Λύσεις Θεμάτων Β' Λυκείου

Πρόβλημα 1. (Μονάδες 6)

Έστω a, b, c πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=2022.$$

Να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

Λύση:

Για διευκόλυνση θέτουμε $X=a+b+c, Y=ab+bc+ca$

Η δοθείσα σχέση γράφεται $\frac{XY}{abc}=2022$

Είναι

$(a+b)(b+c)(c+a)=(X-c)(X-a)(X-b)=$

$X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc=$

$X^3-X^3+YX-abc=YX-abc$

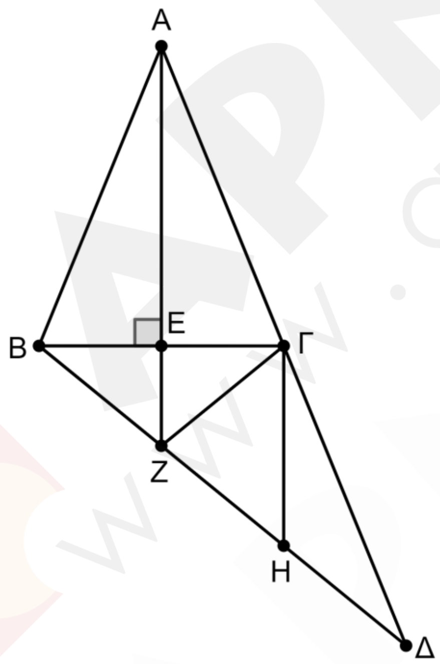
Αρα

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\frac{YX-abc}{abc}=\frac{YX}{abc}-1=2022-1=2021$$

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = A\Gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε και το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι: $\Delta Z = 2 \cdot Z\Gamma$.

Λύση:



1)Εστω Η το μέσο του $Z\Delta$.Το Γ είναι μέσο του ΑΔ οπότε ΓΗ//ΑΕ.

Από Θαλή το Ζ μέσον του ΒΗ.

(Θα μπορούσαμε να το πάρουμε και χρησιμοποιώντας ότι

Η ευθεία που είναι παράλληλη σε μια πλευρά τριγώνου και διέρχεται από το μέσο μιας άλλης πλευράς ,διέρχεται και από το μέσο της τρίτης πλευράς)

Αρα ΒΖ=ΖΗ=ΗΔ

Αλλά ΒΖΓ ισοσκελές.

Αρα ΓΖ=ΒΖ=ΖΗ=ΗΔ

Συμπεραίνουμε ότι 2ΓΖ=ΖΗ+ΗΔ=ΖΔ δηλαδή το ζητούμενο.

2) Η ΑΖ είναι διχοτόμος.

Από το θεώρημα των διχοτόμων είναι $\frac{\Delta Z}{ZB}=\frac{A\Delta}{AB}=2$

Επειδή το ΒΖΓ είναι ισοσκελές είναι ΖΒ=ΖΓ

Αρα $\frac{\Delta Z}{Z\Gamma}=2$

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 info@arnos.gr www.arnos.gr

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)

Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους μ, ν για τους οποίους ο αριθμός $A = \frac{\mu+7\nu}{7\mu+\nu}$ είναι ακέραιος. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του Α;

Λύση:

Εχουμε ότι $\dfrac{\mu+7\nu}{7\mu+\nu} = \kappa$ ακέραιο. Παίρνουμε ότι $\mu+7\nu = 7\mu\kappa+\nu\kappa$

η οποία γίνεται $\nu(7-\kappa) = \mu(7\kappa-1)$

Επειδή οι ν, μ είναι θετικοί ακέραιοι οι δυνατές τιμές του κ είναι

$\kappa = 1,2,3,4,5,6$

Για $\kappa=1$ γίνεται $\mu=\nu$

Για $\kappa=2$ γίνεται $5\nu=13\mu$.

Επειδή ΜΚΔ(5,13)=1 συμπεραίνουμε ότι $\nu=13\lambda, \mu=5\lambda$

με λ θετικό ακέραιο.

Για $\kappa=3$ γίνεται $4\nu=20\mu$ δηλαδή $\nu=5\mu$

Για $\kappa=4$ γίνεται $3\nu=27\mu$ δηλαδή $\nu=9\mu$

Για $\kappa=5$ γίνεται $2\nu=34\mu$ δηλαδή $\nu=17\mu$

Για $\kappa=6$ γίνεται $\nu=41\mu$.