Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να λύσετε το σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)(x-3y)+2=6(x-3y) \end{array}\right\}$$

Λύση
Για $x \neq 3y$ διαιρούμε τα μέλη της εξίσωσης (2) με $(x-3y)$ οπότε το σύστημα γράφεται ισοδύναμα:

$$\left.\begin{array}{c} 5x-2y+\dfrac{3}{2x-6y}=\dfrac{13}{2} \\ (5x-2y)+\dfrac{2}{x-3y}=6 \end{array}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα, όπου $5x-2y=\alpha$ και $\dfrac{1}{x-3y}=\beta$,

το τελευταίο σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha+\dfrac{3\beta}{2}=\dfrac{13}{2} \\ \alpha+2\beta=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2\alpha+3\beta=13 \\ \alpha+2\beta=6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \alpha=8 \\ \beta=-1 \end{array}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{c} 5x-2y=8 \\ \dfrac{1}{x-3y}=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 5x-2y=8 \\ x-3y=-1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x=2 \\ y=1 \end{array}.$$

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε τους τριψήφιους ακέραιους $N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta, 0<\alpha<\beta$,
που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)$, στο οποίο αθροίζουμε όλους τους ακεραίους από τον α μέχρι και τον $\beta+1$.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N=\overline{\alpha 1\beta}=100\alpha+10+\beta=8[\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)] \leq 8(1+2+\ldots+10)=440,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 4$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha=4$. Τότε $415 \leq N \leq 419$, Nπολλαπλάσιο του 8 $\Rightarrow \mathrm{N}=416$. Παρατηρούμε όμως ότι
  $\alpha+(\alpha+1)+\cdots+\beta+(\beta+1)=4+5+6+7=22$ και $22 \cdot 8=176 \neq 416$.

- $\alpha = 3.$ Τότε $314 \leq N \leq 319, N$ πολλαπλάσιο του 8, άτοπο.
- $\alpha = 2.$ Τότε $213 \leq N \leq 219, N$ πολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N} = 216$.
  Παρατηρούμε ότι:
  $\alpha + (\alpha+1) + \cdots + \beta + (\beta+1) = 2+3+4+5+6+7 = 27$και $27 \cdot 8 = 216$.
- $\alpha = 1.$ Τότε $112 \leq N \leq 119, N$ πολλαπλάσιο του $8 \Rightarrow \mathrm{N} = 112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha + (\alpha+1) + \cdots + \beta + (\beta+1) = 1+2+3 = 6$ και $6 \cdot 8 = 48 \neq 112$.

Επομένως η μοναδική λύση του προβλήματος είναι ο αριθμός $\mathrm{N} = 216$.

2ος τρόπος: Επειδή ο αριθμός διαιρείται με το 8, θα διαιρείται και με το 4, οπότε το τελευταίο διψήφιο τμήμα του θα διαιρείται με το 4. Επομένως ο αριθμός $\overline{1\beta}$ θα διαιρείται με το 4. Συνεπώς $\beta = 2$ ή $\beta = 6$.

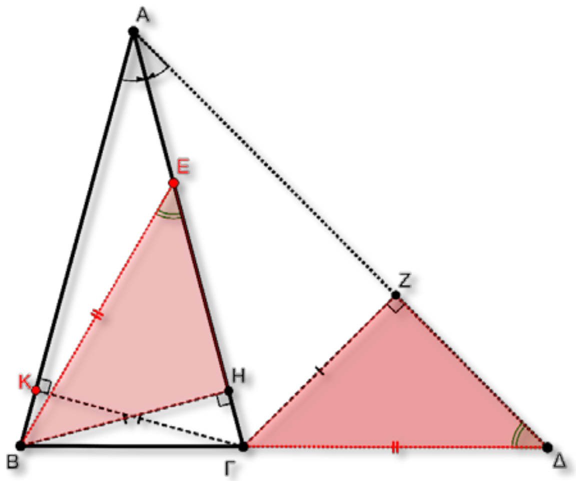
- Αν $\beta = 2$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$, παίρνουμε ότι $\alpha = 1$, οπότε $\mathrm{N} = 112$.
  Παρατηρούμε όμως ότι:
  $\alpha + (\alpha+1) + \cdots + \beta + (\beta+1) = 1+2+3 = 6$ και $6 \cdot 8 = 48 \neq 112$.
- Αν $\beta = 6$, τότε από τη σχέση $\alpha < \beta$ παίρνουμε $\alpha \in \{1,2,3,4,5\}$. Όμως $N = 100\alpha + 16$, άρα για να διαιρείται με το 8, πρέπει α άρτιος. Επομένως, $\alpha = 2$ ή $\alpha = 4$. Για $\alpha = 2$, παίρνουμε $N = 216$, που ικανοποιεί, ενώ για $\alpha = 4$, παίρνουμε $N = 416$, που δεν ικανοποιεί.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ προς το μέρος του Γ παίρνουμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$. Πάνω στην ευθεία ΑΓ παίρνουμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma = \Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{A}$.

Λύση

Από το σημείο Β θεωρούμε ΒΗ κάθετη στην ΑΓ , από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΚ κάθετη στην ΑΒ και από το σημείο Γ θεωρούμε ΓΖ κάθετη στην ΑΔ.



Εφόσον $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Delta$ και κατά συνέπεια:

$$\Gamma\mathrm{Z} = \Gamma\mathrm{K} \qquad (1).$$

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, άρα τα τμήματα ΓΚ και ΒΗ είναι ίσα μεταξύ τους (διότι είναι τα ύψη του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του). Άρα:

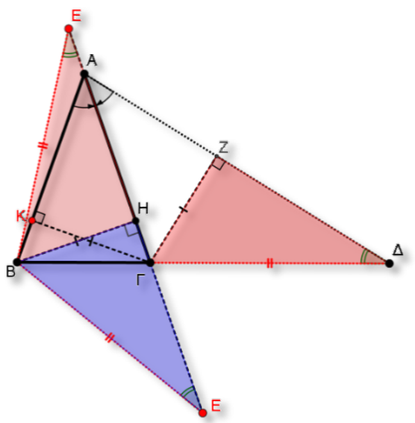
$$\mathrm{BH} = \mathrm{\Gamma K} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\mathrm{BH} = \mathrm{\Gamma Z} \qquad (3)$.

Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΖΔΓ, ισχύουν οι ισότητες πλευρών: $\mathrm{BE} = \mathrm{\Gamma\Delta}$ (δεδομένο) και $\mathrm{BH} = \mathrm{\Gamma Z}$ (από την ισότητα (3)). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε:

$$\mathrm{B\hat{E}H} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}Z} \Leftrightarrow \mathrm{B\hat{E}\Gamma} = \mathrm{\Gamma\hat{\Delta}A}.$$

Παρατήρηση

Το σημείο E θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός του τμήματος $A\Gamma$ (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) … και στις δύο περιπτώσεις ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία (συγκρίνοντας τα κατάλληλα σκιασμένα ορθογώνια τρίγωνα)	

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)
Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Λύση

Προσθέτοντας τις τρείς σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(2x^3 - 7y^2 + 4z + 4) + (2y^3 - 7z^2 + 4x + 4) + (2z^3 - 7x^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 - 7x^2 + 4x + 4) + (2y^3 - 7y^2 + 4y + 4) + (2z^3 - 7z^2 + 4z + 4) = 0.$$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση της πρώτης παρένθεσης:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x + 4 =$$

$$= 2x^2(x-2) - 2x^2 + 4x - x^2 + 4 =$$

$$= 2x^2(x-2) - 2x(x-2) - (x-2)(x+2) =$$

$$= (x-2)(2x^2 - 3x - 2) = (x-2)^2(2x+1).$$

Με όμοιο τρόπο παραγοντοποιούμε και τις άλλες παρενθέσεις, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται: