Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right).$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\mathrm{A}=\left(\left(\frac{(-32)^9}{4^9}+\frac{(-16)^9}{(-2)^9}\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-10}+100\right)$$

$$=\left(\left(\left(\frac{-32}{4}\right)^9+\left(\frac{-16}{-2}\right)^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left(\left(\frac{-10}{2}\right)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left((-8)^9+(+8)^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot\left((-5)^{10}-(-5)^{10}+100\right)$$

$$=\left(\left(-8^9+8^9\right)\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot(0+100)=\left(0\cdot(-2019)^2+20\right)\cdot(+100)=20\cdot100=2000.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα τηλεοπτικό παιγνίδι ο Γιώργος πριν την τελική φάση του παιγνιδιού έχει κερδίσει 600 ευρώ. Στην τελική φάση πρέπει να απαντήσει σε 12 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση κερδίζει 80 ευρώ, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 40 ευρώ.

Αν ο Γιώργος κέρδισε τελικά 1320 ευρώ, να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά.

Λύση

Έστω ότι ο Γιώργος απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις. Τότε δεν απάντησε σωστά σε $12-x$ ερωτήσεις, οπότε το τελικό κέρδος του, έστω Κ, θα είναι:

$$\mathrm{K}=600+80x-40(12-x)\Leftrightarrow \mathrm{K}=600+80x-480+40x\Leftrightarrow \mathrm{K}=120+120x.$$

Επομένως, για την εύρεση του x πρέπει να λύσουμε την εξίσωση:

$$120+120x=1320\Leftrightarrow 120x=1320-120\Leftrightarrow 120x=1200\Leftrightarrow x=10.$$

Πρόβλημα 3

(α) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{2020}{2019},\frac{2021}{2020},\frac{2022}{2021},\frac{3020}{3019},\frac{3021}{3020},\frac{3022}{3021},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

(β) Να προσδιορίσετε το μεγαλύτερο και το μικρότερο από τα κλάσματα:

$$\frac{4020}{4021},\frac{4021}{4022},\frac{4022}{4023},\frac{5020}{5021},\frac{5021}{5022},\frac{5022}{5023},$$

χωρίς να τα μετατρέψετε σε δεκαδικό αριθμό.

Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και στα δύο ερωτήματα.

Λύση.

(α) Το κοινό χαρακτηριστικό των έξι κλασμάτων είναι το ότι ο αριθμητής τους είναι μεγαλύτερος από τον παρονομαστή τους κατά 1. Όλα είναι της μορφής $\frac{\nu+1}{\nu}=1+\frac{1}{\nu}$, οπότε σε σύγκριση δύο τέτοιων κλασμάτων $\frac{\mu+1}{\mu},\frac{\nu+1}{\nu}$ έχουμε:

$$\frac{\mu+1}{\mu}>\frac{\nu+1}{\nu}\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\mu}>1+\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow\frac{1}{\mu}>\frac{1}{\nu}\Leftrightarrow\mu<\nu.$$

Επομένως μεγαλύτερο από τα δεδομένα κλάσματα είναι το κλάσμα που έχει το μικρότερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο παρονομαστή, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

2^{ος} τρόπος

Παρατηρούμε ότι τα κλάσματα γράφονται ως:

$$\frac{2020}{2019}=1+\frac{1}{2019}=1\frac{1}{2019}$$
$$\frac{2021}{2020}=1+\frac{1}{2020}=1\frac{1}{2020}$$
$$\vdots$$
$$\frac{3022}{3021}=1+\frac{1}{3021}=1\frac{1}{3021}$$

Όμως $\frac{1}{2019}>\frac{1}{2020}>\cdots>\frac{1}{3021}$, οπότε μεγαλύτερο κλάσμα το πρώτο, δηλαδή το $\frac{2020}{2019}$, και μικρότερο το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{3022}{3021}$.

(β) Παρατηρούμε ότι τα αντίστροφα των δεδομένων κλασμάτων

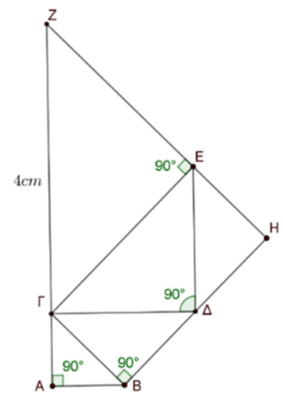
$$\frac{4021}{4020},\frac{4022}{4021},\frac{4023}{4022},\frac{5021}{5020},\frac{5022}{5021},\frac{5023}{5022},$$

είναι της ιδίας μορφής με αυτά του ερωτήματος (α). Σύμφωνα με το ερώτημα (α) συμπεραίνουμε ότι μεγαλύτερο κλάσμα είναι το πρώτο και μικρότερο το τελευταίο. Επομένως, για τα αντίστροφα τους το συμπέρασμα είναι ότι μεγαλύτερο είναι το τελευταίο, δηλαδή το $\frac{5023}{5022}$, και μικρότερο το πρώτο, δηλαδή το $\frac{4021}{4020}$.

Πρόβλημα 4

Στο διπλανό σχήμα οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma, \Delta\hat{B}\Gamma, E\hat{\Delta}\Gamma$ και $Z\hat{E}\Gamma$ είναι ορθές. Δίνεται ακόμη ότι: $AB = A\Gamma$, $B\Gamma = B\Delta$, $\Delta\Gamma = \Delta E$, $E\Gamma = EZ$ και $\Gamma Z = 4\ cm$.

Στο σημείο Η τέμνονται οι ευθείες ΒΔ και ΖΕ.



(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΑΒ.
(β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.
(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΒΓΕΗ.

Λύση

(α) Αν $AB = A\Gamma = x$, τότε από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$B\Gamma^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow B\Gamma = x\sqrt{2} = B\Delta.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΒΔ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma\Delta^2 = \left(x\sqrt{2}\right)^2 + \left(x\sqrt{2}\right)^2 = 4x^2 \Rightarrow \Gamma\Delta = 2x = \Delta E.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΔΕ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma E^2 = (2x)^2 + (2x)^2 = 8x^2 \Rightarrow \Gamma E = 2\sqrt{2}x = EZ.$$

Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΓΕΖ με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε ότι:

$$\Gamma Z^2 = \left(2\sqrt{2}x\right)^2 + \left(2\sqrt{2}x\right)^2 = 16x^2 \Rightarrow \Gamma Z = 4x,$$

οπότε $\Gamma Z = 4x = 4 \Rightarrow x = 1\ cm.$

(β) Επειδή τα τρίγωνα $BA\Gamma, \Delta B\Gamma, E\Delta\Gamma$ και $ZE\Gamma$ είναι ορθογώνια ισοσκελή οι οξείες γωνίες τους είναι ίσες με $\frac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$. Επομένως, έχουμε:

$$A\hat{\Gamma}Z = A\hat{\Gamma}B + B\hat{\Gamma}\Delta + \Delta\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}Z = 4\cdot 45^0 = 180^0,$$

οπότε τα σημεία Α, Γ και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(γ) Το τετράπλευρο ΒΓΕΗ έχει τρεις γωνίες του ορθές, αφού $\Gamma\hat{B}\Delta = 90^0$, $B\hat{\Gamma}E = B\hat{\Gamma}\Delta + \Gamma\hat{\Delta}E = 45^0 + 45^0 = 90^0$ και $\Gamma\hat{E}H = 180^0 - \Gamma\hat{E}Z = 180^0 - 90^0 = 90^0$. Επομένως και η τέταρτη γωνία του θα είναι ορθή, οπότε αυτό είναι ορθογώνιο και έχει εμβαδό

$$E_{(B\Gamma EH)} = B\Gamma\cdot\Gamma E = \sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 4\ cm^2.$$