



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
80^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΘΑΛΗΣ”
9 Νοεμβρίου 2019

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$10(\alpha^2 + \beta^2) = 29\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha + \beta = 7.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ και $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$.

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{3019}{3020}, \frac{3020}{3021}, \frac{3021}{3022}, \frac{4019}{4020}, \frac{4020}{4021}, \frac{4021}{4022},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο ώστε $A\hat{B}\Gamma = 2 \cdot B\hat{\Gamma}A$. Η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ έτσι ώστε $AB = \Delta\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$ τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E .

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Delta\Gamma E$ είναι ίσα.

(β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $B\hat{A}\Gamma$.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου αριθμού α για τις οποίες ο ρητός αριθμός

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)^3}{(\alpha - 1)^4}$$
 είναι ακέραιος.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες
Καλή επιτυχία!

Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες