Λύσεις Θεμάτων Α' Λυκείου

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \quad \frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=1.$$

Λύση

1ος τρόπος

Έχουμε $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}=1$

Πρέπει να είναι $x, y \neq 0$

Κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών έχουμε

$x+y=xy, x^3+y^3=(xy)^2$

Επειδή είναι $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$

παίρνουμε $(xy)^2=xy(x^2+y^2-xy)$.

Αφού $xy \neq 0$ δίνει $xy=x^2+y^2-xy$ δηλαδή $0=x^2+y^2-2xy$

Η τελευταία είναι $0=(x-y)^2$

Αρα $x=y$ οπότε από την πρώτη παίρνουμε $x=y=2$

2ος τρόπος

Το σύστημα μπορούμε να το γράψουμε

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1, \frac{x}{y}\frac{1}{y}+\frac{y}{x}\frac{1}{x}=1$

Θέτουμε $X=\frac{1}{x}, \mathrm{Y}=\frac{1}{y}, a=\frac{x}{y}$

Θα είναι $X+Y=1, a\mathrm{Y}+\frac{1}{a}X=1$

Αρα $aX + aY = a, a\mathrm{Y} + \frac{1}{a}X = 1$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι $(a - \frac{1}{a})X = a - 1$

Δηλαδή $\frac{a^2 - 1}{a}X = a - 1$

Αν $a = 1$ τότε $x = y = 2$

Αν $a \neq 1$ τότε από την $\frac{(a-1)(\alpha+1)}{a}X = a - 1$

παίρνουμε δηλαδή $X = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ (1)

Αλλά είναι $a = \frac{x}{y}$ και $X = \frac{1}{x}$

Ετσι η (1) δίνει διαδοχικά $\frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y} + 1}$, $\frac{1}{x} = \frac{x}{y(\frac{x+y}{y})}$ $, x^2 = x + y$

Επειδή $x + y = xy$

η τελευταία δίνει $x^2 = xy$.

Επειδή είναι $x \neq 0$ παίρνουμε πάλι $x = y$

Άρα $a = 1$ το οποίο είναι ΑΤΟΠΟ αφού έχουμε υποθέσει ότι $a \neq 1$.

Τελικά είναι $a = 1$ και $x = y = 2$

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

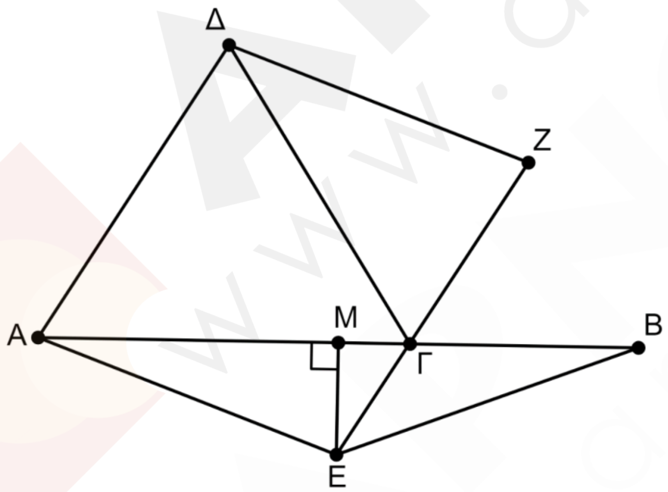
Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Γ στο εσωτερικό του, έτσι ώστε $ΑΓ > ΑΒ/2$. Σε διαφορετικά ημιεπίπεδα ως προς την ευθεία ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε έτσι ώστε τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ να είναι ισοσκελή με $ΔΑ = ΔΓ > ΕΑ = ΕΒ$ και $ΔΑ \parallel ΕΓ$. Η παράλληλη από το σημείο Δ προς την ευθεία ΕΑ τέμνει την ευθεία ΕΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

(α) $ΓΔ = ΕΖ$ και $ΔΖ = ΒΕ$

(β) $ΒΖ \parallel ΔΓ$.

Λύση

α)



Είναι $ΔΖ//ΕΑ$ και $ΕΖ//ΑΔ$.

Αρα το $ΑΕΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

Εχουμε λοιπόν ότι $ΕΖ = ΑΔ$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΔΓ$ είναι $ΔΑ = ΔΓ$

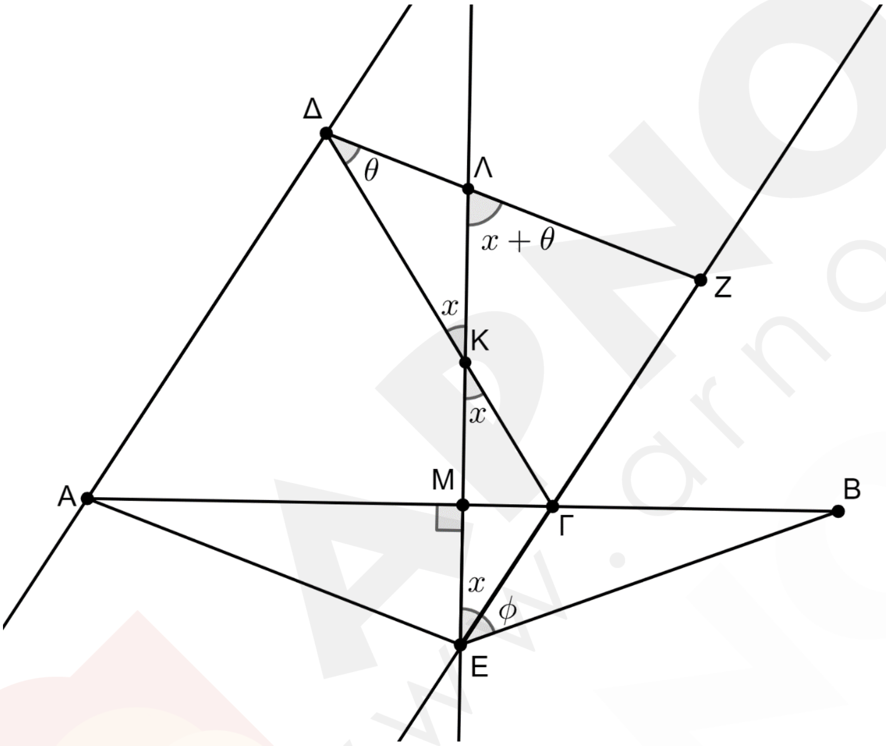
Αρα $ΕΖ = ΓΔ$

Είναι από το παραλληλόγραμμο $ΑΕΖΔ$ $ΔΖ = ΑΕ$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΕΒ$ είναι $ΑΕ = ΕΒ$

Αρα $ΔΖ = ΒΕ$

β)



Θα είναι $ZB//\Delta\Gamma$ αν $\angle BZE = \angle Z\Gamma\Delta$

Η τελευταία θα ισχύει αν τα τρίγωνα $\Gamma\Delta Z, ZBE$ είναι ίσα .

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτά τα τρίγωνα είναι ίσα.

Η ME είναι μεσοκάθετος.

Εστω ότι τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο K και την ΔZ στο Λ .

(αυτό συμβαίνει γιατί το M βρίσκεται μεταξύ A, Γ)

Εχουμε από το πρώτο ερώτημα ότι $\Delta\Gamma = EZ, \Delta Z = BE$

Θα έχουμε την ισότητα των τριγώνων από το Π-Γ-Π κριτήριο αν δείξουμε ότι

$\hat{\theta}=\hat{\varphi}$ των γωνιών του σχήματος.

Η $\Gamma\mathrm{A}$ είναι διχοτόμος της $\angle \mathrm{E}\Gamma\Delta$ γωνίας γιατί λόγω παραλληλίας και ισοσκελούς τριγώνου έχουμε $\angle \mathrm{E}\Gamma\mathrm{A}=\angle \Gamma\mathrm{A}\Delta=\angle \Delta\Gamma\mathrm{A}$

Ετσι το τρίγωνο $\mathrm{E}\Gamma\mathrm{K}$ είναι ισοσκελές.

Αρα στο σχήμα έχουμε την γωνία x.

Επειδή η εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών έχουμε $\angle \mathrm{E}\Lambda\mathrm{Z}=\hat{\theta}+\hat{x}$ (1)

Λόγω παραλληλίας είναι $\angle \mathrm{E}\Lambda\mathrm{Z}=\angle \mathrm{AE}\Lambda$ (2)

Επειδή το τρίγωνο AEB είναι ισοσκελές θα είναι

$\angle \mathrm{AE}\Lambda=\angle \mathrm{MEB}=\hat{\varphi}+\hat{x}$ (3)

Από (1),(2),(3) παίρνουμε $\hat{\theta}+\hat{x}=\hat{\varphi}+\hat{x}$ που δίνει $\hat{\theta}=\hat{\varphi}$ που θέλαμε να αποδείξουμε.

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)

Έστω $n > 2$ ένας περιττός ακέραιος. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος από την τετραγωνική ρίζα του $n + 2$. Να αποδείξετε ότι, αν ο αριθμός $\frac{n}{k}$ είναι ακέραιος, τότε ο n είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

Θα έχουμε ότι $\sqrt{n+2}-1 \le k$.

(σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \alpha+1)$ υπάρχει ακέραιος)

Αρα θα είναι $\sqrt{n+2}-1 \le k < \sqrt{n+2}$

Παίρνουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{k} \le \frac{1}{\sqrt{n+2}-1}$

Ο αριθμός $m = \frac{n}{k}$ είναι φυσικός.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ανισότητα έχουμε

$$\frac{n}{\sqrt{n+2}} < m \le \frac{n}{\sqrt{n+2}-1}$$

Αλλά είναι $\frac{n}{\sqrt{n+2}-1} < \sqrt{n+2}+1, \sqrt{n+2}-1 < \frac{n}{\sqrt{n+2}}$

οπότε $\sqrt{n+2}-1 < m < \sqrt{n+2}+1$

Στο ανοικτό διάστημα $(\sqrt{n+2}-1, \sqrt{n+2}+1)$ που έχει μήκος 2 βρίσκονται οι k, m.

Σε αυτό το διάστημα βρίσκονται το πολύ 2 φυσικοί.

Αν οι k, m είναι διαφορετικοί τότε θα είναι διαδοχικοί φυσικοί.

Αρα ο ένας θα είναι άρτιος. Αρα και ο $n = km$ θα είναι άρτιος ,που αντιβαίνει στην υπόθεση.

Αρα θα είναι $m = k$,οπότε $n = k^2$ όπως θέλουμε.