ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
9 Νοεμβρίου 2019

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right).$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned}A&=\left(\frac{(-16)^5}{(-8)^5}+\frac{(-12)^5}{6^5}+1\right)\cdot\left(\frac{(-16)^3}{8^3}+\frac{(-12)^3}{(-6)^3}+2019\right)\\&=\left(\left(\frac{-16}{-8}\right)^5+\left(\frac{-12}{6}\right)^5+1\right)\cdot\left(\left(\frac{-16}{8}\right)^3+\left(\frac{-12}{-6}\right)^3+2019\right)\\&=\left(2^5+(-2)^5+1\right)\cdot\left((-2)^3+2^3+2019\right)\\&=\left(2^5-2^5+1\right)\cdot\left(-2^3+2^3+2019\right)=1\cdot 2019=2019.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2

Ένας ταξιδιώτης έμεινε σε μία πόλη ένα τριήμερο. Την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας και την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας. Αν στο τέλος της τρίτης μέρας του είχαν μείνει 240 ευρώ, να βρείτε πόσα χρήματα είχε μαζί του ο ταξιδιώτης στην αρχή της πρώτης μέρας.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω ότι ο ταξιδιώτης είχε μαζί του την πρώτη μέρα x ευρώ.

Τότε την πρώτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{3}$ ευρώ και του έμειναν $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$ ευρώ. Τη δεύτερη μέρα ξόδεψε $\frac{2x}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{x}{6}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{3x}{6}=\frac{x}{2}$ ευρώ. Την τρίτη μέρα ξόδεψε $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{10}$ ευρώ και του έμειναν $\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$ ευρώ.

Επομένως έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{5}=240 \Leftrightarrow \frac{2x}{5}=\frac{240}{1} \Leftrightarrow 2x=1200 \Leftrightarrow x=\frac{1200}{2} \Leftrightarrow x=600 \text{ ευρώ.}$$

$2^{ος}$ τρόπος (χωρίς εξίσωση)

Την πρώτη μέρα του μένουν τα $\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ μέρους των χρημάτων του.

Τη δεύτερη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ μέρους των χρημάτων του και του μένει το $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ μέρους των χρημάτων.

Την τρίτη μέρα ξοδεύει το $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ μέρους των χρημάτων του και του μένουν τα $\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ μέρους των χρημάτων που είναι 240€. Άρα το $\frac{1}{5}$ είναι $240:2=120$€, και επομένως τα χρήματα που είχε ήταν $120\cdot 5=600$€.

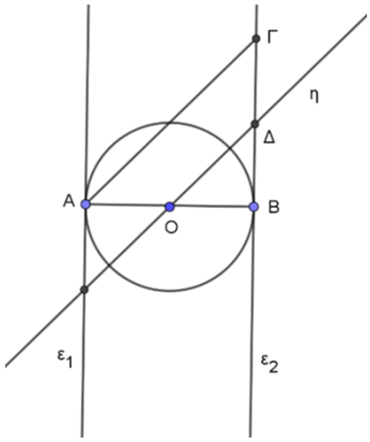
$3^{ος}$ τρόπος

Επειδή την τρίτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας, του απέμειναν τα $\frac{4}{5}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας που ήταν 240 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της δεύτερης μέρας $240\cdot\frac{5}{4}=300$ ευρώ.

Επειδή την δεύτερη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει από την πρώτη μέρα, του απέμειναν τα $\frac{3}{4}$ των χρημάτων που του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας που ήταν 300 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι του είχαν μείνει στο τέλος της πρώτης μέρας $300\cdot\frac{4}{3}=400$ ευρώ.

Επειδή την πρώτη μέρα ξόδεψε το $\frac{1}{3}$ των χρημάτων που είχε μαζί του, του απέμειναν τα $\frac{2}{3}$ των χρημάτων που του είχε μαζί του που ήταν 400 ευρώ. Επομένως, με αναγωγή στη μονάδα βρίσκουμε ότι είχε μαζί του στο ξεκίνημα της πρώτης μέρας $400\cdot\frac{3}{2}=600$ ευρώ.

Πρόβλημα 3



Δίνεται κύκλος με διάμετρο $ΑΒ$, κέντρο $Ο$ και οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες στα άκρα $Α$ και $Β$ της διαμέτρου $ΑΒ$. Στην ευθεία ε_2 παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ ίσο με τη διάμετρο του κύκλου και στη συνέχεια σχεδιάζουμε την ευθεία η να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και να είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΓ$. Η ευθεία η τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα $ΒΓ$ στο σημείο $Δ$.

(α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες και να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $ΑΒΓ$ και $ΟΒΔ$.

(β) Να αποδείξετε ότι το $Δ$ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΒΓ$.

(γ) Να εξετάσετε το είδος του τετράπλευρου $ΑΟΔΓ$.

Λύση

(α) Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι μεταξύ τους παράλληλες, αφού είναι κάθετες στα άκρα $Α$ και $Β$ της διαμέτρου $ΑΒ$. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $Α\hat{Β}Γ = 90^0$, $ΑΒ = ΒΓ$, επομένως οι γωνίες της βάσης του $ΑΓ$ είναι 45^0 η καθεμία. Στο τρίγωνο $ΟΔΒ$, έχουμε $Δ\hat{Β}Ο = 90^0$, $Δ\hat{Ο}Β = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $Γ\hat{Α}Ο = 45^0$ και $Ο\hat{Δ}Β = 45^0$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη με την $Α\hat{Γ}Β = 45^0$.

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι το τρίγωνο ΟΒΔ είναι ισοσκελές και από την υπόθεση $ΒΓ = ΑΒ$ έχουμε:

$$ΔΒ = ΟΒ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{2}.$$

Επομένως το Δ είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $ΒΓ$.

(γ) Το τετράπλευρο $ΑΟΔΓ$ είναι τραπέζιο αφού οι πλευρές του $ΑΟ, ΓΔ$ τέμνονται στο σημείο $Β$ και οι πλευρές του $ΑΓ, ΟΔ$ είναι μεταξύ τους παράλληλες. Επίσης ισχύει $ΑΟ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = ΓΔ$. Επομένως, το τετράπλευρο $ΑΟΔΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Χρησιμοποιώντας μία μόνο φορά καθέναν από τους ακέραιους από το 1 μέχρι και το 26 γράφουμε 13 κλάσματα. Πόσα το πολύ από αυτά τα κλάσματα μπορεί να είναι ίσα με ακέραιο αριθμό;

Λύση

Για να ισούται ένα κλάσμα με ακέραιο πρέπει ο παρονομαστής του να διαιρεί τον αριθμητή του. Από τους 26 δεδομένους ακέραιους πρώτοι, δηλαδή αυτοί που διαιρούνται μόνο με τον εαυτό τους και τη μονάδα, είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Οι 6 μικρότεροι από αυτούς, 2, 3, 5, 7, 11, 13, μπορούν να τοποθετηθούν ως παρονομαστές με αριθμητή πολλαπλάσιο τους, ώστε το κλάσμα να ισούται με ακέραιο. Από τους υπόλοιπους, δηλαδή το 17, 19, 23 ο ένας μπορεί να δημιουργήσει κλάσμα με παρονομαστή το 1, δηλαδή ίσο με ακέραιο, έστω το $\frac{23}{1} = 23$. Με τους 17 και 19 θα γράψουμε υποχρεωτικά ένα κλάσμα που δεν είναι ακέραιος, οπότε ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός κλασμάτων που μπορούμε να γράψουμε ίσα με ακέραιους είναι 12.

Θα εξετάσουμε τώρα, αν είναι δυνατόν να γραφούν ακριβώς 12 τέτοια κλάσματα. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής:

$\frac{26}{13}, \frac{25}{5}, \frac{23}{1}, \frac{22}{11}, \frac{21}{7}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{15}{3}, \frac{14}{2}$ (υποχρεωτική επιλογή παρονομαστών)

$\frac{24}{8}, \frac{16}{4}, \frac{12}{6}$ (υπάρχει δυνατότητα αλλαγής των παρονομαστών).