Λύσεις Θεμάτων Α' Λυκείου

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$25x^2+8y^2-20xy-10x-12y+17=0$$

Λύση

Η σχέση γράφεται

$$25x^2-10x(2y+1)+8y^2-12y+17=0$$

Είναι τριώνυμο.

Η διακρίνουσα είναι

$$\Delta=100((2y+1)^2-(8y^2-12y+17))=100(4y^2+4y+1-8y^2+12y-17)$$

$$=-100(4y^2-16y+16)=-100(4y^2-16y+16)=-400(y^2-4y+4)=-400(y-2)^2$$

Επειδή πρέπει $\Delta\geq 0$ θα είναι $y=2$.

Αντικαθιστώντας η παίρνοντας τον τύπο για την διπλή ρίζα έχουμε

$$x=-\frac{(-50)}{2\cdot 25}=1$$

Αρα τελικά $y=2, x=1$

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $\mathrm{AB} \parallel \Gamma\Delta$ και $\mathrm{B}\Gamma = \Gamma\Delta$. Επίσης, αν Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, ισχύει ότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A}\Gamma = \Delta\mathrm{Z}$.

Λύση

Επειδή το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές θα έχουμε ότι
$\angle \mathrm{AE}\Delta = \angle \mathrm{E}\Delta\mathrm{A} = \varphi$

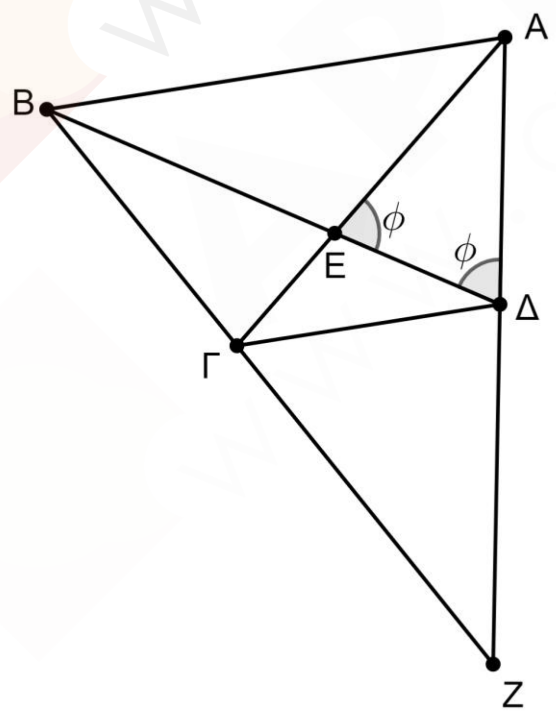
Θα δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ,ΓΔΖ είναι ίσα.

Λόγω παραλλήλων είναι $\angle \Delta\mathrm{BA} = \angle \mathrm{B}\Delta\Gamma = \omega$

Από το τρίγωνο ΕΓΔ θα είναι $x = \angle \mathrm{A}\Gamma\Delta = \varphi - \omega$

(εξωτερική γωνία είναι το άθροισμα απέναντι εσωτερικών)

Επειδή το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές θα έχουμε ότι $\angle \Gamma\mathrm{B}\Delta = \omega$



Θα έχουμε ότι λόγω παραλλήλων ότι $\angle \Gamma BA = \angle \Delta \Gamma Z = 2\omega$

Λόγω παραλλήλων θα είναι $\angle \Gamma AB = x$ και λόγω του ισοσκελούς ΑΔΕ

$\angle \Gamma A\Delta = 180 - 2\varphi$

Το άθροισμα των γωνιών του ΒΑΖ είναι 180.

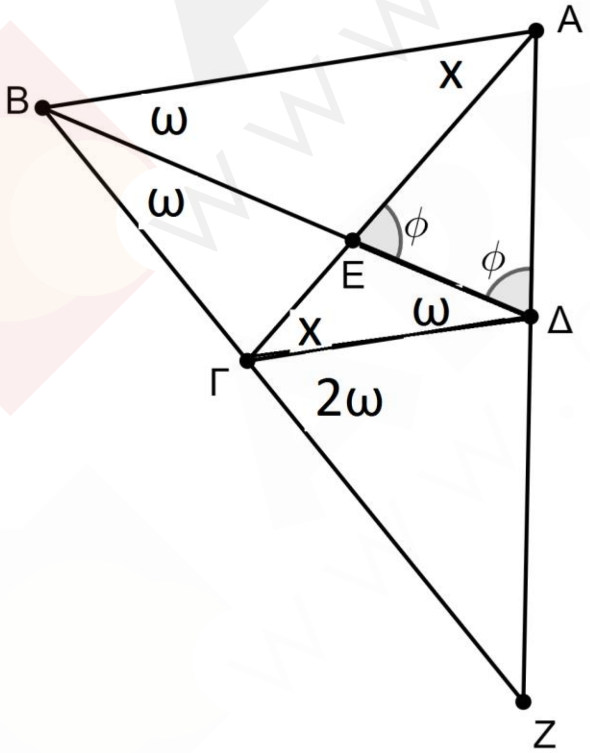
Δηλαδή $\angle BZA + 2\omega + x + 180 - 2\varphi = 180$

Αρα $\angle BZA = 2\varphi - 2\omega - x = 2(\varphi - \omega) - x = x$

Τα τρίγωνα ΑΒΓ,ΓΔΖ εχουν δύο γωνίες ίσες, αρα και την τρίτη.

Επειδή έχουν και μια πλευρά ίση (ΓΔ=ΒΓ) θα είναι ίσα.

Αρα ΑΓ=ΖΔ.



Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους α, β για τους οποίους ο αριθμός $A = \frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}$ είναι ακέραιος. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του Α;

Λύση

Είναι $\dfrac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta} = \dfrac{2\alpha+\beta+3\alpha}{2\alpha+\beta} = 1 + \dfrac{3\alpha}{2\alpha+\beta}$

Πρέπει ο $\dfrac{3\alpha}{2\alpha+\beta}$ να είναι φυσικός(είναι $\alpha>0, \beta>0$)

Εστω ότι $\dfrac{3\alpha}{2\alpha+\beta} = \kappa$

Εχουμε $3\alpha = 2\alpha\kappa + \kappa\beta$ δηλαδή $\alpha(3-2\kappa) = \kappa\beta$

Πρέπει $3-2\kappa>0$ που δίνει $\kappa = 1$

Αρα $3\alpha = 2\alpha+\beta$ δηλαδή $\alpha = \beta$

Τελικά τα είναι τα α, β οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος με $\alpha = \beta$

Προφανώς είναι $A = \dfrac{6}{3} = 2$

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr