ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
81ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
6 Νοεμβρίου 2020

Ενδεικτικές λύσεις

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 5)
Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right).$$

Λύση
Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{(-6)^{17}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{16}}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\frac{(-8)^{31}}{4^{31}}+\frac{(-20)^{31}}{(-10)^{31}}+2020\right)$$

$$=\left(\frac{(-6)^{16}(-6)^{1}}{(-3)^{16}}+\frac{(-12)^{15}(-12)}{6^{15}}+2^{0}\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)$$

$$=\left((-6)\cdot\left(\frac{-6}{-3}\right)^{16}+(-12)\cdot\left(\frac{-12}{6}\right)^{15}+2^{0}\right)\cdot\left(\left(\frac{-8}{4}\right)^{31}+\left(\frac{-20}{-10}\right)^{31}+2020\right)$$

$$=\left((-6)\cdot 2^{16}+(-12)\cdot(-2)^{15}+2^{0}\right)\cdot\left((-2)^{31}+2^{31}+2020\right)$$

$$=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)\cdot(-2)^{15}+1\right)\cdot\left(-2^{31}+2^{31}+2020\right)$$

$$=\left((-6)\cdot 2^{16}-(-6)\cdot(-2)^{16}+1\right)\cdot(0+2020)=(0+1)\cdot 2020=2020.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Οι ομάδες μπάσκετ δώδεκα Γυμνασίων της Αθήνας παίρνουν μέρος σε ένα σχολικό πρωτάθλημα μπάσκετ. Κάθε μία ομάδα θα παίξει μία μόνο φορά με όλες τις υπόλοιπες ομάδες. Σε κάθε αγωνιστική ημέρα οι ομάδες θα παίζουν την ίδια ώρα ανά ζεύγη και θα έχουμε 6 αγώνες. Μετά το τέλος κάθε αγωνιστικής θα βγαίνει η βαθμολογία σε φθίνουσα σειρά σύμφωνα με τους βαθμούς που θα έχει κάθε ομάδα. Στο σύστημα βαθμολογίας των ομάδων η νίκη παίρνει έναν βαθμό, η ήττα μηδέν βαθμούς και δεν υπάρχει ισοπαλία. Υπάρχει αγωνιστική ημέρα μετά το τέλος της οποίας η βαθμολογία που θα βγει θα δίνει σε κάθε ομάδα διαφορετικούς βαθμούς από όλες τις άλλες ομάδες
Λύση

Για να έχουν οι δώδεκα ομάδες διαφορετικούς βαθμούς στον πίνακα της βαθμολογίας, δεδομένου ότι ο μέγιστος αριθμός παιγνιδιών και βαθμών είναι 11, η μοναδική δυνατή βαθμολογία είναι η παρακάτω:

Ο1	Ο2	Ο3	Ο4	Ο5	Ο6	Ο7	Ο8	Ο9	Ο10	Ο11	Ο12
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Επομένως, αν υπάρχει τέτοια αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες, αυτή θα είναι η ενδέκατη.
Η απάντηση αυτή θα είναι αποδεκτή, εφόσον αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν να προκύψει η παραπάνω βαθμολογία στο τέλος της ενδέκατης αγωνιστικής ημέρας. Πράγματι, η παραπάνω βαθμολογία είναι εφικτή, αν υποθέσουμε ότι κάθε ομάδα έχει κερδίσει όλα τα παιγνίδια με ομάδες που βρίσκονται κάτω από αυτή στη βαθμολογία, δηλαδή η Ο1 θα κερδίσει όλες τις υπόλοιπες ομάδες, η Ο2 θα κερδίσει τις Ο3 , Ο4, …Ο12, κοκ. Επομένως, η αγωνιστική ημέρα που μπορεί να δώσει διαφορετικούς βαθμούς σε όλες τις ομάδες είναι η ενδέκατη.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 8)

Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ΑΒ και ΗΓ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες. Το σημείο Δ ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και οι ευθείες ΑΔ και ΒΗ τέμνονται στο σημείο Ζ έτσι ώστε να ισχύει:

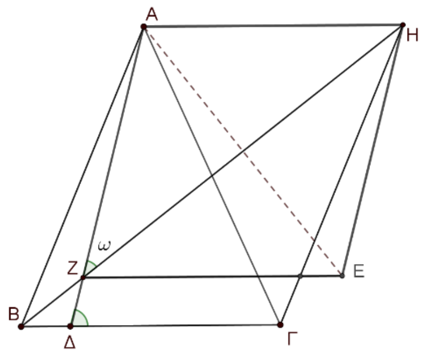
$$\text{ΑΖ} = \text{ΒΓ}.$$

Επίσης οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες.

Αν $\text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = \omega$, τότε:

(α) Να βρείτε τη γωνία $\Gamma\hat{\Delta}\text{Ζ}$ συναρτήσει του ω.

(β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.



Σχήμα 1

Λύση

(α) Επειδή οι ευθείες ΑΒ και ΓΗ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΒΓ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες, δηλαδή έχουμε $\text{ΒΓ} = \text{ΑΗ}$. Όμως από υπόθεση ΑΖ = ΒΓ, οπότε θα είναι και ΑΖ = ΑΗ. Επομένως το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές, οπότε θα έχει τις δύο γωνίες της βάσης του ίσες, δηλαδή

$$\text{Α}\hat{\text{Η}}\text{Ζ} = \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = \omega. \qquad (1)$$

Επίσης από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΖΗ έχουμε ότι:

$$\text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 180^0 - 2 \cdot \text{Α}\hat{\text{Ζ}}\text{Η} = 180^0 - 2\omega. \qquad (2)$$

Τέλος, επειδή $\text{ΑΗ} \parallel \text{ΒΓ}$ που τέμνονται από την ΑΔ, έχουμε ότι οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

$$\Gamma\hat{\Delta}\text{Ζ} + \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 180^0. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έπεται ότι:

$$180^0 - 2\omega + \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 180^0 \Rightarrow \text{Ζ}\hat{\text{Α}}\text{Η} = 2\omega.$$

(β) Επειδή οι ευθείες ΑΔ και ΗΕ είναι παράλληλες και οι ευθείες ΖΕ και ΑΗ είναι παράλληλες, το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΗ = ΖΕ και ΑΖ = ΗΕ. Όμως, όπως αποδείξαμε στο ερώτημα (α) είναι ΑΖ = ΑΗ, οπότε το τετράπλευρο ΑΖΕΗ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες και είναι ρόμβος. Άρα οι διαγώνιες του ΑΕ και ΖΗ είναι κάθετες.