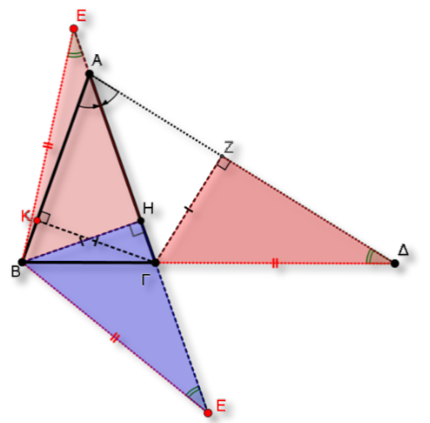
$$\mathrm{BH} = \Gamma\mathrm{K} \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε: $\mathrm{BH} = \Gamma\mathrm{Z} \qquad (3)$.

Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΗ και ΖΔΓ, ισχύουν οι ισότητες πλευρών: $\mathrm{BE} = \Gamma\Delta$ (δεδομένο) και $\mathrm{BH} = \Gamma\mathrm{Z}$ (από την ισότητα (3)). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{H} = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{Z} \Leftrightarrow \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}.$$

Παρατήρηση

Το σημείο E θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός του τμήματος $A\Gamma$ (όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα) … και στις δύο περιπτώσεις ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία (συγκρίνοντας τα κατάλληλα σκιασμένα ορθογώνια τρίγωνα)	

B΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 (μονάδες 6)

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) θετικών πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος:

$$2x^3 - 7y^2 + 4z = -4$$

$$2y^3 - 7z^2 + 4x = -4$$

$$2z^3 - 7x^2 + 4y = -4$$

Λύση

Προσθέτοντας τις τρείς σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$(2x^3 - 7y^2 + 4z + 4) + (2y^3 - 7z^2 + 4x + 4) + (2z^3 - 7x^2 + 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 - 7x^2 + 4x + 4) + (2y^3 - 7y^2 + 4y + 4) + (2z^3 - 7z^2 + 4z + 4) = 0.$$

Παραγοντοποιούμε την παράσταση της πρώτης παρένθεσης:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x + 4 = 2x^3 - 4x^2 - 3x^2 + 4x + 4 =$$

$$= 2x^2(x-2) - 2x^2 + 4x - x^2 + 4 =$$

$$= 2x^2(x-2) - 2x(x-2) - (x-2)(x+2) =$$

$$= (x-2)(2x^2 - 3x - 2) = (x-2)^2(2x+1).$$

Με όμοιο τρόπο παραγοντοποιούμε και τις άλλες παρενθέσεις, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$(x-2)^2(2x+1)+(y-2)^2(2y+1)+(z-2)^2(2z+1)=0.$$

Επειδή όμως $x, y, z > 0$, θα πρέπει $x=y=z=2$, οπότε $(x, y, z)=(2,2,2)$.

Παρατήρηση

Η παραγοντοποίηση των παρενθέσεων μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια του σχήματος Horner (αναζητώντας λύσεις μεταξύ των διαιρετών του 4).

2ος τρόπος: Μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ο x είναι ο μικρότερος από τους τρεις αριθμούς. Επομένως, $x \leq y$ και $x \leq z$. Επομένως, η τρίτη εξίσωση δίνει

$$2x^3-7x^2+4x \leq 2z^3-7x^2+4y=-4 \quad (1)$$

Όπως και στον 1ο τρόπο, έχουμε ότι $2x^3-7x^2+4x+4=(x-2)^2(2x+1)$, επομένως η (1) δίνει ότι $(x-2)^2(2x+1) \leq 0$ (2).
Πρέπει λοιπόν να ισχύει η ισότητα στη (2), άρα και στην (1), επομένως, $x=y=z=2$.

Πρόβλημα 2 (μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε όλους τους τετραψήφιους ακέραιους

$$N=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta, 0<\alpha<\gamma,$$

που είναι ίσοι με το οκταπλάσιο του αθροίσματος

$$(\alpha-1)^2+\alpha^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2,$$

στο οποίο αθροίζουμε όλα τα τετράγωνα των μη αρνητικών ακεραίων από τον $\alpha-1$ μέχρι και τον $\gamma+1$.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση έχουμε

$$N=\overline{\alpha\beta\gamma\delta}=1000\alpha+100\beta+10\gamma+\delta=8[(\alpha-1)^2+\alpha^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2]$$
$$\leq 8(0^2+1^2+2^2+\ldots+10^2)=3080,$$

από την οποία προκύπτει ότι: $\alpha \leq 3$. Επομένως έχουμε τις περιπτώσεις:
Αν $\alpha=3$, και $\gamma \leq 8$ έχουμε

$$8[2^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2] \leq 8[2^2+\cdots+8^2+9^2]<3000, \text{ αδύνατο.}$$

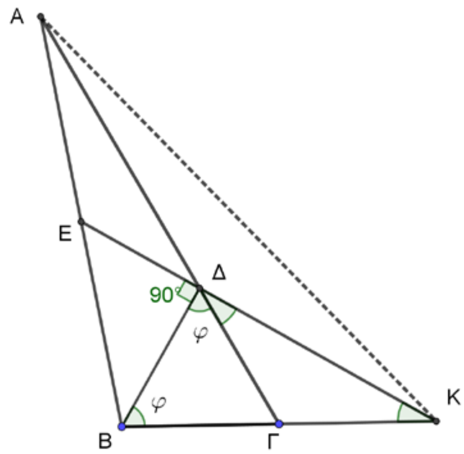
Άρα πρέπει $\gamma=9$.
Για $\gamma=9$, δεν έχουμε επίσης λύση γιατί

$$8(2^2+\cdots+8^2+9^2+10^2)=3072, \text{ άτοπο.}$$

Αν $\alpha=2$, τότε αν $\gamma \leq 7$ έχουμε: $8[1^2+\cdots+\gamma^2+(\gamma+1)^2] \leq 8[1^2+\cdots+8^2]<2000$, αδύνατο. Άρα $\gamma=8$ ή $\gamma=9$.
Για $\gamma=8$ έχουμε $8[1^2+\cdots+8^2+9^2]=2280$, δεκτή.
Για $\gamma=9$ έχουμε $8[1^2+\cdots+8^2+9^2+10^2]>3000$, αδύνατο.
Αν $\alpha=1$, τότε έχουμε ότι για $\gamma \geq 8$ ο αριθμός είναι μεγαλύτερος από $8[1^2+\cdots+8^2+9^2]=2280$, αδύνατο.
Επίσης για $\gamma \leq 5$ έχουμε ότι ο αριθμός είναι μικρότερος από $8[1^2+\cdots+6^2]=728$, άτοπο. Επομένως $\gamma=6$ ή $\gamma=7$. Όμως και οι δύο περιπτώσεις δεν οδηγούν σε λύση,

αφού για $\gamma = 6$ ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 7^2] = 1120$, αδύνατο. Τέλος για $\gamma = 7$ έχουμε ότι ο αριθμός θα έπρεπε να είναι ίσος με $8[1^2 + \cdots + 8^2] = 1632$, επίσης αδύνατο.
Επομένως, μοναδική λύση είναι ο αριθμός 2280.

Πρόβλημα 3 (μονάδες 7)
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A\Gamma > \text{Β}\Gamma$. Παίρνουμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\text{Β}$. Αν η κάθετη στο σημείο Δ προς την ευθεία ΔΒ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο μέσο της, να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3 \cdot \text{Β}\Gamma$.
Λύση
Έστω Ε το μέσον της ΑΒ. Έστω ότι η κάθετη ευθεία προς την ευθεία ΔΒ στο σημείο Δ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Κ. Επειδή είναι $\Gamma\text{Β} = \Gamma\Delta$, έπεται ότι $\Delta\widehat{\text{Β}}\Gamma = \text{Β}\widehat{\Delta}\Gamma = \varphi$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΔΚ έχουμε ότι $\Gamma\widehat{\Delta}\text{Κ} = \Gamma\widehat{\text{Κ}}\Delta = 90^0 - \varphi$. Επομένως. το τρίγωνο ΓΔΚ είναι ισοσκελές με συνέπεια $\Gamma\text{Κ} = \Gamma\Delta = \Gamma\text{Β}$, δηλαδή το Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΒΚ και η ευθεία ΑΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΚ



Επειδή η ευθεία ΚΔ περνάει από το μέσο της πλευράς ΑΒ, έπεται ότι το σημείο Δ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ΑΒΚ. Επομένως έχουμε $\text{Α}\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$ και

$$\text{Α}\Gamma = \text{Α}\Delta + \Delta\Gamma = 2 \cdot \Delta\Gamma + \Delta\Gamma = 3 \cdot \Delta\Gamma = 3 \cdot \text{Β}\Gamma.$$

2ος τρόπος: Ονομάζουμε Μ το μέσον της ΑΒ. Θεωρούμε τα μέσα Ν, Ρ των τμημάτων ΑΔ και ΔΒ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ΝΔ=ΔΓ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ, η ΜΝ ενώνει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα

$$\text{ΜΝ}//= \frac{\Delta\text{Β}}{2} = \Delta\text{Ρ}\ (1)$$

Από την παραλληλία προκύπτει ότι $\Delta\text{Μ} \perp \text{ΜΝ}$ και $\angle \text{ΜΝ}\Delta = \angle \text{Β}\Delta\Gamma$ (2).
Από τις (1), (2) έπεται ότι τα τρίγωνα ΜΝΔ και ΓΔΡ είναι ίσα, άρα ΓΔ=ΔΝ, που είναι το ζητούμενο.