μία προς μία. Έτσι, σε αυτήν την παράγραφο θα μάθουμε τρόπους να μετράμε αποτελεσματικά το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου και θα χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους τρόπους για να λύσουμε καθημερινά προβλήματα.



Το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων τριών ρίψεων ενός αμερόληπτου κέρματος είναι ίσο με 8, όπως βλέπουμε με τη βοήθεια του διπλανού δενδροδιαγράμματος. Όμως, αν είχαμε περισσότερες ρίψεις, το δενδροδιάγραμμα θα ήταν μεγαλύτερο και η κατασκευή του δυσκολότερη. Άρα, θα ήταν σκόπιμο να είχαμε άλλον τρόπο υπολογισμού του πλήθους των δυνατών αποτελεσμάτων, χωρίς να είναι απαραίτητη η καταγραφή τους.

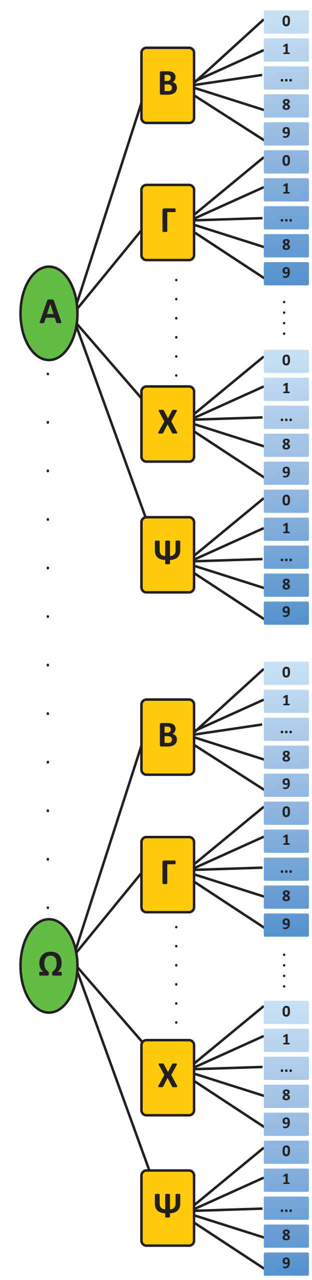
Ξεκινώντας από την περίπτωση των τριών ρίψεων, το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων υπολογίζεται και με τον εξής τρόπο:

Τα δυνατά αποτελέσματα της 1ης αλλά και κάθε ρίψης είναι 2, δηλαδή Κ (κεφαλή) ή Γ (γράμματα). Για κάθε δυνατό αποτέλεσμα της 1ης ρίψης, έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα της 2ης ρίψης. Συνεπώς, τα δυνατά αποτελέσματα των δύο πρώτων ρίψεων είναι $2 \cdot 2 = 4$. Για κάθε ένα από αυτά έχουμε 2 δυνατά αποτελέσματα της 3ης ρίψης.

Άρα τα δυνατά αποτελέσματα των τριών ρίψεων είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$.

Σκεπτόμενοι με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι το πλήθος των δυνατών απότελεσμάτων 10 ρίψεων ενός κέρματος είναι ίσο με 2^{10} .

Ας δούμε ένα κάπως διαφορετικό παράδειγμα. Οι διοργανωτές ενός αγώνα δρόμου 5 χιλιομέτρων χρειάζεται να δώσουν πριν τον αγώνα σε κάθε δρομέα έναν μοναδικό κωδικό, ώστε ένα αυτοματοποιημένο σύστημα να καταγράφει τον χρόνο τερματισμού του. Ένας από τους υπεύθυνους του αγώνα πρότεινε να δοθεί σε κάθε συμμετέχοντα ένας κωδικός από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ώστε: Το πρώτο να είναι ένα φωνήεν, το δεύτερο να είναι ένα σύμφωνο από το ελληνικό αλφάβητο και το τρίτο να είναι ένα ψηφίο του δεκαδικού συστήματος. Μία τέτοια τριάδα, για παράδειγμα, είναι ΕΜ2. Πόσοι είναι οι δυνατοί κωδικοί που μπορούν να δοθούν στους δρομείς με αυτόν τον τρόπο;



Για να απαντήσουμε, χωρίζουμε την επιλογή του κωδικού ενός δρομέα στα 5 χιλιόμετρα σε τρεις φάσεις. Στην πρώτη φάση επιλέγουμε το φωνήεν. Αυτό γίνεται με 7 τρόπους. Στη δεύτερη φάση επιλέγουμε το σύμφωνο. Τα σύμφωνα είναι 17, άρα για κάθε επιλογή φωνήεντος μπορούμε να επιλέξουμε με 17 τρόπους το σύμφωνο. Άρα τα δύο γράμματα τα επιλέγουμε με $7 \cdot 17 = 119$ διαφορετικούς τρόπους. Για κάθε έναν από αυτούς, στην τρίτη φάση επιλέγουμε έναν από τους 10 μονοψήφιους αριθμούς. Συνεπώς, οι δυνατές τριάδες είναι $119 \cdot 10 = 1190$.

Στα παραπάνω παραδείγματα εφαρμόσαμε τη **βασική αρχή απαρίθμησης**, την οποία γενικεύοντας τον προηγούμενο συλλογισμό, διατυπώνουμε ως εξής:

Βασική Αρχή Απαρίθμησης

Έστω ότι μια διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί σε ν διαδοχικές φάσεις (ή επιλογές) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu$. Αν η φ_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_1 τρόπους και για καθέναν από αυτούς η φ_2 μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_2 τρόπους,…, και για καθέναν από όλους αυτούς τους τρόπους η φ_ν μπορεί να πραγματοποιηθεί με κ_ν τρόπους, τότε η διαδικασία αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί με $\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \ldots \cdot \kappa_\nu$ τρόπους.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα των 10 ρίψεων του κέρματος, η διαδικασία πραγματοποιείται σε 10 φάσεις (όσες είναι οι ρίψεις). Κάθε φάση πραγματοποιείται με 2 τρόπους (Κ ή Γ). Ένα δυνατό αποτέλεσμα του πειράματος τύχης, για παράδειγμα, είναι το:

$$(Κ, Κ, Γ, Κ, Γ, Κ, Κ, Κ, Κ, Γ)$$

Κάθε δυνατό αποτέλεσμα είναι μία διατεταγμένη 10-άδα από τα στοιχεία του συνόλου {Κ, Γ}. Κάθε τέτοια 10-άδα ονομάζεται **διάταξη των 2 ανά 10**

Διατάξεις

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στοιχεία του Α σε μια σειρά κ θέσεων επιτρέποντας επαναλήψεις.

Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ είναι ίσο με $ν^κ$.

ή σε δεκάδες (επιτρέποντας επαναλήψεις των στοιχείων του {Κ, Γ}). Το πλήθος των διατάξεων των 2 ανά 10 είναι ίσο με 2^{10}.

Διατάξεις χωρίς επαναλήψεις

Διάταξη των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ χωρίς επανάληψη, με κ ≤ ν, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ στοιχεία του Α και να τα βάλουμε σε σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ χωρίς επανάληψεις με κ ≤ ν συμβολίζεται με $(ν)_κ$ και είναι ίσο με $ν\cdot(ν - 1)\cdot\ldots\cdot(ν - κ + 1)$.

Ας υποθέσουμε ότι το πενταμελές μαθητικό συμβούλιο της τάξης σας συνεδριάζει για να εκλέξει 3 διαφορετικά άτομα ως πρόεδρο, γραμματέα και ταμία. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει αυτή η εκλογή; Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί ένας μαθητής να εκλεγεί σε πάνω από μία θέση (π.χ. πρόεδρος και γραμματέας), άρα το πλήθος των διαφορετικών τρόπων είναι μικρότερο από το πλήθος των διατάξεων των 5 ανά 3.

Η διαδικασία εκλογής μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1η φάση η εκλογή προέδρου, 2η φάση η εκλογή γραμματέα και 3η φάση η εκλογή ταμία. Η 1η φάση μπορεί να γίνει με 5 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη του πενταμελούς. Η 2η φάση μπορεί να γίνει με 4 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη του πενταμελούς που απέμειναν ύστερα από την εκλογή του προέδρου. Η 3η φάση μπορεί να γίνει με 3 τρόπους, όσα είναι και τα μέλη του πενταμελούς που απέμειναν ύστερα και από την εκλογή του γραμματέα. Επομένως, σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης, το πλήθος των διαφορετικών δυνατών τριάδων είναι $5\cdot4\cdot3 = 60$. Κάθε τέτοια τριάδα ονομάζεται **διάταξη των 5 ανά 3 χωρίς επαναλήψεις**.

Μεταθέσεις

Μετάθεση των V στοιχείων ενός συνόλου Α, λέγεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορούμε να τα βάλουμε σε σειρά.

Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι $ν\cdot(ν - 1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$

Μία ειδική περίπτωση διατάξεων χωρίς επαναλήψεις είναι η περίπτωση που θέλουμε να βάλουμε σε σειρά τα στοιχεία ενός συνόλου και περιγράφεται στο επόμενο παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορούν να καθίσουν 5 θεατές μίας θεατρικής παράστασης, που μόλις μπήκαν στο θέατρο, στις 5 τελευταίες κενές θέσεις. Σύμφωνα με τη βασική αρχή απαρίθμησης οι διαφορετικοί τρόποι είναι $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 120$, καθώς ο πρώτος που θα καθίσει έχει 5 επιλογές, ο δεύτερος έχει 1 λιγότερη επιλογή, δηλαδή 4, ο τρίτος έχει 3 επιλογές, ο τέταρτος 2 επιλογές και ο πέμπτος 1 επιλογή. Κάθε διαφορετικός τρόπος να καθίσουν είναι μία **μετάθεση** 5 στοιχείων.

Ένας χρήσιμος συμβολισμός: Το παραγοντικό

Όπως είδαμε (και θα φανεί ακόμα περισσότερο στη συνέχεια) είναι χρήσιμο να υπολογίζουμε γινόμενα διαδοχικών φυσικών αριθμών. Συχνά θα χρειαστεί να υπολογιστούν τέτοια μεγάλα γινόμενα. Το γινόμενο των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,…..,ν-1, ν συμβολίζεται ως ν! και διαβάζεται «ν παραγοντικό».

Εξ ορισμού $0! = 1$

Είναι $ν! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(ν-1)\cdot ν$. Για παράδειγμα, $5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.

Με τη χρήση του παραγοντικού το πλήθος των μεταθέσεων 5 στοιχείων γράφεται 5!, ενώ το πλήθος των διατάξεων των 5 ανα 3 χωρίς επαναλήψεις, δηλαδή 5·4·3 γράφεται και ως $\frac{5!}{(5-3)!}$, που σε κάποιες περιπτώσεις είναι ένας «βολικός» συμβολισμός.

— *Το πλήθος των μεταθέσεων ν στοιχείων είναι ν!*

— *Με αυτόν τον συμβολισμό, το πλήθος των διατάξεων των ν ανά κ χωρίς επαναλήψεις είναι*

$$(\nu)_\kappa = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Σε μία τάξη υπάρχουν ακριβώς 25 καρέκλες. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν σε αυτές οι 25 μαθητές/τριες μιας τάξης;

Λύση

Κάθε τρόπος είναι μία μετάθεση των 25 μαθητών/τριών. Άρα οι διαφορετικοί τρόποι να καθίσουν είναι πλήθους 25!, δηλαδή γύρω στα 15,5 πεντάκις εκατομμύρια.

Εφαρμογή 2

Ο ιδιοκτήτης ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή έχει ξεχάσει τον προσωπικό του κωδικό χρήστη για να εισέλθει στον λογαριασμό του. Το μόνο που θυμάται είναι ότι ο κωδικός αποτελείται από οκτώ πεζά γράμματα του αγγλικού αλφαβήτου. Σκέφτεται να ετοιμάσει μια λίστα με όλους τους πιθανούς κωδικούς. Ο χρόνος που χρειάζεται για να γράψει σε χαρτί έναν τυχαίο τέτοιο κωδικό χρήστη είναι 3 δευτερόλεπτα.

α) Πόσο χρόνο χρειάζεται ο χρήστης για γράψει τη λίστα;

β) Ο χρήστης θυμήθηκε ότι στον οκταψήφιο κωδικό του, κανένα γράμμα δεν επαναλαμβάνεται. Πόσος χρόνος χρειάζεται για να γραφτεί η λίστα, σε αυτή την περίπτωση;

Λύση

Το αγγλικό αλφάβητο έχει 26 γράμματα.

α) Κάθε πιθανός κωδικός είναι μία διάταξη των 26 γραμμάτων σε οκτάδα, με δυνατές τις επαναλήψεις, άρα το πλήθος των πιθανών κωδικών είναι 26^8 = 208.827.064.576. Συνεπώς, ο απαιτούμενος χρόνος για να γραφτεί η λίστα είναι 3·208.827.064.576 δευτερόλεπτα. Επίσης, κάθε εικοσιτετράωρο έχει 60·60·24 = 86400 δευτερόλεπτα. Άρα για να γραφτεί η λίστα χρειάζονται 7.250.940 εικοσιτετράωρα.

β) Σε αυτή την περίπτωση κάθε κωδικός είναι μία διάταξη των 26 γραμμάτων σε οκτάδα, χωρίς να επιτρέπονται επαναλήψεις γραμμάτων, άρα το πλήθος των πιθανών κωδικών είναι $\frac{26!}{(26-8)!}$ =

$$\frac{26!}{18!} = \frac{26\cdot 25\cdot \ldots \cdot 19\cdot 18!}{18!} = 26\cdot 25\cdot \ldots \cdot 19 = 62.990.928.000$$

Ο χρόνος που χρειάζεται να γραφτεί η λίστα είναι 188.972.784.000 δευτερόλεπτα, ή 2.187.185 εικοσιτετράωρα.

Εφαρμογή 3

Μία τράπουλα έχει 52 διαφορετικά φύλλα. Αν ανακατέψουμε την τράπουλα και ανοίξουμε τα 4 πρώτα φύλλα, ποια είναι η πιθανότητα αυτά να είναι άσοι;

Λύση

Πρώτα θα υπολογίσουμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπούν σε σειρά (δηλαδή να μετατεθούν) τα 52 φύλλα μετά το ανακάτεμα. Πρόκειται για μεταθέσεις 52 στοιχείων, άρα το πλήθος είναι 52!

Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι τα 4 πρώτα φύλλα είναι άσοι. Πρώτα υπολογίζουμε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που έχουν μετατεθεί τα υπόλοιπα 48 φύλλα. Αυτό είναι ίσο με 48!.

Όμως για κάθε έναν από αυτούς τους 48! τρόπους, υπάρχουν 4! τρόποι να εμφανιστούν οι 4 άσοι, που -όπως υποθέσαμε- είναι πρώτοι, πριν τα 48 φύλλα. Συνεπώς, από τη βασική αρχή απαρίθμησης το πλήθος των διαφορετικών τρόπων να εμφανιστούν πρώτα οι 4 άσοι είναι:

$$(\text{μεταθέσεις 4 στοιχείων})\cdot(\text{μεταθέσεις 48 στοιχείων}) = 4!\cdot 48!$$

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «ανακατεύουμε μία συνηθισμένη τράπουλα 52 φύλλων» το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων (δηλαδή των δυνατών μεταθέσεων των φύλλων της τράπουλας) είναι 52!. Θεωρούμε επίσης ότι όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα. Έστω το ενδεχόμενο Α: «ανοίγουμε τα 4 πρώτα φύλλα της τράπουλας και αυτά είναι άσοι», τότε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων είναι 4!·48.

Άρα από τον κλασικό ορισμό

$$P(A) = \frac{4!\cdot 48!}{52!} = \frac{4!\cdot 48!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48!} = \frac{4!}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49} = \frac{6}{1.624.350} = \frac{1}{270.725}$$

Εφαρμογή 4

Δύο φοιτητές, ο Βαγγέλης και η Μαρία θέλουν να ταξιδέψουν με το λεωφορείο που εκτελεί το δρομολόγιο των 5:30 «Αθήνα-Πάτρα», αλλά υπάρχουν μόνο 4 κενές θέσεις, οι 2, 13, 14 και 56. Για τις 4 αυτές θέσεις υπάρχουν 7 υποψήφιοι επιβάτες (μαζί με το Βαγγέλη και τη Μαρία). Όμως κανείς τους δεν προηγείται· θα γίνει κλήρωση μεταξύ τους για το ποιος θα ταξιδέψει με αυτό το δρομολόγιο. Να βρείτε την πιθανότητα να ταξιδέψουν και τα δύο παιδιά:

α) ο Βαγγέλης στη θέση 56 κι η Μαρία στη θέση 2,

β) σε διπλανές θέσεις.

Κάτοψη του λεωφορείου

Λύση

α) Οι τρόποι που μπορούν να κληρωθούν 4 θέσεις σε 7 επιβάτες είναι 7·6·5·4 = 840 (διατάξεις των 7 ανά 4 χωρίς επαναλήψεις). Αν θεωρήσουμε το πείραμα τύχης «κληρώνουμε τις 4 θέσεις στους 7 επιβάτες» και θεωρήσουμε ισοπίθανες όλες τις πιθανές εκβάσεις, τότε αυτές είναι 840.

Πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος ευνοϊκών εκβάσεων του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης στη θέση 56 κι η Μαρία στη θέση 2». Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα αρκεί να βρούμε με πόσους τρόπους μπορούν να συμπληρωθούν οι θέσεις 13 και 14, δηλαδή οι 2 θέσεις που μένουν για τα υπόλοιπα 5 άτομα (διατάξεις των 5 ανά 2 χωρίς επαναλήψεις). Αυτό γίνεται με 5·4 = 20 τρόπους. Συνεπώς, από τον κλασικό ορισμό, η πιθανότητα να καθίσουν ο Βαγγέλης και η Μαρία στις θέσεις 56 και 2 είναι $\frac{20}{840}=\frac{1}{42}$.

Θέση 56	*Θέση 2*	*Θέση 13*	*Θέση 14*
Βαγγ	*Μαρ*	*;*	*;*

Για το ερώτημα (α)

β) Οι μόνες διπλανές θέσεις είναι οι 13 και 14. Οι ευνοϊκές εκβάσεις είναι εκείνες που ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται στις θέσεις αυτές, χωρίς να έχει σημασία ποιος από τους δύο κληρώνεται στην κάθε θέση. Υποθέτουμε ότι ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται σε αυτές τις θέσεις. Ομοίως με το (α), οι υπόλοιποι επιβάτες κληρώνονται με 20 τρόπους στις θέσεις που μένουν (56 και 2). Ωστόσο, για κάθε έναν από αυτούς τους τρόπους υπάρχουν 2 μεταθέσεις του Βαγγέλη και της Μαρίας στις θέσεις 13 και 14. Άρα από την βασική αρχή απαρίθμησης οι ευνοϊκές εκβάσεις είναι 2 · 20 = 40. Άρα η πιθανότητα ο Βαγγέλης και η Μαρία να καθίσουν σε διπλανές θέσεις είναι ίση με $\frac{40}{840}=\frac{1}{21}$.

Θέση 13	*Θέση 14*	*Θέση 56*	*Θέση 2*
Βαγγ	*Μαρ*	*;*	*;*
Μαρ	*Βαγγ*		

Για το ερώτημα (β)

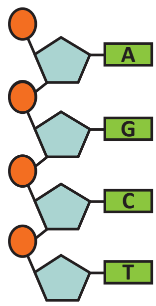
Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Οι διοργανωτές αγώνων δρόμου 5 και 10 χιλιομέτρων, που θα γίνουν την ίδια ημέρα, θέλουν να δώσουν έναν μοναδικό κωδικό σε κάθε συμμετέχοντα. Επίσης, θα ήθελαν κάθε κωδικός συμμετέχοντα στα 5 χιλιόμετρα να είναι ευδιάκριτος από τον κωδικό ενός συμμετέχοντα στα 10 χιλιόμετρα. Στα 5 χιλιόμετρα υπάρχουν 2.573 συμμετέχοντες, ενώ στα 10 χιλιόμετρα υπάρχουν 1.113 συμμετέχοντες. Αποφασίστηκε για τα 5 χιλιόμετρα να δοθεί σε κάθε συμμετέχοντα ένας κωδικός από τρία διατεταγμένα σύμβολα, ώστε:
Το πρώτο και το δεύτερο να είναι τυχαίο σύμφωνο από το ελληνικό αλφάβητο και το τρίτο να είναι ένας τυχαίος μονοψήφιος αριθμός, π.χ. ΝΜ2.

α) Επαρκούν οι διατεταγμένες τριάδες αυτές για όλους τους συμμετέχοντες στα 5 χιλιόμετρα;

β) Τι θα προτείνατε στους διοργανωτές να κάνουν για τα 10 χιλιόμετρα;

2) Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα γράμματα Α, Ε, Ε, Θ, Ι, Υ το ένα μετά από το άλλο; Ποια είναι η πιθανότητα, αν τοποθετήσουμε τα γράμματα σε τυχαία σειρά, να σχηματιστεί η λέξη ΕΥΘΕΙΑ;



3) Οι αζωτούχες βάσεις που μπορεί να έχει ένα νουκλεοτίδιο είναι η Αδενίνη (A), η Γουανίνη (G), η Κυτοσίνη (C) και η Θυμίνη (T). Τα νουκλεοτίδια, ανάλογα με την σειρά τους σε τριάδες, καθορίζουν ποιο αμινοξύ θα τοποθετηθεί στην αντίστοιχη θέση κατά τη σύνθεση των πρωτεϊνών. Οι τριάδες αυτές ονομάζονται κωδικόνια.

α) Πόσα διαφορετικά κωδικόνια μπορούν να σχηματιστούν;

β) Συνολικά τα κωδικόνια αντιστοιχούν στον σχηματισμό 20 αμινοξέων. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα κωδικόνιο, είναι ίδια η πιθανότητα να αντιστοιχεί σε ένα από τα 20 αμινοξέα (θα χρειαστεί να αναζητήσετε πληροφορίες για την αντιστοιχία κωδικονίων και αμινοξέων για να απαντήσετε);

4) Αν κάποιος διαθέτει 2 μπουφάν (ένα μαύρο κι ένα μπλε), 4 παντελόνια, 3 μπλούζες, 10 ζευγάρια κάλτσες και 3 ζευγάρια παπούτσια, με πόσους τρόπους μπορεί να ντυθεί, φορώντας από όλα τα είδη; Αν ένας επιλέξει τυχαία έναν από αυτούς τους τρόπους για να ντυθεί φορώντας ένα μπουφάν, ένα παντελόνι, μία μπλούζα, ένα ζευγάρι κάλτσες και ένα ζευγάρι παπούτσια, ποια είναι η πιθανότητα να φοράει το μπλε μπουφάν;

5) Αν ρίξουμε ένα αμερόληπτο ζάρι 4 φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε 4 διαφορετικά αποτελέσματα;

6) **α)** Πόσες πινακίδες κυκλοφορίας μπορούμε να κατασκευάσουμε που περιέχουν στη σειρά τρία κεφαλαία γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου ακολουθούμενα από έναν τετραψήφιο αριθμό;

β) Από το σύνολο των πινακίδων που περιγράφονται στο ερώτημα (α), μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκείνες που τα γράμματά τους ανήκουν και στο λατινικό αλφάβητο. Αν επιλέξουμε τυχαία μία πινακίδα του ερωτήματος, (α) ποια είναι η πιθανότητα να είναι κατάλληλη προς χρήση;

7) Ο Θανάσης, ο Μιχάλης, ο Κώστας, ο Αντρέι κι ο Δημήτρης είναι οι παίκτες της σχολικής ομάδας μπάσκετ των αγοριών του Γ1 και ο προπονητής της ομάδας πρόκειται να τους δώσει τις εμφανίσεις τους για τους σχολικούς αγώνες.

α) Οι διαθέσιμες εμφανίσεις έχουν τυπωμένα τα νούμερα 7, 13, 15, 20 και 27. Με πόσους τρόπους μπορούν να μοιραστούν οι εμφανίσεις στους μαθητές; Αν οι εμφανίσεις μοιραστούν τυχαία στους παίκτες, ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7; Ποια είναι η πιθανότητα να πάρει ο Δημήτρης τη φανέλα με το 7 και να μην πάρει ο Θανάσης τη φανέλα με το 13;

β) Να απαντήσετε στα ίδια ερωτήματα, αν οι διαθέσιμες εμφανίσεις είναι οι 7, 11, 13, 15, 19, 20 και 27.

8) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν 4 άτομα σε 6 θέσεις μιας σειράς; Ποια είναι η πιθανότητα η τελευταία θέση να μείνει κενή;

9) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να μπουν σε μια σειρά 4 αγόρια και 3 κορίτσια; Αν επιλέξουμε τη σειρά των 7 παιδιών τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να είναι όλα μαζί τα αγόρια και όλα μαζί τα κορίτσια;

10) Δέκα παιδιά, μεταξύ των οποίων ο Κώστας και η Ελένη, θα καθίσουν τυχαία ο ένας δίπλα στον άλλον σε δέκα θέσεις. Ποια είναι η πιθανότητα ο Κώστας και η Ελένη να καθίσουν σε διπλανές θέσεις;

11) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου τέσσερα τυχαία επιλεγμένα άτομα από την τάξη σας (ή το σχολείο σας), να έχουν γεννηθεί σε τέσσερις διαφορετικές εποχές του έτους.

Μέρος Β΄: Συνδυασμοί

Διερεύνηση

Έχετε να τοποθετήσετε τρεις επιστολές σε φακέλους. Επίσης έχετε στη διάθεσή σας τέσσερις φακέλους διαφορετικού χρώματος: κίτρινο, μπλε, κόκκινο και πράσινο. Μόνο μία επιστολή μπαίνει σε κάθε φάκελο. Αν κάνετε τυχαία την επιλογή των φακέλων που θα χρησιμοποιήσετε, πόσοι τρόποι υπάρχουν να τοποθετηθούν οι επιστολές στους φακέλους:

α) αν η πρώτη επιστολή είναι ευχαριστήρια, η δεύτερη είναι συγχαρητήρια και η τρίτη είναι πρόσκληση;

β) αν και οι τρεις επιστολές είναι ακριβώς ίδιες;

Βασικές μαθηματικές έννοιες-Ιδέες-Διεργασίες

Συνδυασμοί

Συχνά είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε το πλήθος των δυνατών τρόπων να επιλεγούν κ από τα ν στοιχεία ενός συνόλου, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους. Κάθε τέτοιος τρόπος ονομάζεται συνδυασμός των ν ανά κ. Με στόχο να βρούμε έναν τρόπο υπολογισμού του πλήθους των συνδυασμών των ν ανά κ, στη γενική περίπτωση, ας δούμε πρώτα το επόμενο παράδειγμα.

Συνδυασμός των ν στοιχείων ενός συνόλου Α ανά κ λέγεται κάθε υποσύνολο του Α με κ στοιχεία.

Ας υποθέσουμε ότι από τους 5 παίκτες μίας σχολικής ομάδας μπάσκετ πρέπει να επιλεγούν 3 για να λάβουν μέρος στο σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ με τίτλο «τρεις εναντίον τριών». Ο καθηγητής Φυσικής Αγωγής του σχολείου, αφού επιλέξει τους παίκτες, πρέπει να γράψει τα ονόματά τους στο διπλανό καρτελάκι δίπλα στα νούμερα που θα έχουν στις εμφανίσεις τους. Κάθε παίκτης θα έχει

Ομάδα μπάσκετ «3 εναντίον 3»	
Νούμερο	Ονοματεπώνυμο
7	
10	
19	

διαφορετικό νούμερο. Όπως φαίνεται οι εμφανίσεις έχουν το 7, το 10 και το 19.
Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το καρτελάκι;
Το καρτελάκι μπορεί να συμπληρωθεί με 60 διαφορετικούς τρόπους, αφού πρόκειται για διατάξεις των 5 ανά 3 χωρίς επανάληψη, άρα το πλήθος τους είναι $5 \cdot 4 \cdot 3$ ή αλλιώς $\frac{5!}{(5-3)!}$.

Για μια δεδομένη επιλογή των 3 παικτών με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να συμπληρωθεί το καρτελάκι;
Ας υποθέσουμε ότι οι 3 παίκτες που έχουν επιλεγεί είναι ο Αντώνης, ο Βασίλης και ο Γιάννης. Το καρτελάκι μπορεί να συμπληρωθεί με τους εξής 6 τρόπους:

Νούμερο	Αρχικό γράμμα ονόματος του παίκτη					
7	Α	Α	Β	Β	Γ	Γ
10	Β	Γ	Α	Γ	Α	Β
19	Γ	Β	Γ	Α	Β	Α

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε το πλήθος των τρόπων χωρίς την καταγραφή τους, καθώς πρόκειται για μεταθέσεις 3 στοιχείων, που το πλήθος τους είναι $3! = 6$.

Πόσες είναι οι δυνατές τριάδες παικτών που μπορούν προκύψουν από τους 5 παίκτες;
Ας υποθέσουμε ότι x είναι το πλήθος των διαφορετικών τριάδων. Και οι 6 μεταθέσεις των Α, Β και Γ του παραπάνω πίνακα αντιστοιχούν σε έναν από τους x αυτούς τρόπους, αφού οι παίκτες που επιλέγονται είναι οι ίδιοι (οι Α, Β και Γ απλώς αλλάζει το νούμερο στην εμφάνιση του κάθε ενός). Το x ισούται με το πλήθος των συνδυασμών των 5 ανά 3. Λόγω της βασικής αρχής απαρίθμησης:

$$\begin{pmatrix}\text{το πλήθος των}\\ \text{δυνατών τριάδων}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{το πλήθος των}\\ \text{διαφορετικών τρόπων}\\ \text{που μπορεί να}\\ \text{συμπληρωθεί}\\ \text{το καρτελάκι για}\\ \text{δεδομένη τριάδα}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{το πλήθος των}\\ \text{διαφορετικών}\\ \text{τρόπων που μπορεί}\\ \text{να συμπληρωθεί}\\ \text{το καρτελάκι}\end{pmatrix}$$

Άρα:

$$x \cdot 3! = \frac{5!}{(5-3)!} \Leftrightarrow x = \frac{5!}{3!(5-3)!} \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} \Leftrightarrow x = 10$$

Κάθε τρόπο από τους 10 τον ονομάζουμε **συνδυασμό των 5 ανά 3**.
Για το πλήθος των συνδυασμών των 5 ανά 3 χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

Για το πλήθος των συνδυασμών των ν ανά κ ισχύει:

$$\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$$

Η ισότητα $x \cdot 3! = \frac{5!}{(5-3)!}$ που σκεφτήκαμε και χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε το πρόβλημα, σημαίνει ότι:

$$\begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{συνδυασμών} \\ \text{των 5 ανά 3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{μεταθέσεων} \\ \text{των 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{διατάξεων} \\ \text{των 5 ανά 3} \\ \text{χωρίς επαν.} \end{pmatrix}$$

Και μπορεί να γενικευτεί:

$$\begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{συνδυασμών} \\ \text{των ν ανά κ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{μεταθέσεων} \\ \text{των κ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{διατάξεων} \\ \text{των ν ανά κ} \\ \text{χωρίς επαν.} \end{pmatrix}$$

Ή αλλιώς:

$$\begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{συνδυασμών} \\ \text{των ν ανά κ} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{διατάξεων} \\ \text{των ν ανά κ} \\ \text{χωρίς επαν.} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \text{Πλήθος} \\ \text{μεταθέσεων} \\ \text{των κ} \end{pmatrix}}$$

Εφαρμογές

Εφαρμογή 1

Το πενταμελές συμβούλιο του σχολείου αποτελείται από 4 κορίτσια και 1 αγόρι. Πρόκειται να επιλεγούν, με κλήρωση, 3 από τα 5 μέλη του συμβουλίου για να εκπροσωπήσουν την τάξη τους σε μία ενημερωτική συνάντηση με τους καθηγητές τους. Ποια είναι η πιθανότητα και τα 3 μέλη που θα επιλεγούν να είναι κορίτσια;

Λύση

Θεωρούμε το πείραμα τύχης: «Επιλέγουμε τυχαία 3 από τα 5 μέλη του πενταμελούς». Η σειρά επιλογής (ποιος/α θα επιλεγεί πρώτος/η, δεύτερος/η και τρίτος/η) δεν έχει σημασία. Οι τρόποι επιλογής είναι το πλήθος των συνδυασμών των 5 ανα 3, δηλαδή $\binom{5}{3}=10$. Αυτό είναι και το πλήθος των αποτελεσμάτων του δ.χ. Ω του πειράματος τύχης (και αν η κλήρωση είναι δίκαια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ισοπίθανα).

Θεωρούμε ως Α το ενδεχόμενο του Ω: «επιλέγονται μόνο κορίτσια». Τότε το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων του Α είναι το πλήθος των συνδυασμών των 4 ανά 3. Πράγματι, εξαιρώντας το αγόρι, τότε μένει να βρούμε με πόσους τρόπους επιλέγονται 3 από τα 4 κορίτσια.

Από την ισότητα $\binom{4}{3}\cdot 3!=\frac{4!}{(4-3)!}$ προκύπτει ότι:

$$\binom{4}{3}=\frac{4!}{3!(4-3)!}=\frac{4\cdot 3!}{3!\cdot 1!}=4$$

Άρα, από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας:

$$P(A)=\frac{4}{10}=0,4.$$

Εφαρμογή 2

Στην εφαρμογή 4 του μέρους Α΄, υπολογίσαμε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται για να ταξιδέψουν σε διπλανές θέσεις».

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης και η Μαρία κληρώνονται να ταξιδέψουν χωρίς να είναι σε διπλανές θέσεις».

β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου «ο Βαγγέλης κληρώνεται για να ταξιδέψει».

<u>Λύση</u>

α) Αν Α είναι το ενδεχόμενο «ο Βαγγέλης και η Μαρία ταξιδεύουν σε διπλανές θέσεις» και Β είναι το ενδεχόμενο «ο Βαγγέλης και οι Μαρία κληρώνονται να ταξιδέψουν», τότε το Β - Α είναι το ενδεχόμενο «ο Βαγγέλης και η Μαρία ταξιδεύουν σε θέσεις που δεν είναι διπλανές». Από τον Π.4 ισχύει ότι $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

Επίσης ισχύει ότι $A \subseteq B$, άρα $A \cap B = A$.

Άρα $P(B - A) = P(B) - P(A)$. Επομένως, έχοντας υπολογίσει ότι $P(A)=\frac{1}{21}$, αρκεί να υπολογίσουμε την P(B). Οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούν να επιλεγούν 4 επιβάτες από τους 7 για να ταξιδέψουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει ποιος θα ταξιδέψει σε ποια θέση είναι :

$$\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4!}{4!\cdot 3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}=35$$

Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως το πλήθος των στοιχείων του δ.χ. του πειράματος τύχης «επιλέγονται 4 επιβάτες για να ταξιδέψουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής τους». Ομοίως, τα ευνοϊκά αποτελέσματα είναι οι τετράδες που περιέχουν τον Βαγγέλη, τη Μαρία και ακόμα 2 άτομα επιλεγμένα από τους υπόλοιπους 5 επιβάτες:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

Άρα:

$$P(B) = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

και η πιθανότητα να ταξιδέψουν ο Βαγγέλης και η Μαρία σε όχι διπλανές θέσεις είναι ίση με:

$$P(B-A) = \frac{2}{7} - \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

β) Θεωρούμε ως το ενδεχόμενο Γ: «ο Βαγγέλης κληρώνεται να ταξιδέψει». Το πλήθος των ευνοϊκών εκβάσεων του Γ υπολογίζεται ως εξής:
Θεωρούμε ότι ο Βαγγέλης έχει κληρωθεί. Με πόσους τρόπους μπορούν να κληρωθούν οι υπόλοιποι 6 επιβάτες στις 3 θέσεις που απομένουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά κλήρωσης;
Το πλήθος αυτών των τρόπων είναι ίσο με:

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot(6-3)!} = 20$$

Τελικά:

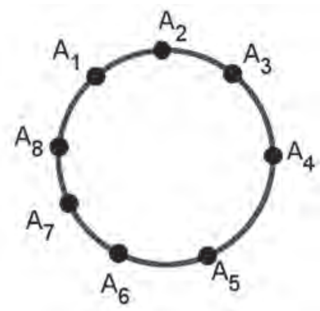
$$P(\Gamma) = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

Ασκήσεις – Προβλήματα – Δραστηριότητες

1) Σε ένα πρωτάθλημα συμμετέχουν 7 ομάδες και αγωνίζονται όλες με όλες μία φορά. Να υπολογίσετε πόσοι αγώνες θα γίνουν.

2) **α)** Από ένα σύνολο 10 μαθητών επιλέγουμε 4 μαθητές τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν συγκεκριμένο μαθητή;
β) Να απαντήσετε στο ίδιο ερώτημα αν έχουμε ένα σύνολο ν μαθητών και επιλέγουμε, τυχαία, κ μαθητές.

3) Σε ένα κουτί υπάρχουν 5 μπαταρίες, από τις οποίες οι 2 είναι αποφορτισμένες. Επιλέγουμε τυχαία 2 μπαταρίες από το κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου:
α) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένες.
β) Το πολύ μία από τις μπαταρίες που επιλέξαμε είναι αποφορτισμένη.
γ) Οι μπαταρίες που επιλέξαμε δεν είναι αποφορτισμένες.



4) Σε έναν κύκλο δίνονται 8 σημεία $A_1, A_2, \ldots, A_8$.
α) Πόσα ευθύγραμμα τμήματα ορίζουν τα σημεία αυτά;
β) Πόσες διαγώνιες έχει ένα κανονικό οκτάγωνο;
γ) Πόσα τρίγωνα υπάρχουν με αυτά τα σημεία ως κορυφές;
δ) Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα του ερωτήματος (α). Ποια είναι η πιθανότητα:
i) να μη διέρχεται από το σημείο A_1;
ii) να διέρχεται από το σημείο A_2;

5) Από ένα σύλλογο καθηγητών με 7 άνδρες και 6 γυναίκες επιλέγουμε τυχαία 4 άτομα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
α) τα άτομα να είναι γυναίκες,
β) ένα τουλάχιστον να είναι άνδρας,
γ) να υπάρχει μία μόνο γυναίκα.

6) Ένα κουτί περιέχει 20 ηλεκτρικές ασφάλειες, από τις οποίες οι 5 είναι ελαττωματικές. Από ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας επιλέγονται τυχαία 4 ασφάλειες και δοκιμάζονται.
Αν βρεθούν περισσότερες από μία ελαττωματικές, το κουτί επιστρέφεται ως απαράδεκτο. Να βρείτε την πιθανότητα να επιστραφεί ως απαράδεκτο ένα κουτί που έχει 5 ελαττωματικές ασφάλειες.

7) Έχετε δύο σύμβολα το X και I. Πόσες διαφορετικές συμβολοσειρές μπορείτε να σχηματίσετε χρησιμοποιώντας 4 φορές το I και 3 φορές το X; Π.χ. μία συμβολοσειρά είναι η XIIXIIX. Αν κάποιος επιλέξει τυχαία μία τέτοια σειρά, ποια είναι η πιθανότητα το 1ο σύμβολο από αριστερά να είναι X;

Πρόσθετο Υλικό

1) Τι από τα παρακάτω είναι πιθανότερο;
— Να κερδίσετε στο τζόκερ έχοντας συμπληρώσει μία στήλη.
— Να καλέσετε στο τηλέφωνο έναν φίλο ή μία φίλη σας, γνωρίζοντας μόνο τρία από τα δέκα νούμερα του τηλεφώνου του και επιλέγοντας τα υπόλοιπα επτά νούμερα στην τύχη.

2) **α)** Εικοσιτρείς φοιτητές/τριες έχουν μια κοινή ομάδα συζήτησης, σε δικτυακή εφαρμογή επικοινωνίας, για ανταλλαγή σημειώσεων. Σε αυτή την ομάδα ξεκινάει μία συζήτηση για το πότε έχει καθένας/καθεμία γενέθλια. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν δύο τουλάχιστον φοιτητές/τριες γενέθλια την ίδια ημέρα;
β) Να εκτιμήσετε το πλήθος των ατόμων μίας ομάδας, ώστε να είναι περισσότερο από 99,9% πιθανό ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο άτομα που έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα.

Η τιμή της παράστασης $1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots\cdot(365-\kappa+1)}{365^{\kappa}}$, όπου $\kappa \leq 365$ φυσικός αριθμός δίνεται (προσεγγιστικά) στον παρακάτω πίνακα, για κάποιες τιμές του κ:

κ	**10**	**20**	**23**	**30**	**60**	**70**
	0,117	0,411	0,507	0,706	0,994	0,999

3) **α)** Για δύο φυσικούς αριθμούς κ και ν με $\kappa \leq \nu$, να αποδείξετε ότι:

$$\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu}{\nu-\kappa}$$

β) Πώς ερμηνεύετε συνδυαστικά την παραπάνω ισότητα;

γ) Να αποδείξετε ότι $\binom{\nu}{\kappa}=\binom{\nu-1}{\kappa}+\binom{\nu-1}{\kappa-1}$.

δ) Μπορείτε να ερμηνεύσετε συνδυαστικά την ισότητα του (γ) χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πρόβλημα;

«Από ν όμοια σφαιρίδια που βρίσκονται σε ένα δοχείο σημαδεύουμε ένα με μαρκαδόρο. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε τυχαία κ από τα ν σφαιρίδια»;