Λύσεις Θεμάτων Β΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044\right):\left(\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2\right)$$

Λύση

Είναι $\frac{(-21)^7}{7^7}+\frac{(-15)^7}{(-5)^7}+4044=-\frac{21^7}{7^7}+\frac{15^7}{5^7}+4044=$

$-\frac{(3\cdot7)^7}{7^7}+\frac{(3\cdot5)^7}{5^7}+4044=-3^7+3^7+4044=4044$

και

$\frac{(-14)^3}{7^3}+\frac{(-18)^3}{(-9)^3}+2=-\frac{14^3}{7^3}+\frac{18^3}{9^3}+2=$

$-\frac{(2\cdot7)^3}{7^3}+\frac{(2\cdot9)^3}{9^3}+2=-2^3+2^3+2=2$

Αρα A=4044:2=2022

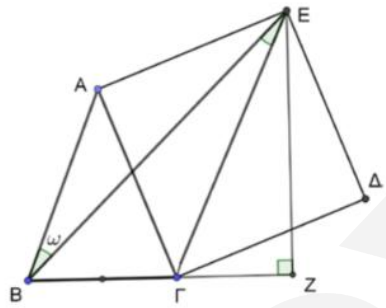
Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Αν $A\hat{B}E = \omega$ και η ευθεία ΕΖ είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΖ, τότε:

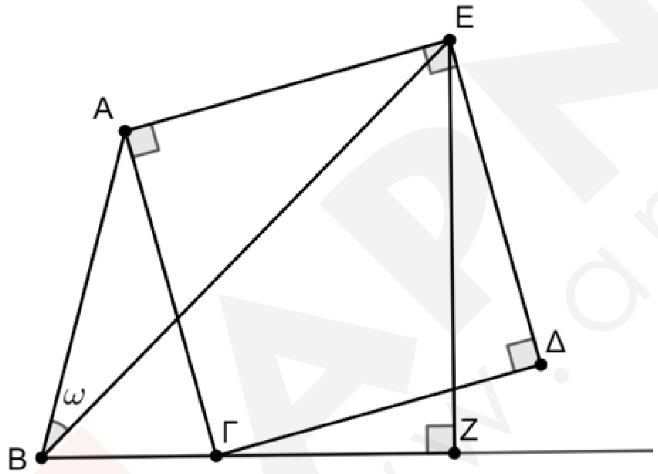
(1) Να βρείτε συναρτήσει του ω τα μέτρα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ.

(2) Να αποδείξετε ότι: ΒΖ = ΕΖ

Παρατήρηση: *Να κάνετε στο γραπτό σας το δικό σας σχήμα.*



Λύση:



1)Είναι $AE = A\Gamma = AB$

Αρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.

Προκύπτει ότι $\angle BAE = 180 - 2\omega$

Αλλά $\angle BAE = \angle BA\Gamma + 90$

οπότε οι δυο τελευταίες δίνουν $\angle BA\Gamma + 90 = 180 - 2\omega$

και τελικά έχουμε $\angle BA\Gamma = 90 - 2\omega$

Έχουμε βρει την γωνία $\angle A = 90 - 2\omega$

Είναι $\angle B = \angle \Gamma$

Θέτουμε $\angle B = \angle \Gamma = \varphi$ Επειδή $\angle A + \angle B + \angle \Gamma = 180$

παίρνουμε $2\varphi + 90 - 2\omega = 180$

Διαδοχικά η τελευταία δίνει $2\varphi-2\omega=90, 2\varphi=2\omega+90, \varphi=\omega+45$

Τελικά έχουμε $\angle \mathrm{A}=90-2\omega, \angle \mathrm{B}=\angle \Gamma=45+\omega$

2)Αφού $\angle \mathrm{B}=45+\omega$ θα είναι $\angle \mathrm{ZBE}=45$

Το τρίγωνο BZE είναι ορθογώνιο στο Ζ και επειδή το άθροισμα

των γωνιών του είναι 180 θα έχουμε ότι $\angle \mathrm{BEZ}=45$.

Αρα είναι και ισοσκελές όποτε $\mathrm{BZ}=\mathrm{EZ}$

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)
Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Τότε διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν τουλάχιστον τα ¾ από τις συνολικές καραμέλες που αγόρασε ο κύριος Γιάννης.

1η Λύση

Αν x είναι οι καραμέλες που έχει στην αρχή ο Δημήτρης τότε ο Γιώργος θα έχει $7x$ και στην σακούλα θα υπάρχουν x.

Αφου έφαγαν και πήραν από την σακούλα ο Γιώργος θα έχει y ο Δημήτρης $7y$ και στην σακούλα θα υπάρχουν y.

Οι καραμέλες που έφαγαν ήταν $9x-9y$ ενώ όλες $9x$.

Εδώ είναι το κρίσιμο σημείο ώστε να βρούμε μια σχέση μεταξύ x, y

ώστε να πάρουμε $9x-9y \geq \frac{3}{4}9x$.

Ο Δημήτρης έφαγε καραμέλες και πήρε από την σακούλα.

Από την σακούλα οι καραμέλες μειώθηκαν.

Αρα αυτές που είχε στην αρχή ο Δημήτρης μαζί με αυτές που υπήρχαν στην σακούλα θα είναι το πολύ ίσες με αυτές που είχαν μετά.

Στην αρχή είχαν $x+x=2x$ ενώ μετά $7y+y=8y$

Αρα $2x \geq 8y$ δηλαδή $\frac{1}{4}x \geq y$ η $-y \geq -\frac{1}{4}x$

Ετσι είναι $9x-9y \geq 9x-9\frac{1}{4}x = 9x(1-\frac{1}{4}) = \frac{3}{4}9x$ δηλαδή αυτό που θέλαμε.

2η Λύση

Αν x είναι οι καραμέλες που έχει στην αρχή ο Δημήτρης τότε ο Γιώργος θα έχει $7x$ και στην σακούλα θα υπάρχουν x.

Εστω b_1 ο αριθμός από αυτές που έφαγε και a_1 αυτές που πήρε από την σακούλα ο Γιώργος.

Εστω b_2 ο αριθμός από αυτές που έφαγε και a_2 αυτές που πήρε από την σακούλα ο Δημήτρης.

Ο Γιώργος θα έχει $7x-b_1+a_1$ ο Δημήτρης $x-b_2+a_2$ και στην σακούλα θα υπάρχουν $x-a_2-a_1$

Τα δεδομένα είναι:

$x-b_2+a_2=7(x-a_2-a_1)$ (1)

$x-b_2+a_2=7(7x-b_1+a_1)$ (2)

$7x-b_1+a_1=x-a_2-a_1$(3)

Η (3) δίνει $b_1=6x+a_2+2a_1$ (4)

Η (1) γίνεται $x-b_2+a_2=7x-7a_2-7a_1$ η $6x+b_2=8a_2+7a_1$

Αρα $6x\le 6x+b_2=8a_2+7a_1\le 8(a_2+a_1)$

Αυτή δίνει $\frac{3}{4}x\le a_2+a_1$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία η (4) δίνει:

$$b_2+b_1\ge 6x+a_2+2a_1\ge 6x+a_2+a_1\ge 6x+\frac{3}{4}x=(6+\frac{3}{4})x=\frac{27}{4}x=\frac{3}{4}9x$$

Αλλά όλες οι καραμέλες είναι $9x$ και αυτές που έφαγαν b_2+b_1.

Ετσι δείξαμε το ζητούμενο.

Σημείωση:

Η λύση αυτή φυσικά είναι πιο μακροσκελής από την πρώτη.

Δίνει όμως επιπλέον πληροφορίες:

α)Οι καραμέλες που έφαγε μόνο ο Γιώργος είναι τουλάχιστον $\frac{3}{4}$ όλων.

β)Αυτές που πήραν από την σακούλα είναι τουλάχιστον $\frac{3}{4}$ αυτών που περιείχε.