ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Μοτίβα ασκήσεων

1.1. Αξία Θέσης Ψηφίου και Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης

1.2. Σύγκριση και Διάταξη Φυσικών Αριθμών

1.3. Στρογγυλοποίηση Φυσικών Αριθμών

1.4. Παραστάσεις και Προτεραιότητα των πράξεων

1.5. Άγνωστος Αριθμός – Ευθείες και Αντίστροφες Πράξεις

1.6. Έξυπνες Πράξεις

1.7. Λογαριάζω τα Χρήματα

1.8. Ηλικίες

1.9. Προβλήματα με Σχέσεις

1.10 Συνδυαστικά Θέματα Εμβάθυνσης

Διδακτικοί στόχοι

- Ποιοι είναι οι Φυσικοί Αριθμοί
- Αξία Θέσης Ψηφίου και Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης
- Σύγκριση και Διάταξη Φυσικών Αριθμών
- Στρογγυλοποίηση Φυσικών Αριθμών
- Πράξεις με Φυσικούς Αριθμούς
- Ιδιότητες των πράξεων
- Έξυπνες πράξεις
- Δυνάμεις
- Λέξεις – Κλειδιά και η Λογική των πράξεων
- Παραστάσεις και Προτεραιότητα των πράξεων
- Προβλήματα με Φυσικούς Αριθμούς

Προσομοιωτικό Διαγώνισμα 1ου Κεφαλαίου

Φυσικοί αριθμοί

- Οι αριθμοί **0, 1, 2, 3, 4, 5, ... 100, ... 1.000, ...** ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**. Οι φυσικοί είναι άπειροι στο πλήθος τους, δεν έχουν τέλος.

- **Περιττοί (Μονοί)** ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που το τελευταίο τους ψηφίο είναι: **1, 3, 5, 7, 9.**

1, 2, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, **9**, 10, **11**, 12, **13**, 14, **15**, 16, **17**...

Θυμήσου: Είναι οι αριθμοί που αν γίνουν ζευγαράκια, περισσεύει 1 Μονάδα.
π.χ. 51 = 2 • 25 + 1 = 50 + 1

- **Άρτιοι (Ζυγοί)** ονομάζονται οι φυσικοί αριθμοί που τελειώνουν σε: **0, 2, 4, 6, 8**

1, **2**, 3, **4**, 5, **6**, 7, **8**, 9, **10**, 11, **12**, 13, **14**, 15, **16**, 17...

Θυμήσου: Είναι οι αριθμοί που, χωρίζονται σε ζευγαράκια.
π.χ. 34 = 2 • 17 + 0

Πώς ονομάζουμε έναν φυσικό αριθμό

- Ένας αριθμός μπορεί να ονομαστεί ανάλογα με τον αριθμό των ψηφίων του ως μονοψήφιος, διψήφιος, τριψήφιος, τετραψήφιος, πενταψήφιος κ.λπ.

π.χ. 38 → διψήφιος 426 → τριψήφιος 32.507 → πενταψήφιος

Αξία θέσης ψηφίου σε ένα φυσικό αριθμό

- Η ανθρώπινη διάνοια κατάφερε με τη χρήση των 10 ψηφίων 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 να χτίσει όλο το Βασίλειο των Φυσικών Αριθμών. Το κάθε ψηφίο έχει την αξία θέσης του ανάλογα με τη θέση στην οποία βρίσκεται, καθώς βλέπουμε τον αριθμό από τα δεξιά προς τα αριστερά.

- Η θέση κάθε ψηφίου σ' έναν αριθμό είναι πολύ σημαντική, καθώς κάθε θέση έχει διαφορετική αξία. Το καθοριστικό ψηφίο στην ανακάλυψη του θεσιακού συστήματος αρίθμησης είναι το Μηδέν.

Λοιπόν, για να δούμε:

- Δέκα – **1**0: Η Μονάδα απέκτησε δεκαπλάσια αξία με το Μηδέν δεξιά της.
- Εκατό – **1**00: Η Μονάδα απέκτησε εκατονταπλάσια αξία με δύο μηδενικά δεξιά της στη θέση των μονάδων και των δεκάδων.
- Χίλια – **1**.000: Η Μονάδα απέκτησε χιλιαπλάσια αξία με τρία μηδενικά δεξιά της στη θέση των μονάδων, των δεκάδων και των εκατοντάδων.

- **Το σύστημα αρίθμησης που ακολουθούμε ονομάζεται δεκαδικό, γιατί μία θέση ψηφίου ενός αριθμού προς τα αριστερά έχει 10πλάσια αξία από τη μικρότερή της.**

1

*π.χ. Ο αριθμός **579** γράφεται ως 500 + 70 + 9. Διαβάζουμε:*
«Πεντακόσια (5 Εκατοντάδες), Εβδομήντα (7 Δεκάδες), Εννέα (9 Μονάδες)».

*Ο αριθμός **7.385** γράφεται ως 7.000 + 300 + 80 + 5. Διαβάζουμε:*
«Επτά Χιλιάδες (7 Χιλιάδες), Τριακόσια (3 Εκατοντάδες), Ογδόντα (8 Δεκάδες), Πέντε (5)».

Οι αριθμοί στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης χτίζονται στο μοτίβο: **Μονάδες-Δεκάδες-Εκατοντάδες** και αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται και στις Χιλιάδες, τα Εκατομμύρια, τα Δισεκατομμύρια...

Μεταξύ μας, για να το κατανοήσουμε, δίνουμε τον χαρακτηρισμό «οικογένεια» Χιλιάδων (1.000), Εκατομμυρίων (1.000.000), Δισεκατομμυρίων (1.000.000.000)...

- Οικογένεια **Μονάδων (με 1–3 ψηφία)** – Μονοψήφιοι, Διψήφιοι, Τριψήφιοι αριθμοί **(Εκατοντάδες, Δεκάδες, Μονάδες)**

Όταν φτάσουμε στον μεγαλύτερο αριθμό της Οικογένειας των Μονάδων, συναντάμε τον αριθμό 999. Με την πρόσθεση 1 Μονάδας, έχουμε:

$$999 + 1 = 900 + 90 + 9 + 1 = 900 + 90 + 10 = 900 + 100 = 1.000$$

Έτσι, ανοίγει η επόμενη «οικογένεια» των Χιλιάδων με 4 έως 6 ψηφία.

- Οικογένεια **Χιλιάδων (με 4–6 ψηφία)** – Τετραψήφιοι, Πενταψήφιοι, Εξαψήφιοι αριθμοί **(Εκατοντάδες Χιλιάδων, Δεκάδες Χιλιάδων, Μονάδες Χιλιάδων)**

Όταν φτάσουμε στον μεγαλύτερο αριθμό της Οικογένειας των Χιλιάδων, συναντάμε τον αριθμό 999.999. Με την πρόσθεση 1 Μονάδας, έχουμε:

$$999.999 + 1 = 900.000 + 90.000 + 9.000 + 999 + 1 =$$
$$= 900.000 + 90.000 + 9.000 + 1.000 = 900.000 + 100.000 = 1.000.000$$

Έτσι, ανοίγει η επόμενη «οικογένεια» των Εκατομμυρίων με 7 έως 9 ψηφία.

- Οικογένεια **Εκατομμυρίων (με 7–9 ψηφία)** – Επταψήφιοι, Οχταψήφιοι, Εννιαψήφιοι αριθμοί **(Εκατοντάδες Εκατομμυρίων, Δεκάδες Εκατομμυρίων, Μονάδες Εκατομμυρίων)**

Όταν φτάσουμε στον μεγαλύτερο αριθμό της Οικογένειας των Εκατομμυρίων, συναντάμε τον αριθμό 999.999.999. Με την πρόσθεση 1 Μονάδας, έχουμε:

$$999.999.999 + 1 = 900.000.000 + 90.000.000 + 9.000.000 + 999.999 + 1 =$$
$$= 999.000.000 + 1.000.000 = 1.000.000.000$$

Έτσι, ανοίγει η επόμενη «οικογένεια» των Δισεκατομμυρίων με 10 έως 12 ψηφία.

ΣΧΟΛΙΟ

Οι τελείες στους φυσικούς αριθμούς μπαίνουν ανά 3 ψηφία, για να διαβάζουμε εύκολα και έξυπνα τον αριθμό. Ο αριθμός διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά, ενώ η αξία των ψηφίων αυξάνεται από δεξιά προς τα αριστερά.

π.χ. Ο αριθμός 26547893 είναι δυσανάγνωστος, όμως:

Ο αριθμός **26.547.893** διαβάζεται εύκολα γιατί έχουμε «Οικογένεια» Εκατομμυρίων, δηλαδή:

είκοσι έξι – εκατομμύρια, πεντακόσιες σαράντα επτά – χιλιάδες, οχτακόσια εννενήντα τρία.

- **Εφαρμογή του Μοτίβου Αρίθμησης στη Φυσική – Μέτρηση Βάρους**
  Το μοτίβο Μονάδες-Χιλιάδες-Εκατομμύρια λειτουργεί και για τη Μέτρηση του Βάρους:

  Γραμμάριο – Μονάδα, Κιλό – Χιλιάδα, Τόνος – Εκατομμύριο

  1 Κιλό (kg) = 1.000 γραμμάρια (gr)

  1 Τόνος (t) = 1.000 κιλά (kg) = 1.000.000 γραμμάρια (gr)

Σύγκριση και διάταξη φυσικών αριθμών

- Ο Γιώργος είναι 9 ετών. Η αδελφή του η Αθηνά είναι 12 ετών.

  Ο Γιώργος είναι **μικρότερος** από την Αθηνά.

  Στα Μαθηματικά γράφουμε 9 < 12. **Το ματάκι κοιτάζει στον μεγαλύτερο αριθμό**!

9  12

Η Αθηνά είναι μεγαλύτερη από τον Γιώργο, αφού 12 > 9. Το ματάκι κοιτάζει αριστερά!

Στα Μαθηματικά το μικρότερο δηλώνεται με το σύμβολο **<** (δεξιά) ή **>** (αριστερά)

μικρότερο < μεγαλύτερο ή **μεγαλύτερο > μικρότερο.**

Αν οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους, τότε αυτό δηλώνεται με το σύμβολο **ίσον (=) .**

π.χ. 12 = 10 + 2

Σύγκριση δύο φυσικών αριθμών με ίσο πλήθος ψηφίων

- Όταν οι αριθμοί έχουν ίσο πλήθος ψηφίων, τότε συγκρίνουμε από αριστερά προς τα δεξιά την αντίστοιχη αξία θέσης. Αν είναι ίδια, προχωρούμε στην επόμενη θέση κ.ο.κ.

  *π.χ. Σύγκριση των αριθμών **33** και **51**.*

01_MATH_ST_tel.indd 16 28/12/2022 09:53

Είναι διψήφιοι αριθμοί και στο 33 έχουμε 3 Δεκάδες και στο 51 έχουμε 5 Δεκάδες. Άρα 33 < 51 ή 51 > 33.

*Σύγκριση των αριθμών **167** και **105**.*
Είναι τριψήφιοι αριθμοί με τον ίδιο αριθμό Εκατοντάδων (1 Εκατοντάδα). Προχωράμε στις Δεκάδες. Στο 167 έχουμε 6 Δεκάδες και στο 105 καμία Δεκάδα. Άρα 105 < 167 ή 167 > 105.

1

Σύγκριση δύο φυσικών αριθμών με διαφορετικό πλήθος ψηφίων

- Αν οι αριθμοί **δεν έχουν ίδιο πλήθος ψηφίων**, τότε μεγαλύτερος είναι ο φυσικός αριθμός με τα περισσότερα ψηφία.

π.χ. Ο αριθμός 624 έχει 3 ψηφία, ενώ ο αριθμός 58 έχει 2 ψηφία. Άρα: 624 > 58

Ο αριθμός 3.087 έχει 4 ψηφία, ενώ ο αριθμός 345 έχει 3 ψηφία. Άρα: 3.087 > 345

- **Διάταξη κατά αύξουσα σειρά** ονομάζεται η τοποθέτηση των αριθμών από το μικρότερο στο μεγαλύτερο, δηλαδή συνέχεια αυξάνουμε.

(**Ορισμός – αυξάνω**: επεκτείνω, μεγαλώνω, ενισχύω)

π.χ. Η ηλικία ενός ανθρώπου αυξάνεται με το χρόνο.

- **Διάταξη κατά φθίνουσα σειρά** ονομάζεται η τοποθέτηση των αριθμών από το μεγαλύτερο στο μικρότερο, δηλαδή, συνέχεια μειώνουμε.

(**Ορισμός – φθίνω**: βρίσκομαι σε μια πορεία μείωσης, ελάττωσης)

π.χ. Η προστασία που παρέχει το εμβόλιο κατά του ιού, φθίνει με την πάροδο του χρόνου.

Να διατάξετε τους αριθμούς 4, 12, 23, 13, 54, 35, 76 κατά αύξουσα και φθίνουσα σειρά.
Η αύξουσα σειρά είναι: 4 < 12 < 13 < 23 < 35 < 76
Η φθίνουσα σειρά είναι: 76 > 35 > 23 > 13 > 12 > 4

Θυμήσου: Για να πάμε από αύξουσα σειρά αριθμών σε φθίνουσα, αλλάζουμε απλώς τη σειρά εμφάνισης των αριθμών.

- **Διαδοχικοί** φυσικοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που διαφέρουν κατά 1.

Οι φυσικοί αριθμοί φτιάχνονται από το 0, το 1 και την πράξη της πρόσθεσης:

0, 1, 1 + 1 = 2, 2 + 1 = 3, 3 + 1 = 4, ... κ.λπ.

Ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς δεν υπάρχει άλλος φυσικός.

Το επίθετο «διαδοχικός» περιγράφει μια σειρά στοιχείων, μοτίβων, πραγμάτων, ενεργειών, καταστάσεων όπου το ένα ακολουθεί, διαδέχεται το άλλο.

- **Διαδοχικοί άρτιοι** είναι οι αριθμοί που ξεκινούν από το 0 και διαφέρουν κατά 2. Δηλαδή:

  0, 0 + 2 = 2, 0 + 2 + 2 = 4, 0 + 2 + 2 + 2 = 6, ... κ.λπ.

- **Διαδοχικοί περιττοί** είναι οι αριθμοί που ξεκινούν από το 1 και διαφέρουν κατά 2. Δηλαδή:

  1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 2 = 5, 1 + 2 + 2 + 2 = 7, ... κ.λπ.

Στρογγυλοποίηση φυσικών αριθμών

Συχνά στη θέση κάποιου αριθμού χρησιμοποιούμε κάποιον άλλο, μικρότερο ή μεγαλύτερο, πολύ κοντινό στον αρχικό, για πρακτικούς λόγους. Αυτή η διαδικασία λέγεται **στρογγυλοποίηση**.

- **Στρογγυλοποίηση στις Δεκάδες**

  Όταν το ψηφίο των Μονάδων είναι 0, 1, 2, 3, 4, τότε το ψηφίο των Μονάδων γίνεται 0 και το Ψηφίο των Δεκάδων παραμένει ίδιο.

  παραμένει το ίδιο 0 1 2 3 4

  π.χ. 43 ~ 40, 54 ~ 50, 172 ~ 170, 613 ~ 610, 2.431 ~ 2.430

- Όταν το ψηφίο των Μονάδων είναι 5, 6, 7, 8, 9, τότε το ψηφίο των Μονάδων γίνεται 0 και το ψηφίο των Δεκάδων αυξάνεται κατά 1.

  5 6 7 8 9 10 αυξάνεται κατά 1

  π.χ. 27 ~ 30, 58 ~ 60, 426 ~ 430, 849 ~ 850, 6.718 ~ 6.720

- **Στρογγυλοποίηση στις Εκατοντάδες**

  Όταν το ψηφίο των Δεκάδων είναι 1, 2, 3, .., 33,.... 49, τότε τα ψηφία των Μονάδων και Δεκάδων γίνονται 0, ενώ το ψηφίο των Εκατοντάδων παραμένει ίδιο.

  παραμένει το ίδιο 1, 2, 3, ..., 33, ..., 49

  π.χ. 234 ~ 200, 437 ~ 400, 3.418 ~ 3.400, 8.740 ~ 8.700

- Όταν το ψηφίο των Δεκάδων είναι 50, 51, 52, .., 70,.... 99, τότε τα ψηφία των Μονάδων και Δεκάδων γίνονται 0 και το ψηφίο των Εκατοντάδων αυξάνεται κατά 1.

50, 51, 52, ..., 70, ..., 99 αυξάνεται κατά 1

π.χ. 372 ~ 400, 581 ~ 600, 2.173 ~ 2.200, 6.082 ~ 6.100

ΣΧΟΛΙΟ

Όταν στρογγυλοποιούμε στις Μονάδες έναν φυσικό αριθμό, τότε προκύπτει πάντα ο ίδιος αριθμός.

π.χ. 51 → 51, 76 → 76, 149 → 149, 375 → 375, 6.534 → 6.534

Σημαντική Σημείωση

Δεν στρογγυλοποιούμε τους αριθμούς που χρησιμοποιούνται ως κώδικες επικοινωνίας: αριθμός Ταυτότητας – αριθμός πινακίδας αυτοκινήτου – αριθμός τηλεφώνου – Τ.Κ. σπιτιού κ.λπ.

Πρόσθεση φυσικών αριθμών

Για να προσθέσουμε δύο φυσικούς αριθμούς, τους τοποθετούμε ώστε τα ψηφία των προσθετέων που έχουν την **ίδια αξία θέσης**, να βρίσκονται το ένα ακριβώς κάτω από το άλλο.

π.χ.

	Δ	Μ	
	7	9	1
+		3	
	8	2	

	Ε	Δ	Μ
	3	2	6
+	**0**	5	3
	3	7	9

	Ε	Δ	Μ	
	5	4	7	1
–	3	1	9	
	2	2	8	

	Χ	.	Ε	Δ	Μ
	9	.	4	6	7
+	**0**		5	1	2
	9	.	9	7	9

Με αντίστοιχο τρόπο γίνεται και η αφαίρεση φυσικών αριθμών.

Λέξεις – Κλειδιά αναγνώρισης της πρόσθεσης:
Προσθετέοι, Άθροισμα, Σύνολο, Μεγαλύτερος/Αυξημένος κατά...

Ιδιότητες πρόσθεσης

- **Αντιμεταθετική Ιδιότητα**, δηλαδή δεν παίζει ρόλο η σειρά στην πρόσθεση.

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

π.χ. 8 + 5 = 13   και   5 + 8 = 13, 12 + 10 = 22   και   10 + 12 = 22

- **Προσεταιριστική Ιδιότητα** δηλαδή δεν παίζει ρόλο η σειρά επιλογής των προσθετέων.

$$\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

π.χ. 3 + 2 + 1 = (3 + 2) + 1 = 3 + (2 + 1) = (3 + 1) + 2 = 3 + 1 + 2 = 6

- **Ουδέτερο στοιχείο** της πρόσθεσης είναι ο αριθμός 0, διότι αν προστεθεί με οποιονδήποτε αριθμό, δεν τον αλλάζει.

π.χ. 0 + 5 = 5,   13 + 0 = 13,   135 + 0 = 135,   206 + 0 = 206

Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

- **Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών** είναι η πράξη – ενέργεια με την οποία ένας φυσικός αριθμός (**πολλαπλασιαστέος**), πολλαπλασιάζεται με έναν άλλον φυσικό αριθμό (**πολλαπλασιαστής**) και προκύπτει ένας νέος αριθμός. Το αποτέλεσμα αυτής της πράξης λέγεται **γινόμενο**.
- **Πολλαπλασιαστέος** είναι ο αριθμός που πρόκειται να πολλαπλασιαστεί (*λήγει σε* **– τέος**)
- **Πολλαπλασιαστής** είναι ο αριθμός που πολλαπλασιάζει.

Λέξεις – Κλειδιά αναγνώρισης του πολλαπλασιασμού:
Παράγοντες γινομένου, Άθροισμα του ίδιου αριθμού πολλές φορές.

π.χ. ***1ο Βήμα:*** *Στον πολλαπλασιασμό 75x21, πολλαπλασιάζουμε τις Μονάδες (**1**) του πολλαπλασιαστή με καθένα από τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου: 75 x 1 =* **75**

2ο Βήμα: *Έπειτα, πολλαπλασιάζουμε τις Δεκάδες (**2**) του πολλαπλασιαστή με καθένα από τα ψηφία του πολλαπλασιαστέου:*
75 x 2 = 150 Δεκάδες = 150 • 10 = **1.500**

3ο Βήμα: *Τέλος, προσθέτουμε τα επιμέρους γινόμενα:* **75 + 1.500 = 1.575**
Άρα: **75 x 21 = 75 x (1 + 20) = 75 x 1 + 75 X 20 = 75 + 1.500 = 1.575**

	ΜΧ		Ε	Δ	Μ		
				7	5	→	πολλαπλασιαστέος
×				2	1	→	πολλαπλασιαστής
				7	5	→	**75 x 1 = 75**
+	1	.	5	0	0	→	**75 x 20 = 1.500**
	1	.	5	7	5	→	γινόμενο

Πολλαπλασιασμός φυσικού αριθμού με το 10, 100, 1.000, ...

1

- Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν φυσικό αριθμό **με το 10**, οι Μονάδες γίνονται Δεκάδες και εμφανίζεται ένα μηδενικό στο τέλος του αριθμού. Όλα τα ψηφία του αριθμού παρασύρονται κατά μία θέση.

  π.χ. 16 • 10 = 160, 32 • 10 = 320, 24 • 10 = 240, 56 • 10 = 560

- Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν φυσικό αριθμό **με το 100**, οι Μονάδες γίνονται Εκατοντάδες και εμφανίζονται δύο μηδενικά στο τέλος του αριθμού. Όλα τα ψηφία του αριθμού παρασύρονται κατά δύο θέσεις.

  π.χ. 35 • 100 = 3.500, 19 • 100 = 1.900, 43 • 100 = 4.300, 78 • 100 = 7.800

- Όταν πολλαπλασιάζουμε έναν φυσικό αριθμό **με το 1.000**, οι Μονάδες γίνονται Χιλιάδες και εμφανίζονται τρία μηδενικά στο τέλος του αριθμού. Όλα τα ψηφία του αριθμού παρασύρονται κατά τρεις θέσεις.

  π.χ. 29 • 1.000 = 29.000, 46 • 1.000 = 46.000, 67 • 1.000 = 67.000

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού

- **Αντιμεταθετική Ιδιότητα,** δηλαδή, δεν παίζει ρόλο η σειρά στον πολλαπλασιασμό

$$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$$

  π.χ. 3 • 5 = 5 • 3 = 15, 4 • 8 = 8 • 4 = 32, 12 • 8 = 8 • 12 = 96

- **Προσεταιριστική Ιδιότητα,** δηλαδή, δεν παίζει ρόλο η σειρά επιλογής των παραγόντων

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$$

  π.χ. 5 • 4 • 2 = (5 • 4) • 2 = 5 • (4 • 2) = (5 • 2) • 4 = 40

- **Επιμεριστική Ιδιότητα**:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

  Ο πολλαπλασιασμός ενός αριθμού με το άθροισμα δύο προσθετέων είναι ίσος με τα επιμέρους γινόμενα. Η Επιμεριστική Ιδιότητα συνδυάζει πολλαπλασιασμό και πρόσθεση. Η Επιμεριστική Ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ισχύει και για την αφαίρεση.

  π.χ. 4 • (6 – 2) = 4 • 6 - 4 • 2 = 24 – 8 = 16 ,

  2 • (5 + 3) = 2 • 5 + 2 • 3 = 10 + 6 = 16

01_MATH_ST_tel.indd 21 28/12/2022 09:53

- **Ουδέτερο στοιχείο** του πολλαπλασιασμού είναι ο αριθμός 1, διότι αν πολλαπλασιαστεί με οποιονδήποτε αριθμό, δεν τον αλλάζει.

π.χ. $1 \cdot 33 = 33$, $27 \cdot 1 = 27$, $1 \cdot 45 \cdot 1 = 45$, $1 \cdot 67 \cdot 1 = 67$

Δύναμη φυσικού αριθμού

- Ήδη έχουμε καταλάβει ότι τα Μαθηματικά είναι ένα παιχνίδι λογικής και έξυπνων συμβόλων. Πώς θα έγραφες το $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, δηλαδή, τον πολλαπλασιασμό του 5 με τον εαυτόν του 8 φορές; Τι σκέφτηκαν οι μεγάλοι των Μαθηματικών;

Έξυπνα γράφουμε: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^8$

Βάση είναι ο αριθμός 5 που πολλαπλασιάζεται με τον εαυτόν του και **εκθέτης** ο αριθμός 8 που δείχνει πόσες φορές πολλαπλασιάζεται η βάση με τον εαυτό της.

Δύναμη είναι η μαθηματική πράξη επαναλαμβανόμενου πολλαπλασιασμού του ίδιου αριθμού.

Βάση είναι ο επαναλαμβανόμενος αριθμός που πολλαπλασιάζεται και **εκθέτης** είναι το πλήθος των φορών που πολλαπλασιάζεται. Ο εκθέτης γράφεται με μικρότερο μέγεθος, πάνω και δεξιά από τη βάση.

π.χ. Στο γινόμενο $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$ *έχουμε βάση το 7, εκθέτη το 4 και διαβάζουμε ως: «7 στην τετάρτη».*

Συμφωνούμε ότι:

Αν έναν αριθμό τον υψώσουμε στην μηδενική δύναμη, παίρνουμε 1.

π.χ. $200^0 = 1$, $301^0 = 1$, $1^0 = 1$, $1.763^0 = 1$

! Προσοχή:
Το 0^0 δεν ορίζεται!

Ισχύουν τα εξής:

- **Άν έναν αριθμό τον υψώσουμε στην πρώτη δύναμη, παίρνουμε τον ίδιο αριθμό.**

π.χ. $5^1 = 5$, $345^1 = 345$, $1.245 = 1.245^1$, $35.619 = 35.619^1$

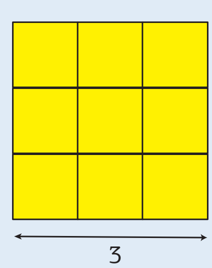
- **Ο αριθμός 1 σε όποια δύναμη και να υψωθεί, δίνει πάντα αποτέλεσμα το 1.**

π.χ. $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$, $1^{2022} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 1$

ΣΧΟΛΙΟ

– Η δύναμη 3^2 με εκθέτη το 2, διαβάζεται «*3 στη δευτέρα*» ή «*3 στο τετράγωνο*», διότι παριστάνει το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς ίσης με 3.

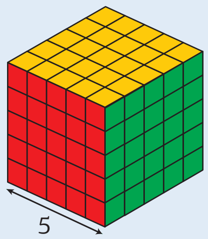
Δηλαδή $3^2 = 3 \times 3 = 9$



ΣΧΟΛΙΟ

– Η δύναμη 5^3 με εκθέτη το 3 διαβάζεται «5 *στην τρίτη*» ή «5 *στον κύβο*» διότι παριστάνει τον όγκο ενός κύβου ακμής ίσης με 5.

Δηλαδή $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$



1

Δυνάμεις του 10

Για να υψώσουμε το 10 σε μία δύναμη, γράφουμε το 1 και βάζουμε έπειτα τόσα μηδενικά όσα γράφει ο εκθέτης.

π.χ.

10^3 = **1.000** *(3 μηδενικά)*

10^1 = **10** *(1 μηδενικό)*

10^9 = **1.000.000.000** *(9 μηδενικά)*

ΣΧΟΛΙΟ

Κάθε φυσικός αριθμός γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του 10 (δεκαδικό ανάπτυγμα ενός αριθμού).

π.χ. Ο αριθμός 9.375 αναλύεται ως εξής:

$9.375 =$

$9.000 + 300 + 70 + 5$

$9 \cdot 1.000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1 =$

$9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Αριθμητικές Παραστάσεις

› **Αριθμητική παράσταση** ονομάζεται μια σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων – ενεργειών (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση).

π.χ. $4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 + 5$, $\quad 25 + 32 : 8 - 5 \cdot 4$, $\quad 14 - (2 \cdot 3^2 - 5) + 2 \cdot 6$

› **Προτεραιότητα των πράξεων**

Σε μία αριθμητική παράσταση, οι πράξεις πάντα γίνονται από αριστερά προς τα δεξιά με την παρακάτω σειρά:

– Πρώτα οι Δυνάμεις (συμπυκνωμένος πολλαπλασιασμός)

– Έπειτα οι Πολλαπλασιασμοί και οι Διαιρέσεις (αφού είναι ισοδύναμες πράξεις)

– Στο τέλος οι Προσθέσεις και οι Αφαιρέσεις

– Αν υπάρχουν παρενθέσεις, προηγούνται οι πράξεις εντός αυτών, με την παραπάνω σειρά.

π.χ.

Α) $4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 + 5 =$
$28 - 6 + 5 =$
$22 + 5 = 27$

Β) $5^2 + 2^5 : 8 - 5 \cdot 4 =$
$25 + 32 : 8 - 5 \cdot 4 =$
$25 + 4 - 20 =$
$29 - 20 = 9$

Γ) $3 \cdot 2 + 4 \cdot (20 - 3 \cdot 2) =$
$3 \cdot 2 + 4 \cdot (20 - 6) =$
$3 \cdot 2 + 4 \cdot 14 =$
$6 + 56 = 62$

Έξυπνη πρόσθεση του Gauss

Πώς προσθέτουμε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς με έξυπνο και γρήγορο τρόπο;

Για να προσθέσουμε, για παράδειγμα, όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 30, γράφουμε το άθροισμά τους στην 1η σειρά από το μικρότερο μέχρι και το μεγαλύτερο αριθμό και κατόπιν στη 2η σειρά το άθροισμα από το μεγαλύτερο μέχρι και το μικρότερο αριθμό.

Προσθέτουμε →

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 28 & + & 29 & + & 30 \\ 30 & + & 29 & + & 28 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 31 & + & 31 & + & 31 & + & \dots & + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array}$$

Το άθροισμα είναι: 31 + 31 + 31 + ... + 31 + 31 + 31

Παρατηρούμε ότι:

- Έχουμε πάρει 2 φορές το άθροισμα από το 1 έως το 30
- Όλα τα ζευγάρια έχουν άθροισμα το 31.
- Το πλήθος των ζευγαριών είναι 30.

Οπότε: $1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \dfrac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 3 = 465$

Το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 1 έως το ν είναι:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & \nu \\ \nu & + & (\nu-1) & + & (\nu-2) & + & \dots & + & 1 \\ \hline (\nu+1) & + & (\nu+1) & + & (\nu+1) & + & \dots & + & (\nu+1) \end{array}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + \nu = \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2}$$

Έξυπνη καταμέτρηση αριθμών

ΑΣΚΗΣΗ

Πόσα είναι τα πολλαπλάσια του 3 που είναι μεγαλύτερα από το 9 και μικρότερα από το 100;

ΛΥΣΗ

Τα συγκεκριμένα πολλαπλάσια είναι οι ακόλουθοι αριθμοί: 12, 15, 18, 21, ..., 99 δηλαδή:

$$3 \cdot 4,\ \ 3 \cdot 5,\ \ 3 \cdot 6,\ \ 3 \cdot 7,\ \ \dots,\ \ 3 \cdot 33$$

Το πλήθος τους, λοιπόν, είναι όσοι είναι οι αριθμοί από το 4 έως και το 33.

Αυτοί είναι σε πλήθος **33 – 4 + 1** = 30 αριθμοί γιατί, εφόσον έχουμε παραλείψει τους αριθμούς 1, 2, 3, είναι 33 – 3 = 30 αριθμοί.

π.χ. Οι φυσικοί αριθμοί από το 100 έως και το 850, είναι σε πλήθος:
850 – 100 + 1 = 751