Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Οι αριθμοί α, β είναι θετικοί και τέτοιοι ώστε

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\alpha\beta \qquad \textit{και} \qquad \alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta.$$

Να υπολογίσετε την τιμή των αθροισμάτων $\alpha + \beta$ και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$.

Λύση
Από τις ταυτότητες

$$\left(\alpha + \beta\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{ και } \alpha^3 + \beta^3 = \left(\alpha + \beta\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right)$$

και τις σχέσεις $\alpha^3 + \beta^3 = 90\alpha\beta$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 15\alpha\beta$ παίρνουμε ότι:

$$\left(\alpha + \beta\right)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right) = 90\alpha\beta \overset{\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta}{\Rightarrow} \left(\alpha + \beta\right)\left(16\alpha\beta - \alpha\beta\right) = 90\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \left(\alpha + \beta\right) \cdot 15\alpha\beta = 90\alpha\beta \overset{\alpha\beta\neq 0}{\Rightarrow} \alpha + \beta = 6.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2=16\alpha\beta \Rightarrow (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16\alpha\beta$$

$$\Rightarrow 18\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2 \Rightarrow \alpha\beta=\frac{(\alpha+\beta)^2}{18}=\frac{6^2}{18}=2,$$

οπότε θα είναι: $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{6}{2}=3$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{matrix}\right\}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Πρέπει $xy\neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{matrix} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy\cdot y^2=-8 \\ xy+y^2=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (2-y^2)\cdot y^2=-8 \\ xy=2-y^2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^4-2y^2-8=0 \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^2=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y^2=\dfrac{2\pm 6}{2} \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\} \overset{y^2\geq 0}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} y^2=4 \\ x=\dfrac{2-y^2}{y} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} y=2 \\ x=-1 \end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix} y=-2 \\ x=1 \end{matrix}\right\}.$$

2ος τρόπος

Πρέπει $xy\neq 0$, αφού διαφορετικά δεν μπορεί να αληθεύει το σύστημα, το οποίο γράφεται:

$$\left\{\begin{matrix} xy^3=-8 \\ (x+y)y=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy\cdot y^2=-8 \\ xy+y^2=2 \end{matrix}\right\}.$$

Αν θέσουμε: $xy=\varphi,\ y^2=\omega>0$, τότε με αγνώστους φ και ω προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} \varphi\omega=-8 \\ \varphi+\omega=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi\omega=-8 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi(2-\varphi)=-8 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi^2-2\varphi-8=0 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=\dfrac{2\pm\sqrt{36}}{2} \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=\dfrac{2\pm 6}{2} \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \varphi=4 \text{ ή } \varphi=-2 \\ \omega=2-\varphi \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} (\varphi,\omega)=(4,-2) \\ \text{ή} \\ (\varphi,\omega)=(-2,4) \end{matrix}\right\}.$$

Επειδή πρέπει $\omega=y^2>0,$ δεκτή είναι μόνο η λύση $(\varphi,\omega)=(-2,4)$, οπότε οι τιμές των x,y θα βρεθούν από το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} xy=-2 \\ y^2=4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-2 \\ y=2 \text{ ή } y=-2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x,y)=(-1,\,2) \text{ ή } (x,y)=(1,-2).$$

Πρόβλημα 3

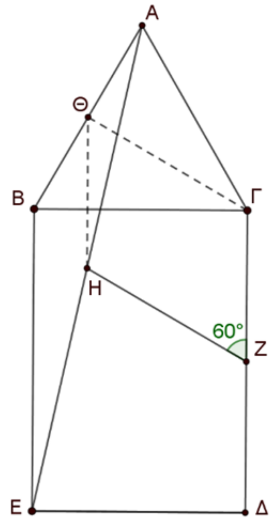
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η κορυφή Α κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΒΓΔΕ. Αν Η είναι το μέσο του ΑΕ και Ζ είναι το μέσο του ΓΔ, να αποδείξετε οι ευθείες ΑΒ και ΖΗ είναι κάθετες και να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $\Gamma\hat{Z}H$.

Λύση

Έστω Θ το μέσο της πλευράς ΑΒ. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΕ η ΘΗ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του, οπότε είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΕ και ίση με το μισό της, δηλαδή $\Theta\mathrm{H} = \dfrac{\mathrm{BE}}{2}$. Επειδή το τετράπλευρο ΒΓΔΕ είναι ορθογώνιο, έχει ίσες τις απέναντι πλευρές του, οπότε $\mathrm{BE} = \Gamma\Delta$. Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα ΘΗ και ΓΖ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε το τετράπλευρο ΓΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. Τότε θα είναι και $\mathrm{ZH} \parallel \Gamma\Theta$. Όμως η ΓΘ είναι κάθετη προς τη ΑΒ (ως διάμεσος του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι και ύψος), οπότε θα είναι και $\mathrm{ZH} \perp \mathrm{AB}$.

Επιπλέον οι γωνίες $\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma$ είναι οξείες και έχουν πλευρές ανά δύο κάθετες, οπότε είναι ίσες, δηλαδή

$\Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Gamma = 60^0$.



Σχήμα 4

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R} - \{3\}$ για τις οποίες οι λύσεις της εξίσωσης

$$(\lambda - 3)x^2 + (\lambda^2 + 1)x - (11\lambda - 18) = 0$$

είναι τα μήκη των δύο καθέτων πλευρών ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα μήκους $\sqrt{17}$.

Λύση

Αν β, γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης , τότε πρέπει:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 = 17. \qquad (1)$$

Με τον περιορισμό $\lambda \neq 3$, οι ρίζες της εξίσωσης ικανοποιούν τους τύπους Vieta:

$$\beta + \gamma = -\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda - 3}, \ \beta\gamma = -\frac{11\lambda - 18}{\lambda - 3} \qquad (2)$$

Επομένως η σχέση (1) γίνεται:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 17 \Leftrightarrow (\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma = 17 \Leftrightarrow \frac{(\lambda^2 + 1)^2}{(\lambda - 3)^2} + \frac{2(11\lambda - 18)}{\lambda - 3} - 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 + 2(11\lambda - 18)(\lambda - 3) - 17(\lambda - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^4 + 7\lambda^2 - 44 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{-7 + \sqrt{225}}{2} = 4 \text{(η άλλη ρίζα είναι αρνητική και απορρίπτεται)} \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Για $\lambda = 2$ η εξίσωση γίνεται: $-x^2 + 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$, ενώ για $\lambda = -2$ η εξίσωση γίνεται: $-5x^2 + 5x + 40 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 8 = 0$ με ρίζες ετερόσημες, οπότε δεν μπορεί η μία από αυτές να είναι το μήκος πλευράς τριγώνου. Επομένως η μόνη αποδεκτή τιμή για την παράμετρο λ είναι το 2.