Λύσεις Θεμάτων Γ' Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\left(\frac{(-22)^5}{2^5}+\frac{(-44)^5}{(-4)^5}\right)\cdot(-2022)^2+10^6\right):\left(\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}}-(-5)^{10}+10^3\right)$$

Λύση

Είναι

$$\frac{(-22)^5}{2^5}+\frac{(-44)^5}{(-4)^5}=-\frac{22^5}{2^5}+\frac{44^5}{4^5}=-(\frac{22}{2})^5+(\frac{44}{4})^5=-11^5+11^5=0$$

Αρα

$$(\frac{(-22)^5}{2^5}+\frac{(-44)^5}{(-4)^5})(-2022)^2+10^6=0+10^6=10^6$$

Επίσης $\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}}=\frac{(-10)^{10}}{2^{10}}=\frac{10^{10}}{2^{10}}=(\frac{10}{2})^{10}=5^{10}$

Αρα $\frac{2^{-10}}{(-10)^{-10}}-(-5)^{10}+10^3=5^{10}-5^{10}+10^3=10^3$

Συμπεραίνουμε ότι $A=10^6:10^3=10^3$

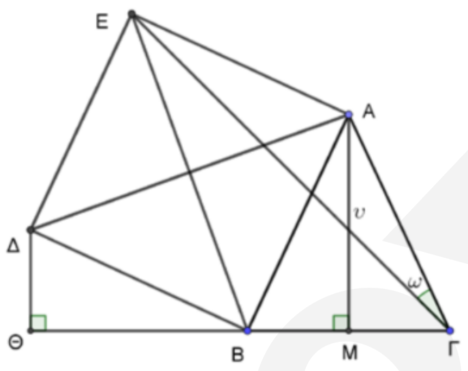
Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι τετράγωνο.
Αν είναι $A\hat{\Gamma}E = \omega$, $\Delta\hat{\Theta}B = 90^0 = A\hat{M}B$ και $B\Gamma = \alpha$, $AM = \upsilon$, τότε να βρείτε:

(1) Το μέτρο της γωνίας $E\hat{\Gamma}B$.

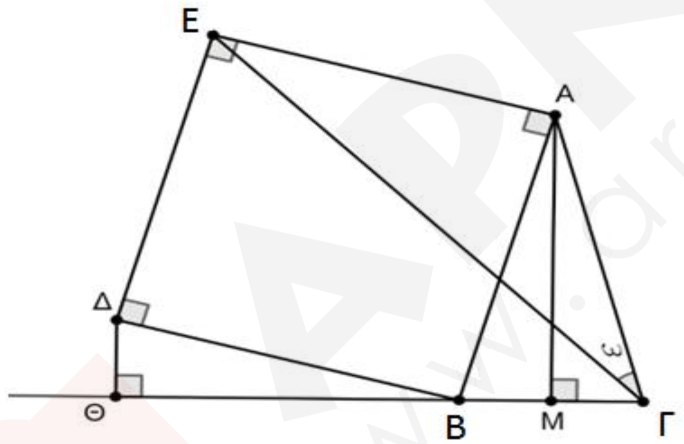
(2) Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΜΘΔ συναρτήσει των α και υ.

Σημείωση. *Να κάνετε στο γραπτό σας το δικό σας σχήμα*



Μονάδες 7

Λύση



1)Εστω $\varphi = \angle E\Gamma B$. Θα είναι $\angle\Gamma = \varphi + \omega$

Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα έχουμε ότι $\angle B = \varphi + \omega$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει άθροισμα γωνιών 180 οπότε είναι $2\varphi + 2\omega + \angle A = 180$ (1)

Επειδή $EA = AB = A\Gamma$ το τρίγωνο $E\Gamma A$ είναι ισοσκελές και έχει άθροισμα γωνιών 180.

Αρα $2\omega + 90 + \angle A = 180$ (2)

Συνδυάζοντας τις (1),(2) θα είναι $2\varphi = 90$,οπότε $\angle E\Gamma B = \varphi = 45$

2) Είναι $\angle \Theta B\Delta + 90 + \angle MBA = 180$.

Αρα $\angle\Theta B\Delta + \angle MBA = 90$

Αλλά και $\angle BAM + \angle MBA = 90$.

Από τις δύο σχέσεις παίρνουμε ότι $\angle BAM = \angle\Theta B\Delta$

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\Theta B\Delta, BMA$ έχουν $\angle BAM = \angle\Theta B\Delta, B\Delta = AB$

οπότε είναι ίσα.

Αρα $\Delta\Theta = BM = \frac{\alpha}{2}, \Theta B = AM = \upsilon$

Είναι $\Theta M = \Theta B + BM = \upsilon + \frac{\alpha}{2}$

Το εμβαδό του τραπεζίου είναι:

$$\frac{1}{2}\Theta M(\Delta\Theta + AM) = \frac{1}{2}(\upsilon + \frac{\alpha}{2})(\upsilon + \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2}(\upsilon + \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{1}{8}(\alpha + 2\upsilon)^2$$

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)

Ο πληθυσμός μιας πόλης στην τελευταία απογραφή πληθυσμού ήταν Α κάτοικοι, όπου $35000 < A < 40000$. Δίνεται ότι ο αριθμός Α, όταν διαιρεθεί με το 7 δίνει υπόλοιπο 1, όταν διαιρεθεί με το 9 δίνει υπόλοιπο 1 και όταν διαιρεθεί με το 64 δίνει υπόλοιπο 3. Να προσδιορίσετε τον πληθυσμό της πόλης.

Λύση

Είναι από τα δεδομένα

$A = 7\nu + 1$

$A = 9\mu + 1$

$A = 64\rho + 3$

με ν, μ, ρ φυσικούς.

Από τις δύο πρώτες έχουμε $A - 1 = 7\nu, A - 1 = 9\mu$

Αρα το $A - 1$ είναι πολλαπλάσιο των 7,9.

Θα είναι πολλαπλάσιο και του ΕΚΠ(7,9)=63

Αρα θα είναι $A - 1 = 63\kappa$ με κ φυσικό.

Γράφοντας την (3) ως $A - 1 = 64\rho + 2$

είναι $A - 1 = 63\kappa, A - 1 = 64\rho + 2$

δηλαδή $63\kappa = 64\rho + 2$ (1)

Αλλά $2 = 2 \cdot 64 - 2 \cdot 63$

Ετσι η (1) γράφεται $63\kappa = 64\rho + 2 \cdot 64 - 2 \cdot 63$

Από την τελευταία έχουμε $63(\kappa + 2) = 64(\rho + 2)$

Το 63 διαιρεί το $64(\rho + 2)$.

Αλλά ΜΚΔ(64,63)=1.

Αρα το 63 διαιρεί το $\rho + 2$.

Συμπεραίνουμε ότι $\rho + 2 = 63\lambda$ η $\rho = 63\lambda - 2$ με λ φυσικό.

Τελικά είναι:

$A - 1 = 64(63\lambda - 2) + 2 = 64 \cdot 63\lambda - 128 + 2 = 64 \cdot 63\lambda - 126$

η $A = 64 \cdot 63\lambda - 125 = 4032\lambda - 125$

Θέλουμε το λ ώστε $35000 < 4032\lambda - 125 < 40000$.

Η τελευταία γράφεται $35125 < 4032\lambda < 40125$

Αρα $\dfrac{35125}{4032} < \lambda < \dfrac{40125}{4032}$

Επειδή $40320 > 40125$ είναι $\lambda < 10$

Επειδή $8 \cdot 4032 < 8 \cdot 4100 = 32800 < 35125$

είναι $\lambda > 8$

Αρα $10 > \lambda > 8$ και επειδή είναι φυσικός $\lambda = 9$

Τελικά είναι

$$A = 4032 \cdot 9 - 125 = 36288 - 125 = 36163$$

Σημείωση:

Θα μπορούσαμε από την $63\kappa = 64\rho + 2$ (1) να συνεχίσουμε και ως εξής.

Γράφοντας $63\kappa = 63\rho + \rho + 2$ παίρνουμε $63(\kappa - \rho) = \rho + 2$

Θέτοντας $\kappa - \rho = \lambda$ παίρνουμε την $\rho = 63\lambda - 2$

Και συνεχίζουμε την λύση όπως παραπάνω.