

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν ο αριθμός $\frac{\alpha}{3}$ είναι φυσικός αριθμός, τότε ο αριθμός α δεν μπορεί να είναι:

- α) 111 β) 345 γ) 0 **δ) 1.333** ε) $3^4 - 6$

2. Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$, τότε η τιμή του $\frac{3\alpha}{2\beta}$ είναι:

- α) $\frac{9}{4}$ β) $\frac{4}{9}$ γ) $\frac{1}{3}$ **δ) 1** ε) 2

3. Αν τα $\frac{4}{5}$ του $\frac{3}{4}$ είναι ίσα με τα $\frac{2}{5}$ του $\frac{x}{4}$, τότε το x ισούται με:

- α) 4 **β) 6** γ) 2 δ) 3 ε) 5

4. Από τους παρακάτω αριθμούς πρώτος είναι ο αριθμός:

- α) 111 β) $2^3 + 1$ γ) 2022 **δ) 79** ε) 12.345

5. Αν $\alpha + \beta = 7$, $\beta + \gamma = 6$ και $\alpha + \gamma = 3$, τότε η παράσταση $\Phi = \alpha + \beta + \gamma$ ισούται με:

- α) 6 β) 7 γ) 5 **δ) 8** ε) 9

6. Αν $\alpha = 2021$ και $\beta = 0,2$, η παράσταση που θα δώσει το μεγαλύτερο αποτέλεσμα είναι η:

- α) $\alpha + \beta$ β) $\alpha - \beta$ γ) $\alpha \cdot \beta$ **δ) $\frac{\alpha}{\beta}$** ε) $\frac{\beta}{\alpha}$

7. Αν 5 πορτοκάλια στοιχίζουν όσο 2 μήλα και το 1 μήλο στοιχίζει όσο 3 αχλάδια, τότε τα 15 πορτοκάλια στοιχίζουν όσο:

- α) 12 αχλάδια β) 15 αχλάδια **γ) 18 αχλάδια** δ) 24 αχλάδια ε) 21 αχλάδια

1) Για να είναι ο αριθμός $\frac{\alpha}{3}$ φυσικός, θα πρέπει ο αριθμός α να διαιρείται με το 3 ακριβώς. Θα χρησιμοποιήσουμε το Κριτήριο Διαιρετότητας του 3.

- Το $111 \rightarrow 1+1+1=3$, διαιρείται με το 3
- Το $345 \rightarrow 3+4+5=12$, — 4 —
- Το 0 διαιρείται από όλους τους αριθμούς, άρα και από το 3.

⊙ Το $1.333 \rightarrow 1+3+3+3=10$, δεν διαιρείται με το 3

- Το $3^4 - 6 = 81 - 6 = 75 \rightarrow 7+5=12$, διαιρείται με το 3.

$$2) \frac{\alpha}{6} = \frac{2}{3} \rightarrow 3\alpha = 26 \rightarrow \frac{3\alpha}{26} = \frac{26}{26} \cdot \frac{1}{1}$$

$$\text{Άρα, } \frac{3\alpha}{26} = 1$$

$$3) \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{x}{4} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{10} \rightarrow x=6$$

4) Πρώτος είναι ο φυσικός αριθμός, που διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα.

- Το $111 \rightarrow 1+1+1=3$, διαιρείται με το 3
- Το $2^3 + 1 = 9$, διαιρείται με το 3 και το 9.
- Το 2022 είναι ζυγός, άρα διαιρείται με το 2.

- Το 79 διαίρεται μόνο με τον εαυτό του και το 1, άρα είναι πρώτος
- Το 12345 έχει ως εφ' όσον γινόμενο το 5, άρα διαίρεται με το 5.

$$\begin{array}{rcl}
 5) & \alpha + \beta = 7 & \text{Προδίδεται} \\
 & \beta + \gamma = 6 & \text{και } \beta \in \gamma \\
 \oplus & \alpha + \gamma = 3 & \text{α > 1604788}
 \end{array}$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 7 + 6 + 3$$

$$2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma) = 16$$

$$\phi = \alpha + \beta + \gamma = 8$$

$$6) \alpha = 2021 \quad \text{και} \quad \beta = 0,2$$

$$\cdot \alpha + \beta = 2021 + 0,2 = 2021,2$$

$$\cdot \alpha - \beta = 2021 - 0,2 = 2020,8$$

$$\cdot \alpha \cdot \beta = 2021 \cdot 0,2 = 404,2$$

$$\cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2021}{0,2} = 10.105$$

$$\cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{0,2}{2021} = 0,0000989 \dots$$

$$\begin{array}{lcl}
 7) & 5\pi \rightarrow 2\rho & \overset{3}{\rightsquigarrow} 15\pi \rightarrow 6\rho \\
 & 1\rho \rightarrow 3\alpha & \overset{6}{\rightsquigarrow} 6\rho \rightarrow 18\alpha
 \end{array}$$

8. Η τιμή της παράστασης $K = 2 \cdot (7^2 - 3 \cdot 4^2)^{2021} + \frac{5}{12} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right)$ ισούται με:

- α) 3 β) $\frac{25}{12}$ γ) $\frac{37}{12}$ δ) $\frac{29}{12}$ ε) 1

9. Το κλάσμα $\frac{0,002 + 0,02}{22}$ ισούται με:

- α) 0,02 β) 0,0011 γ) 0,01 δ) 0,001 ε) 0,0022

10. Ο αριθμός που δεν διαιρείται συγχρόνως με το 2, το 3 και το 4 είναι ο:

- α) 84 β) 48 γ) 126 δ) 72 ε) 36

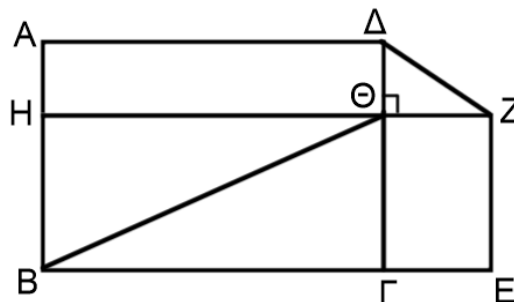
(3x10=30 μονάδες)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Το διπλανό σχήμα περιέχει τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΗΘΔ, ΗΒΓΘ, ΑΒΓΔ, ΘΓΕΖ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΘΖ.

Δίνονται:

- ΒΓ = 10 εκ.
- Το ΒΕ είναι 40 % μεγαλύτερο του ΒΓ.
- Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΘΓ είναι 30 τ. εκ.
- Το ΗΒ είναι το 75 % του ΑΒ.



α) Να δείξετε ότι ΓΕ = 4 εκ., ΘΓ = 6 εκ., ΑΒ = 8 εκ. και ΑΗ = 2 εκ.

β) Να βρείτε το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΔΘΖ.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του ΔΓΕΖ.

(α->12 μονάδες, β->7 μονάδες, γ->6 μονάδες)

2. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι 504. Αν ο μικρότερος από αυτούς αυξηθεί κατά 5 μονάδες, τότε το γινόμενό τους γίνεται 684. Να βρεθούν οι δύο αριθμοί.

(6 μονάδες)

3. Η Ελένη έχει ένα κουτί, το οποίο περιέχει 120 πράσινες καραμέλες, 360 κόκκινες καραμέλες και 240 ροζ καραμέλες. Προσθέτει επιπλέον μερικές κόκκινες καραμέλες και παρατηρεί ότι το 60 % από τις καραμέλες που περιέχει τώρα το κουτί είναι κόκκινες. Να βρείτε πόσες κόκκινες καραμέλες πρόσθεσε στο κουτί.

(10 μονάδες)

$$8) K = 2 \cdot (7^2 - 3 \cdot 4^2)^{2021} + \frac{5}{12} : \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$K = 2 \cdot (49 - 3 \cdot 16)^{2021} + \frac{5}{12} : \left(\frac{8}{12} - \frac{3}{12} \right)$$

$$K = 2 \cdot (49 - 48)^{2021} + \frac{5}{12} : \frac{5}{12} \cdot 1$$

$$K = 2 \cdot 1^{2021} + 1$$

$$K = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$9) \frac{0,002 + 0,02}{22} = \frac{0,022}{22} = 0,001$$

10) Ο αριθμός που δεν διαιρείται σωστά με το 2, το 3 και το 4 δε θα είναι πολλαπλάσιο του 12.

$$\text{Το Ε.Κ.Π.}(2,3,4) = 12$$

Τα πολλαπλάσια του 12 είναι :

12, 24, (36), (48), 60, (72), (84), 96, 108,

120, 132

(126)

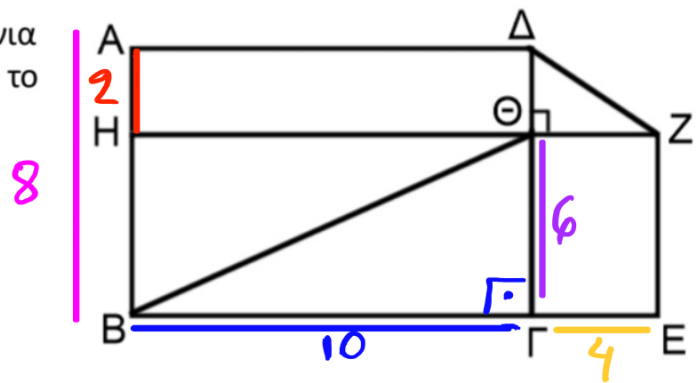
Υπάρχουν ως απαντήσεις

Πρόβλημα 1

1. Το διπλανό σχήμα περιέχει τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΑΗΘΔ, ΗΒΓΘ, ΑΒΓΔ, ΘΓΕΖ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΘΖ.

Δίνονται:

- ΒΓ = 10 εκ.
- Το ΒΕ είναι 40 % μεγαλύτερο του ΒΓ.
- Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΘΓ είναι 30 τ. εκ.
- Το ΗΒ είναι το 75 % του ΑΒ.



α) Να δείξετε ότι ΓΕ = 4 εκ., ΘΓ = 6 εκ., ΑΒ = 8 εκ. και ΑΗ = 2 εκ.

β) Να βρείτε το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΔΘΖ.

γ) Να βρείτε το εμβαδό του ΔΓΕΖ.

$$\alpha) \text{ } BE = BG + \frac{40}{100} \cdot BG = 10 + \frac{4}{10} \cdot 10 = 14 \text{ εκ.}$$

$$BE = BG + GE \rightarrow GE = 14 - 10 = 4 \text{ εκ.}$$

$$E_{\text{ΒΘΓ}} = 30 \rightarrow \frac{b \cdot u}{2} = 30 \rightarrow BG \cdot \Theta\Gamma = 2 \cdot 30$$

$$10 \cdot \Theta\Gamma = 60 \rightarrow \Theta\Gamma = 6 \text{ εκ.}$$

Το ΗΘΓΒ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οπότε

$$BG = H\Theta = 10 \text{ εκ. και } \Theta\Gamma = HB = 6 \text{ εκ.}$$

Για τον ίδιο λόγο στο ΘΖΕΓ έχουμε ότι:

$$\Theta\Gamma = ZE = 6 \text{ εκ και } \Gamma E = \Theta Z = 4 \text{ εκ.}$$

και στο ΑΔΘΗ αντίστοιχα:

$$BG = H\Theta = 10 \text{ εκ. και } AH = \Delta\Theta.$$

$$HB = \frac{75}{100} \cdot AB \rightarrow 6 = \frac{3}{4} \cdot AB \rightarrow AB = 6 : \frac{3}{4}$$

$$AB = \cancel{6}^2 \cdot \frac{4}{\cancel{3}_1} \rightarrow AB = 8 \text{ εκ.}$$

$$AB = AH + HB \rightarrow AH = 8 - 6 = 2 \text{ εκ.}$$

$$\beta) E_{\Delta\theta Z} = \frac{6 \cdot 0}{2} = \frac{\Delta\theta \cdot \theta Z}{2} = \frac{\overset{1}{2} \cdot 4}{2} = 4 \text{ τ. εκ.}$$

$$\begin{aligned} \gamma) E_{\Delta\Gamma EZ} &= E_{\Delta\theta Z} + E_{\theta ZE\Gamma} \\ &= 4 + 6 \cdot 4 \\ &= 4 + 24 \\ &= 28 \text{ τ. εκ.} \end{aligned}$$

2. Το γινόμενο δύο αριθμών είναι 504. Αν ο μικρότερος από αυτούς αυξηθεί κατά 5 μονάδες, τότε το γινόμενό τους γίνεται 684. Να βρεθούν οι δύο αριθμοί.

Έστω α και β οι δύο αριθμοί. Προκύπτουν οι εξής σχέσεις από το πρόβλημα: ($\alpha < \beta$)

$$\textcircled{1} \quad \alpha \cdot \beta = 504$$

$$\textcircled{2} \quad (\alpha + 5) \cdot \beta = 684 \rightarrow \alpha \cdot \beta + 5\beta = 684 \rightarrow$$

$$\rightarrow 504 + 5\beta = 684 \rightarrow 5\beta = 180 \rightarrow \boxed{\beta = 36}$$

$$\alpha = 504 : 36 \rightarrow \boxed{\alpha = 14}$$

3. Η Ελένη έχει ένα κουτί, το οποίο περιέχει 120 πράσινες καραμέλες, 360 κόκκινες καραμέλες και 240 ροζ καραμέλες. Προσθέτει επιπλέον μερικές κόκκινες καραμέλες και παρατηρεί ότι το 60 % από τις καραμέλες που περιέχει τώρα το κουτί είναι κόκκινες. Να βρείτε πόσες κόκκινες καραμέλες πρόσθεσε στο κουτί.

Αρχικά

$$\text{Σύνολο} = 120 + 360 + 240 = 720 \text{ καρτέτες}$$

$$\frac{360}{720} = 50\% \text{ αποτελούν οι κόκκινες.}$$

Μετά

Ας υποθέσουμε ότι προσέθετε x κόκκινες καρτέτες και έγιναν το 60% του συνόλου.

$$\frac{360+x}{720+x} = \frac{\overset{3}{60}}{\underset{5}{100}} \rightarrow \frac{360+x}{720+x} = \frac{3}{5} \rightarrow$$

$$(360+x) \cdot 5 = 3 \cdot (720+x) \rightarrow$$

$$1800 + 5x = 2160 + 3x \rightarrow$$

$$5x - 3x = 2160 - 1800 \rightarrow$$

$$2x = 360 \rightarrow$$

$$x = 180 \text{ κόκκινες καρτέτες. προσέθετε.}$$

4. Ένας γυμναστής τοποθετεί τους μαθητές της τάξης του σε εξάδες και δεν περισσεύει κανείς. Αν τους τοποθετήσει σε τετράδες, τότε δημιουργούνται 5 τετράδες περισσότερες από τις εξάδες και πάλι δεν περισσεύει κανείς. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.

(4 μονάδες)

5. Δύο καστανοπαραγωγοί Α και Β μάζεψαν την παραγωγή τους. Ο παραγωγός Α μάζεψε 9.800 κιλά. Η παραγωγή του Β ήταν ίση με τα $\frac{6}{7}$ της παραγωγής του Α. Το $\frac{1}{5}$ της παραγωγής του Α και το $\frac{1}{10}$ της παραγωγής του Β ήταν χαλασμένα κάστανα. Αφού πέταξαν τα χαλασμένα κάστανα, αποθήκευσαν την παραγωγή τους. Ένα μήνα μετά διαπίστωσαν ότι χάλασε επιπλέον το $\frac{1}{20}$ της αποθηκευμένης παραγωγής του καθενός, οπότε ξαναπέταξαν τα χαλασμένα κάστανα. Τα υπόλοιπα πουλήθηκαν σε έναν έμπορο με την ίδια τιμή πώλησης ανά κιλό και για τους δύο παραγωγούς. Αν ο παραγωγός Α εισέπραξε 11.172 €, να βρείτε:

α) Πόσα κιλά ήταν συνολικά τα χαλασμένα κάστανα.

β) Πόσα κιλά κάστανα πούλησε ο παραγωγός Α στον έμπορο.

γ) Πόσα χρήματα εισέπραξε ο παραγωγός Β.

(α->10 μονάδες, β->10 μονάδες, γ->5 μονάδες)

4. Ένας γυμναστής τοποθετεί τους μαθητές της τάξης του σε εξάδες και δεν περισσεύει κανείς. Αν τους τοποθετήσει σε τετράδες, τότε δημιουργούνται 5 τετράδες περισσότερες από τις εξάδες και πάλι δεν περισσεύει κανείς. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει η τάξη.

$$\text{Μαθητές} = \text{πολ}6 = \text{πολ} \cdot 4.$$

Ας υποθέσουμε ότι οι μαθητές τοποθετώνται 6ε x εξάδες, όπου x οι 6τιρές.

Τότε,

$$\left. \begin{aligned} \text{Μαθητές} &= 6 \cdot x \quad \text{και} \\ \text{Μαθητές} &= 4 \cdot (x + 5) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$6x = 4x + 20 \rightarrow 6x - 4x = 20 \rightarrow$$

$$2x = 20 \rightarrow x = 10 \text{ 6τιρές}$$

$$\text{Μαθητές} = 6 \cdot 10 \text{ ή } 4 \cdot 15 = 60.$$

5) Ο Α παύει 9.800 κ.

α) Ο Β παύει $\frac{6}{7} \cdot 9800 = 8.400$ κ.

$\frac{1}{5} \cdot 9800 = 1.960$ κ. χρέωση του Α

$\frac{1}{10} \cdot 8400 = 840$ κ. χρέωση του Β.

$9.800 - 1.960 = 7.840$ κ. έμεινε στον Α

$8.400 - 840 = 7.560$ κ. έμεινε στον Β

$\frac{1}{20} \cdot 7.840 = 392$ κ. επιπλέον χρέωση του Α

$\frac{1}{20} \cdot 7.560 = 378$ κ. επιπλέον χρέωση του Β.

Συνολικά χρέωση: $1.960 + 840 + 392 + 378 = 3.570$ κ.

β) $1.960 + 392 = 2.352$ κ. χρέωση συνολικά του Α.

$9.800 - 2.352 = 7.448$ κ. έμεινε στον Α
για να παύσει τον έμπορο.

γ) $11.172 : 7.448 = 1,5 \text{ €}$ το κιλό παύει
ο Α τον έμπορο, την ίδια στιγμή και ο Β.

$840 + 378 = 1.218$ κ. χρέωση συνολικά του Β

$8.400 - 1.218 = 7.182 \text{ κ.}$ έφταναν στον Β
για να παγώσει στον έφορο, από τον οποίο
είδεπράζε $1,5 \cdot 7.182 = 10.773 \text{ €}.$