Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να αποδείξετε ότι ο ακέραιος αριθμός $A = 81^{3^n} + 4^{2n+1}$ είναι σύνθετος για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n.

Λύση

Ο αριθμός A γράφεται: $A = (3^4)^{3^n} + (2^2)^{2n+1} = (3^{3^n})^4 + (2^n)^4 2^2 =$

$$= (3^{3^n})^4 + 4(2^n)^4.$$

Θέτουμε $x = 3^{3^n}$ και $y = 2^n$ οπότε:

$$A = x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy) =$$
$$= ((x+y)^2 + y^2)((x-y)^2 + y^2) .$$

Επειδή οι αριθμοί $(x+y)^2 + y^2$ και $(x-y)^2 + y^2$ είναι ακέραιοι μεγαλύτεροι του 1, ο A είναι σύνθετος.

2ος τρόπος: Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού A είναι 5, άρα ο αριθμός διαιρείται με το 5 και επειδή A>5, έπεται ο A είναι σύνθετος.

Πράγματι, γράφοντας $A = (3^4)^{3^n} + (4)^{2n+1}$, αρκεί να δούμε το τελευταίο ψηφίο του πρώτου προσθετέου και του δεύτερου.

Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 3:

$$3^1 \ \textit{λήγει σε}\ 3,\ 3^2 \ \textit{λήγει σε}\ 9,\ 3^3 \ \textit{λήγει σε}\ 7,\ 3^4 \ \textit{λήγει σε}\ 1, \textit{κ.ο.κ}$$

Ο εκθέτης που έχουμε είναι πολλαπλάσιο του 4, άρα ο $(3^4)^{3^n}$ λήγει σε 1.

Υπολογίζουμε το τελευταίο ψηφίο των δυνάμεων του 4:

$$4^1 \ \textit{λήγει σε}\ 4,\ 4^2 \ \textit{λήγει σε}\ 6,\ 4^3 \ \textit{λήγει σε}\ 4,\ 4^4 \ \textit{λήγει σε}\ 6,\ \textit{κ.ο.κ}$$

Ο εκθέτης που έχουμε είναι περιττός, άρα ο $(4)^{2n+1}$ λήγει σε 4.

Προσθέτοντας έχουμε ότι ο A λήγει σε 5, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)

Ο Ανδρέας προσθέτει όλους τους θετικούς ακέραιους από το 1 μέχρι και το 2019. Ο Βασίλης προσθέτει τα τετράγωνα όλων των θετικών ακέραιων από το 1 μέχρι και το 2019. Η Γεωργία προσθέτει τα τριπλάσια των αριθμών που βρήκαν ο Ανδρέας και ο Βασίλης και στο άθροισμα που βρίσκει προσθέτει τον αριθμό 2020. Να βρείτε τον αριθμό που θα βρει η Γεωργία.

Λύση

Ο Ανδρέας θα βρει τον αριθμό $\mathrm{A} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2019$, ενώ ο Βασίλης θα βρει τον αριθμό $\mathrm{B} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 2019^2$. Η Γεωργία πρέπει να υπολογίσει τον αριθμό:

$$\Gamma = 3\mathrm{A} + 3\mathrm{B} + 2020 = 3(1+2+3+\ldots+2019) + 3(1^2+2^2+3^2+\ldots+2019^2) + 2020$$
$$= (3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1) + (3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1) + (3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1) + \ldots + (3\cdot 2019^2 + 3\cdot 2019 + 1) + 1$$
$$= (1+1)^3 - 1^3 + (2+1)^3 - 2^3 + (3+1)^3 - 3^3 + \ldots + (2019+1)^3 - 2019^3 + 1$$
$$= 2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \ldots + 2020^3 - 2019^3 + 1 = -1 + 2020^3 + 1 = 2020^3.$$

Σημείωση: Κάποιος μπορεί να χρησιμοποιήσει για με n = 2019 τους τύπους

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$) με $\hat{A} = 30°$ και έστω M, N τα μέσα των πλευρών του $ΒΓ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΑΓΜ$ ($C_{ΑΓΜ}$) τέμνει τη πλευρά $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το σημείο N προς την πλευρά $ΑΒ$ και η κάθετη από σημείο $Γ$ προς την $ΔΝ$ τέμνονται σε σημείο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΔΝ$. (Σημείωση: Για ένα τρίγωνο XYZ, ο περιγεγραμμένος κύκλος είναι ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του X, Y, Z. Αν O είναι το κέντρο αυτού του κύκλου, τότε OX=OY=OZ)

Λύση
Το M είναι μέσο της βάσης $ΒΓ$ του ισοσκελούς τριγώνου $ΑΒΓ$, άρα η γωνία $\angle ΑΜΓ$ είναι ορθή (διότι η $ΑΜ$ είναι διάμεσος, μεσοκάθετος και διχοτόμος), οπότε κέντρο του κύκλου $C_{ΑΓΜ}$ είναι το μέσο N της πλευράς $ΑΓ$. Άρα θα ισχύουν οι ισότητες:

$$ΝΑ = ΝΓ = ΝΔ = \frac{ΑΓ}{2} = ρ \qquad (1)$$

Έστω ότι η κάθετη από το N προς την $ΑΒ$ (που είναι μεσοκάθετος της $ΑΔ$) τέμνει τον κύκλο $C_{ΑΓΜ}$ στο σημείο E και θα ισχύει ότι

$$ΝΑ = ΝΕ = ΝΔ = ρ. \qquad (2)$$

Επειδή

$$\hat{N}_2 = Ε\hat{Ν}Α = 90° - \hat{A} = 90° - \hat{A} = 30° = 60°$$

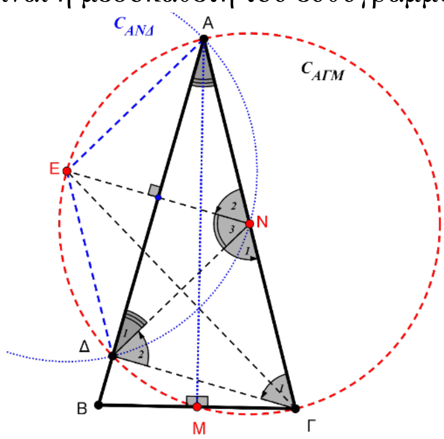
και $ΝΑ = ΝΕ = ρ$ συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΑΝΕ$ είναι ισόπλευρο, οπότε:

$$ΝΑ = ΝΕ = ΕΑ = ρ \qquad (3).$$

Επιπλέον, το σημείο E είναι το μέσο του τόξου $ΑΔ$ και θα ισχύει ότι:

$$ΕΑ = ΕΔ = ρ. \qquad (4)$$

Επειδή από τις προηγούμενες ισότητες $ΕΔ = ΝΕ = ΕΑ = ρ$, το σημείο E είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $ΑΔΝ$.
Επίσης, επειδή $ΝΑ = ΝΕ = ΕΑ = ρ$, το τρίγωνο $ΔΕΝ$ είναι ισόπλευρο και επίσης το τρίγωνο $ΔΓΝ$ είναι ισόπλευρο, αφού $ΝΔ = ΝΓ = ρ$ και $Δ\hat{Ν}Γ = 2\hat{A} = 2 \cdot 30° = 60°$.
Επομένως, η ευθεία $ΓΕ$ είναι η μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος $ΝΔ$.



Σχήμα 1