ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
82ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
5 Νοεμβρίου 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι $x = \overline{abc}$ και $y = \overline{cba}$ για τους οποίους ισχύει $0 < c < a$ και οι δύο διαιρούνται με το 4 .

(*Σημείωση:* $x = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, $y = \overline{cba} = 100c + 10b + a$).

Λύση

Εφόσον οι αριθμοί x, y είναι τριψήφιοι θετικοί ακέραιοι, τα a και c θα είναι ψηφία διαφορετικά από το μηδέν, όπως δίνεται και στην υπόθεση. Για το ψηφίο b δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, οπότε ο b μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός μονοψήφιος ακέραιος.

Εφόσον οι αριθμοί x, y διαιρούνται με το 4 θα είναι άρτιοι, οπότε οι μονοψήφιοι ακέραιοι a και c θα είναι άρτιοι και επειδή $c < a$, οι δυνατές τιμές για το ζεύγος (a, c) μπορεί να είναι:

$$(8,6) \text{ ή } (8,4) \text{ ή } (8,2) \text{ ή } (6,4) \text{ ή } (6,2) \text{ ή } (4,2).$$

Πρέπει επίσης οι αριθμοί $\overline{bc}$ και $\overline{ba}$ να διαιρούνται με το 4. Δοκιμάζοντας τώρα τις τιμές του $b = 0$ ή $b = 1$ ή $b = 2$ ή $b = 3$ ή $b = 4$ ή $b = 5$ ή $b = 6$ ή $b = 7$ ή $b = 8$ ή $b = 9$
(σε συνδυασμό με τα προηγούμενα) καταλήγουμε ότι οι ζητούμενοι αριθμοί $x = \overline{abc}$ είναι οι: $884, 864, 844, 824, 804$ και $692, 672, 652, 632, 612$.

Οι αριθμοί $y = \overline{cba}$ προκύπτουν από την εναλλαγή των ψηφίων του αριθμού $x = \overline{abc}$.

Πρόβλημα 2

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής:
Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε α φορές το βαθμό 20, β φορές το βαθμό 18, γ φορές το βαθμό 16 και δ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε α φορές το βαθμό 18, β φορές το βαθμό 16, γ φορές το βαθμό 14 και δ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη

Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό N των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20 < N < 28$.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε:

$$20\alpha + 18\beta + 16\gamma + 14\delta = 18\alpha + 16\beta + 14\gamma + 20\delta$$
$$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 6\delta \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3\delta.$$

Επομένως, έχουμε $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta$ και αφού $20 < N < 28$, έπεται ότι $N = 24$.

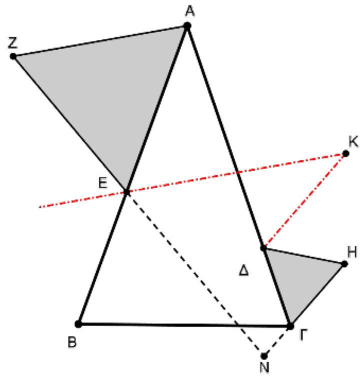
Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ) και τα τρίγωνα ΑΕΖ, ΔΓΗ είναι ισόπλευρα. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ και $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{H}$ τέμνονται στο σημείο Κ. Οι προεκτάσεις των ευθύγραμμων τμημάτων ΕΖ και ΓΗ τέμνονται στο σημείο Ν.

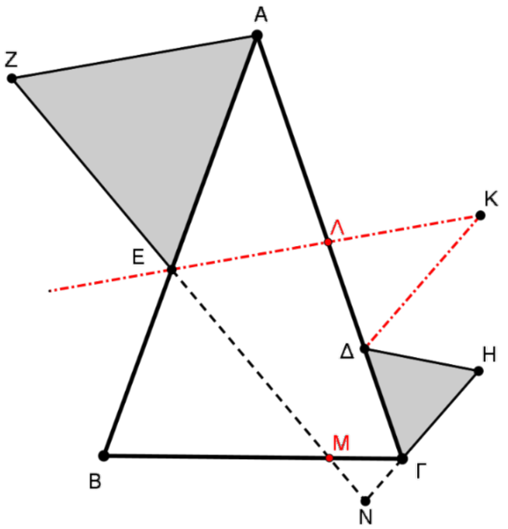
Να αποδείξετε ότι:

(α) $E\widehat{K}\Delta = B\widehat{A}\Gamma$

(β) $E\widehat{N}\Gamma = 120^0 - B\widehat{A}\Gamma$



Λύση



Έστω τώρα Μ η τομή της ΕΝ με την ΒΓ και Λ η τομή της ΕΚ με την ΑΓ . Τότε ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

(α) $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{K}}\Delta = \Lambda\widehat{\mathrm{K}}\Delta = 180° - \mathrm{K}\widehat{\Lambda}\Delta - \mathrm{K}\widehat{\Delta}\Lambda = 180° - \mathrm{K}\widehat{\Lambda}\Delta - 60° = 120° - \mathrm{K}\widehat{\Lambda}\Delta =$
$= 120° - \mathrm{A}\widehat{\Lambda}\mathrm{E} = 120° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}} - \mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Lambda\right) = 120° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}} - 60°\right) = \widehat{\mathrm{A}}.$

(β) $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{N}}\Gamma = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{N}}\Gamma = 180° - \mathrm{N}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma - \mathrm{N}\widehat{\Gamma}\mathrm{M} = 180° - \mathrm{E}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{B} - \mathrm{N}\widehat{\Gamma}\mathrm{M} =$

$$= 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{M}\right) - \left(180° - \widehat{\Gamma} - \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{H}\right) =$$
$$= 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{B}} - 60°\right) - \left(180° - \widehat{\Gamma} - 60°\right) =$$
$$= \widehat{\mathrm{B}} + \widehat{\Gamma} - 60° = 180° - \widehat{\mathrm{A}} - 60° = 120° - \widehat{\mathrm{A}}.$$