Λύσεις Θεμάτων Β’ Λυκείου

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\neq 0,\ \frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=\frac{1}{9},\ xyz=27\right\}$$

Λύση

Εχουμε ότι $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}=3\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}$

Θέτουμε $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$

οπότε γίνεται $a^3+b^3+c^3=3abc$ (1)

Από υπόθεση $a+b+c\ \neq 0$ (2)

Η ταυτότητα του Eulerείναι

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

Η (1) και η (2) μαζί με την ταυτότητα του Euler δίνουν

$a=b=c$ δηλαδή $x=y=z$

Ετσι έχουμε $x^3=27=3^3$

Τελικά είναι $x=y=z=3$

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)
Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν τη σχέση:

$$2(x-1)(y-1)-2(x-1)\sqrt{y-1}-2(y-1)\sqrt{x-1}+x+y-2\leq 0.$$

Λύση

Θέτουμε $X=\sqrt{x-1}, Y=\sqrt{y-1}$

Η σχέση γίνεται $2X^2Y^2-2X^2Y-2XY^2+X^2+Y^2\leq 0$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι η παράσταση είναι τριώνυμο.

Η σχέση γίνεται

$X^2(2Y^2-2Y+1)-2XY^2+Y^2\leq 0$ (1)

Η διακρίνουσα είναι
$\Delta=4(Y^4-Y^2(2Y^2-2Y+1))=4(-Y^4+2Y^3-Y^2)=-4Y^2(Y-1)^2\leq 0$

Επίσης είναι $2Y^2-2Y+1=Y^2+(Y-1)^2>0$

Η θεωρία του τριωνύμου μας δίνει ότι για να ισχύει η (1) πρέπει

$\Delta=-4Y^2(Y-1)^2=0$

Αρα θα είναι $Y=0$ η $Y=1$.

Αν είναι $Y=0$ η (1) δινει $X=0$

Αν είναι $Y=1$ η (1) δινει $(X-1)^2=X^2-2X+1\leq 0$ οπότε είναι $X=1$

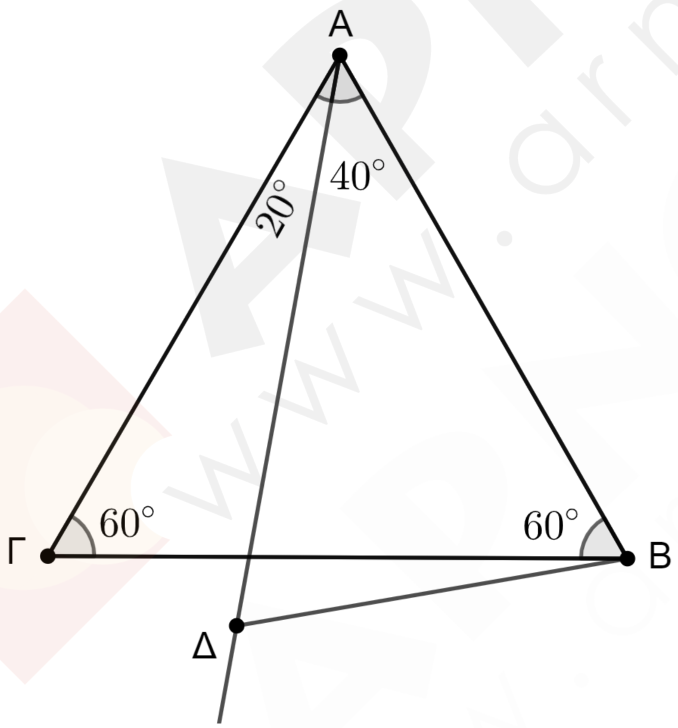
Ετσι έχουμε ότι $(x,y)=(1,1)$ η $(x,y)=(2,2)$

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)
Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει στο επίπεδό του μοναδικό σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\hat{\Delta}B = 70^0$ και $A\hat{\Delta}\Gamma = 80^0$.
Στη συνέχεια να προσδιορίσετε το μέτρο της γωνίας $B\hat{A}\Delta$.

Λύση

Το πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι το Δ είναι μοναδικό.

Το ότι υπάρχει είναι άμεσο και απλό.



Μέσα στην γωνία $\angle B A \Gamma$ φέρουμε ημιευθεία που σχηματίζει με την AB γωνία 40 μοιρών.

Πάνω σε αυτήν παίρνουμε σημείο Δ ώστε $A\Delta = AB = A\Gamma$.

Τα τρίγωνα $\Gamma A \Delta, \Delta A B$ εκ κατασκευής είναι ισοσκελή ,οπότε γνωρίζοντας τις γωνίες της κορυφής έχουμε ότι

$\angle A\Delta B = 70, \angle A\Delta\Gamma = 80$

Ετσι η γωνία που ζητείται είναι $\angle BA\Delta = 40$

Τα παραπάνω πως τα σκεφθήκαμε;

Σκέψη(Δεν χρειάζεται να παρατεθεί στην λύση)

Υποθέτουμε ότι το βρήκαμε το Δ και ότι είναι μέσα στην γωνία

$\angle B A \Gamma$.(αυτό είναι το κρίσιμο σημείο)

Τότε θα είναι $\angle \Gamma \Delta B = 150$.

Αρα το Δ βρίσκεται σε τόξο κύκλου χορδής ΒΓ που την βλέπει με 150 μοίρες.

Το πάνω μέρος του κύκλου βλέπει την χορδή ΒΓ με γωνία 180-150=30.

Επειδή $\angle \Gamma A B = 60$ το Α θα είναι το κέντρο του κύκλου.

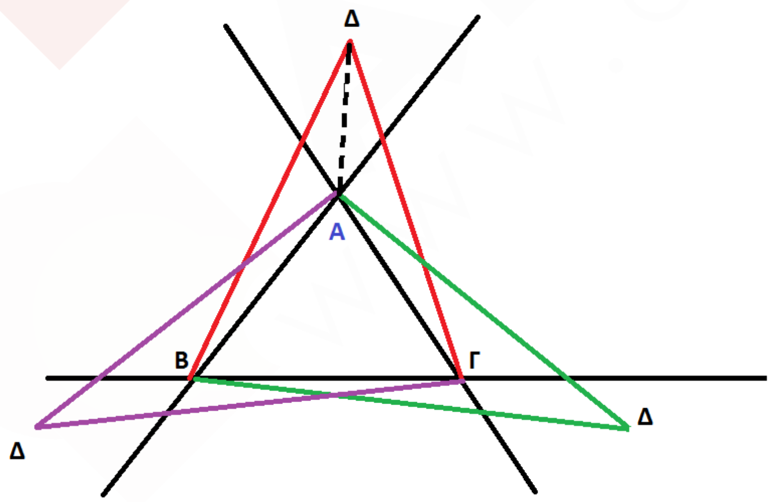
Αρα θα είναι $A\Gamma = A\Delta = AB$.

Το μόνο που μένει να αποδείξουμε είναι ότι δεν υπάρχει άλλο

σημείο Δ στο επίπεδο.

1η περίπτωση.

Το Δ βρίσκεται στις κατακόρυφή γωνίες του τριγώνου.



Αν βρίσκεται στην κατακόρυφή τηςγωνίαςΑ θα είναι $\angle \mathrm{B\Delta A} + \angle \mathrm{A\Delta\Gamma} = 150$που οδηγει σε ΑΤΟΠΟ επειδή το σημείο Α βρίσκεται στο εσωτερικό η στις πλευρές του τριγώνου ΔΒΓ

Αν βρίσκεται στην κατακόρυφή της γωνίας Γεπειδή το σημείο Γ βρίσκεται στο εσωτερικό η στις πλευρές του τριγώνου ΔΒΑ θα είναι

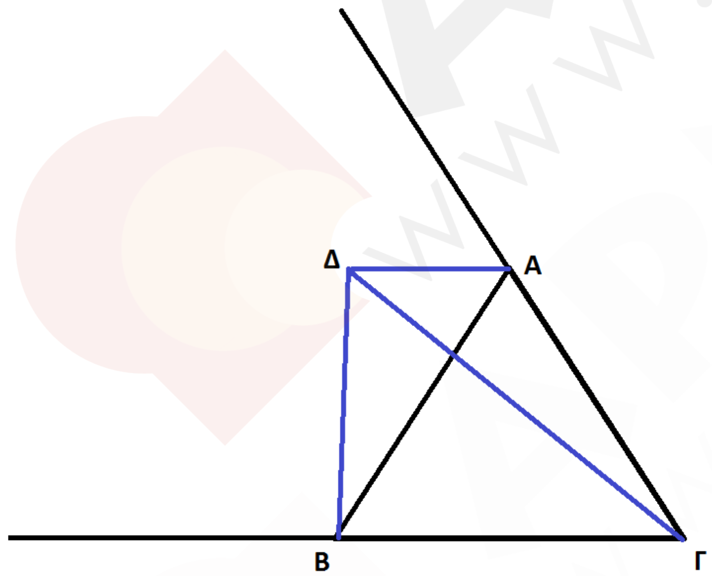
$\angle \mathrm{B\Delta A} < \angle \mathrm{B\Gamma A} = 60$που οδηγει σε ΑΤΟΠΟ.

Εντελώς όμοια καταλήγουμε σε ΑΤΟΠΟ αν το Δ βρίσκεται στην κατακόρυφή της γωνίας Β.

2η περίπτωση.

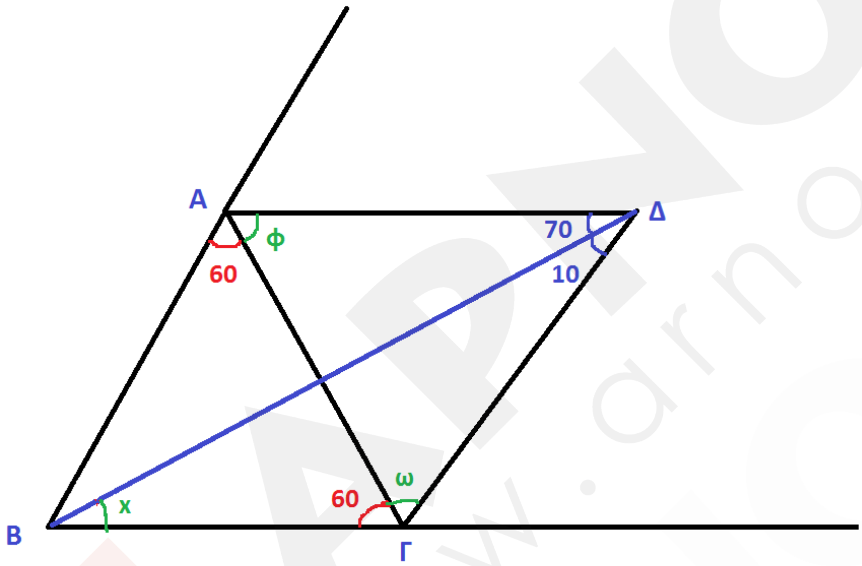
Το Δ βρίσκεται στην γωνία Γ του τριγώνου και εκτός του τριγώνου.

Τότε $\angle \mathrm{B\Delta A} > \angle \mathrm{\Gamma\Delta A}$ που είναι ΑΤΟΠΟ.



3η περίπτωση.

Το Δ βρίσκεται στην γωνία Β του τριγώνου και εκτός του τριγώνου.



Αφού $\angle B\Delta A = 70, \angle \Gamma\Delta A = 80$ θα είναι $\angle \Gamma\Delta B = 10$.

Επειδή από το τρίγωνο $\Gamma\Delta B$ είναι $x + 60 + \omega + 10 = 180$ και $x \leq 60$ θα είναι $\omega = 110 - x \geq 50$

Αμεσα συμπεραίνουμε από το τρίγωνο $\Gamma\Delta A$ ότι $\varphi \leq 50$

Ετσι από το γνωστό ότι σε τρίγωνο μεγαλύτερες πλευρές αντιστοιχούν σε μεγαλύτερες γωνίες είναι $A\Gamma > \Delta\Gamma$.

Αρα και $B\Gamma > \Delta\Gamma$.Από αυτό προκύπτει ότι $x < 10$.

Αλλά $\omega = 110 - x \geq 100$

Αυτό όμως είναι ΑΤΟΠΟ γιατί τότε $\omega + \angle \Gamma\Delta A \geq 180$

Αρα το σημείο Δ είναι μοναδικό δηλαδή αυτό που βρήκαμε στην αρχή.