Λύσεις Θεμάτων Γ' Γυμνασίου

Πρόβλημα 1 (Μονάδες 6)

Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης:

$$A=\left(\left(\frac{(-32)^7}{16^7}-\frac{(-44)^7}{(-22)^7}+2\right)\cdot(-2022)^0+2020\right):\left(\frac{3^{-8}}{(-15)^{-8}}-(-5)^8+1\right)$$

Λυση.

Είναι

$$\frac{(-32)^7}{16^7}-\frac{(-44)^7}{(-22)^7}+2=(-\frac{32}{16})^7-(-\frac{44}{22})^7+2=$$
$$-2^7-(-2)^7+2=-2^7+2^7+2=2$$

και $(-2022)^0=1$.

Αρα

$$(\frac{(-32)^7}{16^7}-\frac{(-44)^7}{(-22)^7}+2)(-2022)^0+2020=2+2020=2022$$

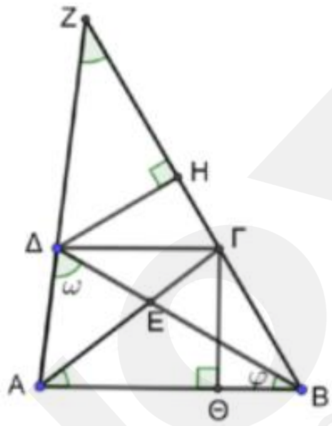
Επίσης έχουμε

$$\frac{3^{-8}}{(-15)^{-8}}-(-5)^8+1=\frac{(-15)^8}{3^8}-5^8+1=(\frac{-15}{3})^8-5^8+1=$$
$$5^8-5^8+1=1$$

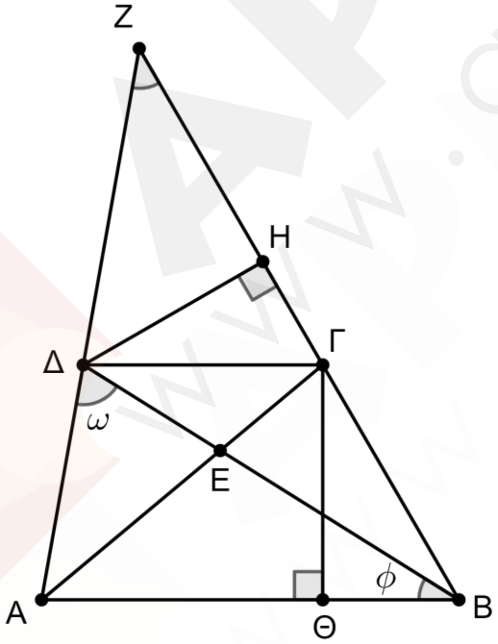
Τελικά είναι Α=2022:1=2022

Πρόβλημα 2 (Μονάδες 7)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$. Επίσης, Ε είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του και ισχύει ότι $A\Delta = AE$. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο σημείο Ζ.
Επίσης, είναι:
$A\hat{\Delta}B = \omega$, $A\hat{B}\Delta = \varphi$, $\Gamma\Theta \perp AB$ και $\Delta H \perp \Gamma Z$.
Να αποδείξετε ότι:
(α) $\Delta\hat{Z}H = \Gamma\hat{A}\Theta$
(β) $\Delta H = \Gamma\Theta$.



Λυση

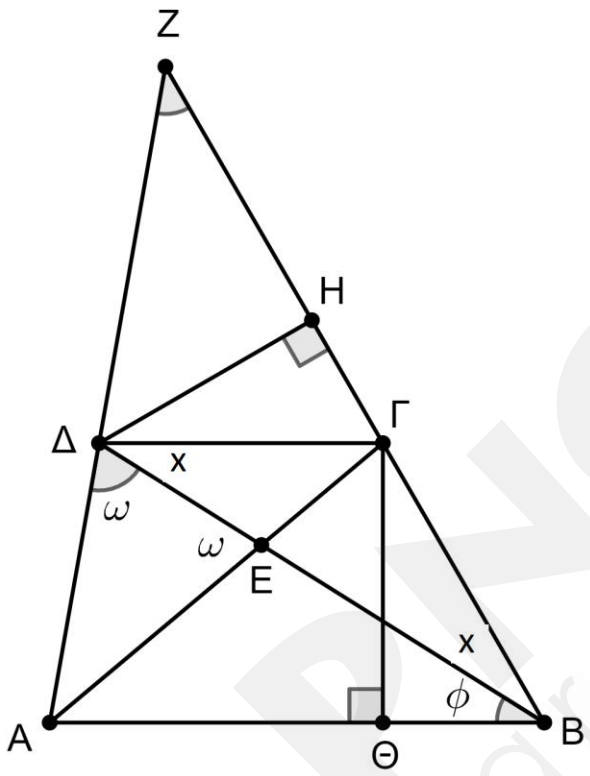


α)Λόγω του ισοσκελούς $AE\Delta$ είναι $\angle AE\Delta = \omega$.

Επειδή η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών θα είναι

$\omega = \angle AE\Delta = \angle \Gamma A\Theta + \angle \Delta BA = \angle \Gamma A\Theta + \varphi$

Αρα $\angle \Gamma A\Theta = \omega - \varphi$ (1)



Λόγω του ισοσκελούς $\Gamma\Delta\mathrm{B}$ είναι $x = \angle\Delta\mathrm{B}\Gamma = \angle\Gamma\Delta\mathrm{B}$

Επειδή είναι $\Delta\Gamma // \mathrm{AB}$ θα έχουμε ότι $x = \varphi$

Θεωρώντας το τρίγωνο $\mathrm{B}\Delta\mathrm{Z}$ θα έχουμε

$\omega = \angle\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \angle\Delta\mathrm{ZH} + \angle\Delta\mathrm{BZ} = \angle\Delta\mathrm{ZH} + \varphi$

Αρα $\angle\Delta\mathrm{ZH} = \omega - \varphi$ (2)

Τελικά από (1),(2) είναι $\angle\Delta\mathrm{ZH} = \angle\Gamma\mathrm{A}\Theta$

β)Λόγω παραλλήλων είναι $\angle\Theta\mathrm{B}\Gamma = \angle\Delta\Gamma\mathrm{H}$

Από υπόθεση είναι $\mathrm{B}\Gamma = \Delta\Gamma$.

Από τις προηγούμενες παίρνουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα

$\Theta\mathrm{B}\Gamma, \Delta\Gamma\mathrm{H}$ είναι ίσα.

Αρα $\Delta\mathrm{H} = \Theta\Gamma$

Πρόβλημα 3 (Μονάδες 7)

Οι ακέραιοι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε:

$$(5-\alpha)(5-\beta)(5-\gamma)(5-\delta)=16.$$

Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αθροίσματος: $\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Λυση

Αφού τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους θα είναι και τα

$5-\alpha, 5-\beta, 5-\gamma, 5-\delta$

Αυτό σημαίνει ότι το 16 γράφεται σαν γινόμενο τεσσάρων διαφορετικών ακεραίων.

Είναι σαφές ότι αυτοί δεν μπορεί να είναι όλοι θετικοί.

Ξεκινάμε από το γινόμενο θετικών.

Το 1 το βάζουμε όσες φορές θέλουμε, αλλά επειδή θέλουμε διαφορετικούς και μπορούμε να βάλουμε και το -1 ,πρέπει να είναι το πολύ δύο φορές.

1)περίπτωση.

$16=1\cdot 2\cdot 2\cdot 4$

Μπορούμε να πάρουμε τα $1,2,-2,-4$ η τα $-1,2,-2,4$

2)περίπτωση.

$16=1\cdot 2\cdot 8$

Μπορούμε να πάρουμε τα $1,-1,-2,8$ η τα $1,-1,2,-8$

3)περίπτωση.

$16=1\cdot 4\cdot 4$

Μπορούμε να πάρουμε μόνο τα $1,-1,4,-4$

Στις παραπάνω περιπτώσεις θα έχουμε ότι τα αθροίσματα είναι

$-3, 3, 6, -6, 0$

Το $5-\alpha+5-\beta+5-\gamma+5-\delta=20-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

θα είναι ένας από τους παραπάνω αριθμούς.

Τελικά οι τιμές που μπορεί να πάρει το $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

είναι

$20-(-3)=23$

$20-3=17$

$20-6=14$

$20-(-6)=26$

$20-0=20$