

Ορισμός

Σύνολο είναι το αποτέλεσμα μιας πράξης του νου μας με την οποία συγκροτούμε μία ολότητα από καλώς ορισμένα ξεχωριστά αντικείμενα της άμεσης αντίληψης ή της σκέψης μας.

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται στοιχεία του συνόλου.

Ονομάζουμε τα σύνολα γενικά με κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα.

Όταν ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο A , γράφουμε:

$$x \in A$$

Όταν ένα στοιχείο x δεν ανήκει σε ένα σύνολο A , γράφουμε:

$$x \notin A$$

Ένα σύνολο συμβολίζεται:

α) Με αναγραφή των στοιχείων του μέσα σε άγκιστρα.

Παραδείγματα:

$$A = \{ \alpha, \epsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega \}$$

$$B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$$

Σημείωση 1. Τα στοιχεία του συνόλου μέσα στα άγκιστρα, χωρίζονται μεταξύ τους με κόμμα

Σημείωση 2. Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία.

Δηλαδή είναι: $\Gamma = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ ή $\Gamma = \{ \beta, \gamma, \alpha \}$

Σημείωση 3. Ένα στοιχείο γράφεται μια μόνο φορά μέσα στα άγκιστρα.



Δηλαδή τα γράμματα της λέξης "σκοπός" αποτελούν το σύνολο: $A = \{\sigma, \kappa, \omicron, \pi, \varsigma\}$

β) Με περιγραφή μιας χαρακτηριστικής ιδιότητας των στοιχείων του με τη βοήθεια με τη βοήθεια μεταβλητής και άγκιστρου.

Παραδείγματα:

$A = \{x / x \text{ φωνήεν του Ελληνικού αλφαβήτου}\}$
και διαβάζουμε

"x όπου x φωνήεν του Ελληνικού αλφαβήτου"

$B = \{x / x \text{ μονοψήφιος περιττός αριθμός}\}$

$\Gamma = \{x / x \text{ κάτοικος του Νομού Αττικής}\}$

Πληθικός αριθμός συνόλου

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A λέγεται πληθικός αριθμός του συνόλου A και συμβολίζεται στις διάφορες βιβλιογραφίες ως:

$$N(A), n(A), \nu(A), |A|$$

Παραδείγματα:

Αν: $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $N(A) = 3$

$B = \{x / x \text{ φωνήεν του Ελληνικού αλφαβήτου}\}$
τότε $N(B) = 7$

Το κενό - το μονομελές σύνολο

Το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο, δηλαδή ο πληθικός του αριθμός είναι μηδέν, λέγεται κενό σύνολο. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με \emptyset ή $\{\}$.

 **ΑΡΝΟΣ**

Παραδείγματα:

$A = \{x/x \text{ άρτιος αριθμός που έχει τελευταίο ψηφίο το } 5\}$
είναι $A = \emptyset$.

$B = \{x/x \text{ μήνας του έτους με } 32 \text{ ημέρες}\}$
είναι $B = \emptyset$.

Κάθε σύνολο που έχει μόνο ένα στοιχείο λέγεται μονομελές ή μονοστοιχειακό σύνολο.

Παραδείγματα:

$A = \{x/x \text{ ψηφίο του αριθμού } 333\}$, είναι $A = \{3\}$

$B = \{x/x \text{ μήνας του έτους που αρχίζει με το γράμμα } \Phi\}$,
είναι $B = \{\text{Φεβρουάριος}\}$

Σημειώσεις:

1. Τα σύμβολα $\{a\}$ και a είναι διαφορετικά.

Το $\{a\}$ παριστάνει το μονομελές σύνολο με μοναδικό στοιχείο του τα a .

Σωστό είναι το $a \in \{a\}$.

2. Είναι: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$. Σωστό είναι το $\emptyset \in \{\emptyset\}$

3. Αν $A = \{a, b, \gamma\}$ δεν είναι σωστό να γράφουμε $A = 3$. Σωστό είναι το $N(A) = 3$.

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα A και B είναι ίσα, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και γράφουμε $A = B$.

Διαφορετικά τα σύνολα είναι άνισα και γράφουμε $A \neq B$.



Παραδείγματα:

Έστω τα σύνολα:

$A = \{x/x \text{ γράμμα της λέξης "άλλο"}\}$

$B = \{x/x \text{ γράμμα της λέξης "όλα"}\}$

$\Gamma = \{x/x \text{ γράμμα της λέξης "καλά"}\}$

Είναι: $A = \{α, λ, ο\}$, $B = \{ο, λ, α\}$ και $\Gamma = \{κ, α, λ\}$

Άρα: $A = B$ και $A \neq \Gamma$.

Υποσύνολο ενός συνόλου

Ένα σύνολο B ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου A , όταν κάθε στοιχείο του συνόλου B είναι και στοιχείο του συνόλου A . Γράφουμε $B \subseteq A$. Το σύνολο A λέγεται υπερσύνολο ή σύνολο αναφοράς του B .

Συμβολικά ο ορισμός αυτός διατυπώνεται ως εξής:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \text{για κάθε } x \in B \Rightarrow x \in A$$

Όταν το σύνολο B δεν είναι υποσύνολο του A , γράφουμε $B \not\subseteq A$

Παράδειγμα:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 2, 4\}$

Για κάθε $x \in B \Rightarrow x \in A$, οπότε είναι $B \subseteq A$

Σημείωση: Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε άλλου συνόλου, ακόμη και του εαυτού του.

Δηλ. ισχύει: $\emptyset \subseteq A$ για κάθε σύνολο και

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$



Ισχύουν οι ιδιότητες

1. $A \subseteq A$ (ανακλαστική ή αυτοπαθής)
2. $(A \subseteq B \text{ και } B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$, (μεταβατική)
3. $(\forall A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A) \Rightarrow A = B$, (αντισυμμετρική).

Γνήσιο υποσύνολο

Ένα σύνολο B λέγεται γνήσιο υποσύνολο ενός άλλου συνόλου A , αν και μόνο αν, το B είναι υποσύνολο του A και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο x τέτοιο ώστε:

$$x \in A \text{ και } x \notin B$$

Συμβολικά τότε γράφουμε $B \subset A$

Παράδειγμα:

Αν $A = \{a, b, \gamma, \delta\}$ και $B = \{a, b, \gamma\}$ τότε είναι $B \subseteq A$, ($\delta \in A$ και $\delta \notin B$) οπότε είναι $B \subset A$.

Παρατήρηση: Αν δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος να τονίσουμε ότι το σύνολο B είναι γνήσιο υποσύνολο του A , τότε γράφουμε απλά $B \subseteq A$.

Δυναμοσύνολο ενός συνόλου

Δυναμοσύνολο $\beta(A)$ ενός συνόλου A , είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του συνόλου A .

Παράδειγμα:

Αν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε:

$$\beta(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$$



Σημείωση: Ένα σύνολο A με n στοιχεία, $N(A)=n$, έχει 2^n υποσύνολα.

$$\text{Δηλ. είναι: } N(\beta(A)) = 2^n$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $N(A)=3$ και $N(\beta(A)) = 2^3 = 8$.

Ισοδύναμα σύνολα

Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοδύναμα όταν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα.

Συμβολίζουμε $A \sim B$.

Παράδειγμα:

Τα σύνολα $A = \{a, b, \gamma\}$ και $B = \{x, y, \omega\}$ είναι ισοδύναμα γιατί μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα, όπως φαίνεται στην παρακάτω διάταξη.

$$A = \{a, b, \gamma\}$$

$$B = \{x, y, \omega\}$$

Παρατηρήσεις:

1. Δύο σύνολα A και B για να είναι ισοδύναμα, πρέπει να έχουν τον ίδιο πληθάρημο.
Δηλ. πρέπει να ισχύει $N(A) = N(B)$

2. Δύο ίσα σύνολα A και B είναι ισοδύναμα.

Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.



Πεπερασμένα σύνολα - απειροσύνολα

Αν ένα σύνολο έχει πληθάρημο συγκεκριμένο φυσικό αριθμό, όσο μεγάλος και αν είναι αυτός, τότε λέγεται πεπερασμένο.

Αν όμως ένα σύνολο έχει άπειρα στοιχεία λέγεται απειροσύνολο.

Παραδείγματα:

- $A = \{x/x \text{ πενταψήφιος φυσικός αριθμός}\}$.

Είναι: $A = \{100.000, 100.001, \dots, 999.998, 999.999\}$

Το σύνολο A είναι πεπερασμένο γιατί ο πληθάρημος του είναι: $N(A) = 999.999 - 99.999 = 900.000$

- $\mathbb{N} = \{x/x \text{ φυσικός αριθμός}\}$

Είναι: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Προφανώς ο πληθάρημος του \mathbb{N} δεν μπορεί να είναι ένας πολύ μεγάλος φυσικός αριθμός, με δεδομένο ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι.

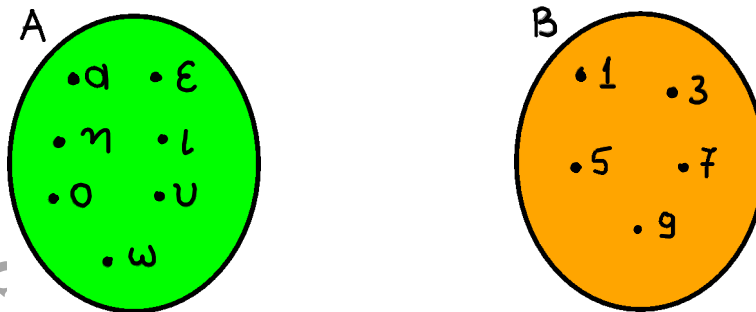


Η κατανόηση όσων θα αναφέρουμε για τα σύνολα, καθώς και οι πράξεις που θα επακολουθήσουν διευκολύνονται με τη σχηματική του παράσταση με τα λεγόμενα διαγράμματα Venn

Αυτά συνήθως είναι κλειστές οβάλ ή κυκλικές γραμμές μέσα στις οποίες γράφουμε τα στοιχεία του κάθε συνόλου, δίνοντας και το όνομα του συνόλου στο αντίστοιχο διάγραμμα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Έστω τα σύνολα:

$$A = \{α, ε, η, ι, ο, υ, ω\} \text{ και } B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$



Στην περίπτωση που ο πληθαισμος του συνόλου είναι μεγάλος ή το σύνολο είναι απειροσύνολο, δεν είναι δυνατή η αναγραφή όλων των στοιχείων του μέσα στην κλειστή γραμμή. Έτσι είναι αρκετό να σχεδιάσουμε το σύνολο απλά μόνο με την κλειστή γραμμή και ενδεχομένως μία εσωτερική γραμμοσκίαση.

Παραδείγματα:

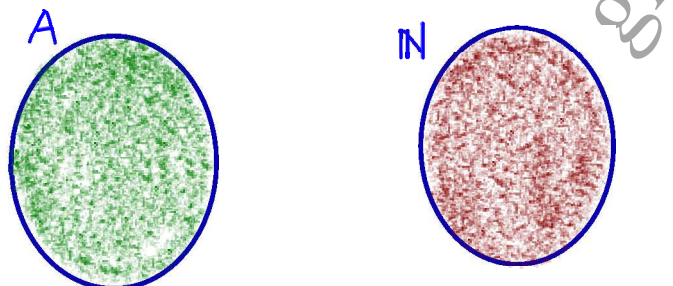
Έστω τα σύνολα

$$A = \{x/x \text{ κάτοικος του Δήμου Αθηναίων}\}$$

 **ΑΡΝΟΣ**

$\mathbb{N} = \{x/x \text{ το σύνολο των φυσικών αριθμών}\}$

Τα διαγράμματα Venn των συνόλων αυτών φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Το βασικό σύνολο Ω

Σε κάθε περίπτωση μελέτης ενός θέματος στο οποία εμπλέκονται και σύνολα, θεωρούμε ότι αυτά αποτελούνται από στοιχεία ενός μη κενού συνόλου που ομαζείται βασικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς και συμβολίζεται συνήθως με Ω , U ή E .

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ένωση συνόλων

Ένωση δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο σύνολο A είτε στο σύνολο B .

Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A \cup B$

Αν A, B είναι δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω τότε συμβολικά έχουμε:

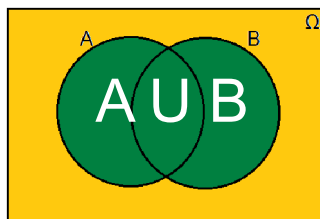
$$A \cup B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ είτε } x \in B\}$$

Δηλ. το σύνολο $A \cup B$ αποτελείται από τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των συνόλων A και B

Η γραφική παράσταση της ένωσης δύο συνόλων φαί-



ΝΕΤΑΙ ΣΤΟ ΕΠΌΜΕΝΟ ΔΙΑΪΧΡΑΜΜΑ VENN.

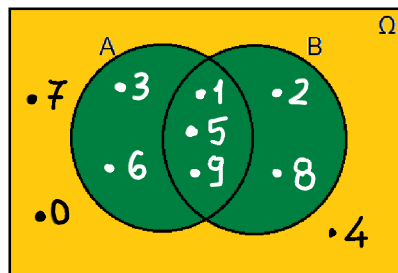


Παράδειγμα:

$$\text{Αν } \Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 6, 9\} \text{ και } B = \{1, 5, 9, 2, 8\}$$

τότε $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$ και φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.



Ισχύουν οι ιδιότητες

$$1. A \cup B = B \cup A, \text{ (αντιμεταθετική)}$$

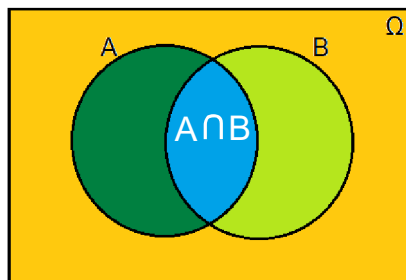
$$2. (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \text{ (προσεταιριστική)}$$

Τομή συνόλων

Τομή δύο συνόλων A και B λέγεται το σύνολο που αποτελείται μόνο από τα κοινά στοιχεία των δύο αυτών συνόλων.

Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A \cap B$

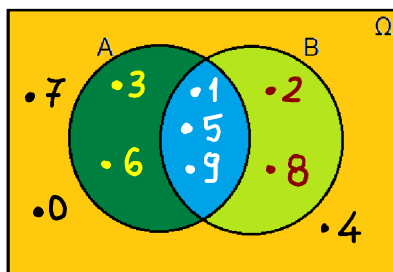
Η γραφική παράσταση της τομής των συνόλων A και B φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.



Το σύνολο $A \cap B$ αποτελείται από τα στοιχεία που βρίσκονται στη χαλαζία περιοχή.

Παράδειγμα:

Αν A και B είναι τα σύνολα που αναφέραμε στην ένωση των συνόλων τότε το σύνολο της τομής τους είναι το $A \cap B = \{1, 5, 9\}$ και φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.



Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $A \cap B = B \cap A$, (αντιμεταθετική)
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, (προσεταιριστική)

Σημείωση: Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία και λέγονται ξένα μεταξύ τους.

Ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης και της τομής

1. Η πράξη της ένωσης είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της τομής. Δηλαδή ισχύει:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

 **ΑΡΝΟΣ**

2. Η πράξη της τομής είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της ένωσης. Δηλαδή ισχύει

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

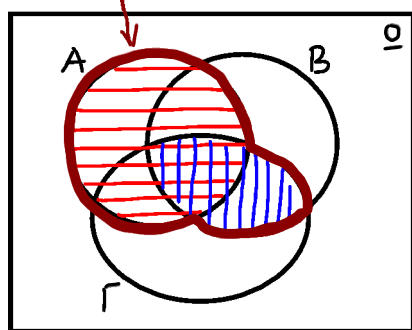
Σημείωση: Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων μπορεί να γίνει γραφικά με διαγράμματα Venn.

Η ισχύς τους μπορεί να διαπιστωθεί με αριθμητικά παραδείγματα.

Απόδειξη γραφική της ιδιότητας.

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma), \quad (1)$$

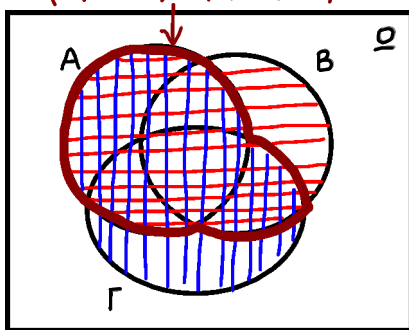
$$A \cup (B \cap \Gamma)$$



$$A \ominus$$

$$B \cap \Gamma \oplus$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$



$$A \cup B \ominus \quad A \cup \Gamma \oplus$$

Παρατηρούμε ότι και τα δύο μέλη της ισότητας εκφράζουν την ίδια καμπυλόγραμμη περιοχή στα δύο παραπάνω σχήματα.

Επομένως έχει αποδειχθεί γραφικά η ιδιότητα (1).

ΑΡΝΟΣ

Απόδειξη αριθμητική της ιδιότητας

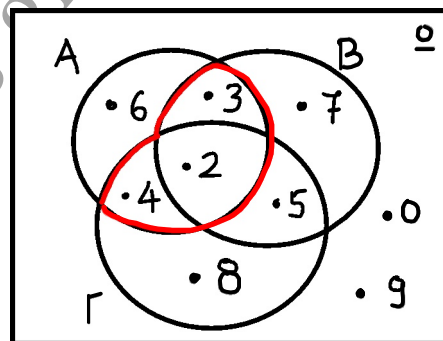
$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 7, 8, 9\}$
και τα σύνολα:

$$A = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$\Gamma = \{2, 4, 5, 8\}$$



Έχουμε:

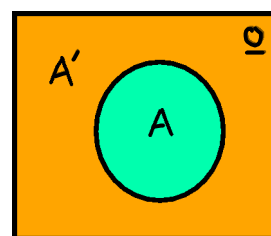
- $A \cap (B \cup \Gamma) = \{2, 3, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
 $= \{2, 3, 4\}$

- $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = \{2, 3\} \cup \{2, 4\}$
 $= \{2, 3, 4\}$

Άρα: $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Συμπλήρωμα συνόλου

Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A ένα υποσύνολό του, τότε το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία δεν ανήκουν στο A λέγεται συμπλήρωμα του A (ως προς το Ω).



Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με A' ή A^c ή $C_{\Omega}A$

Συμβολικά γράφουμε:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

Από τον ορισμό και με τη βοήθεια του διαγράμματος διαπιστώνουμε ότι ισχύουν:



1. $A \cap A' = \emptyset$
2. $A \cup A' = \Omega$
3. $(A')' = A$
4. $\Omega' = \emptyset$
5. $\emptyset' = \Omega$

Διαφορά δύο συνόλων

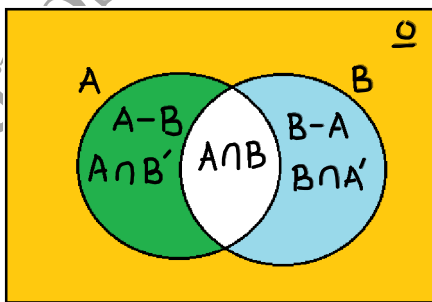
Ορίζουμε ως διαφορά του συνόλου B από το σύνολο A, που συμβολίζουμε $A-B$ το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο σύνολο B.

Συμβολικά έχουμε:

$$A-B = \{x \in \Omega / x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η διαφορά του συνόλου A από το σύνολο B.

$$B-A = \{x \in \Omega / x \in B \text{ και } x \notin A\}$$



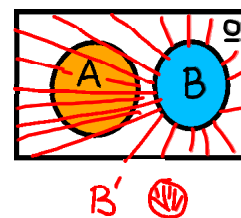
Σημειώσεις:

1. Είναι: $A-B = A \cap B'$
 $B-A = B \cap A'$
2. Αν $A=B$ τότε $A'=B'$ και $A-B = A \cap B' = A \cap A' = \emptyset$

3. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε: $A-B = A \cap B' = A$

Με τη βοήθεια του διαγράμματος διαπιστώνουμε ότι ισχύουν:

1. $(A-B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
2. $(A-B) \cup (A \cap B) = A$
3. $(B-A) \cap (A \cap B) = \emptyset$



 **ΑΡΝΟΣ**

4. $(B-A) \cup (A \cap B) = B$

5. $(A-B) \cap (A \cap B) \cap (B-A) = \emptyset$

6. $(A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) = A \cup B$

Σχετικά με τους πληθαισμούς ισχύουν:

1. $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$

$\Rightarrow N(A \cap B) = N(A) + N(B) - N(A \cup B)$ } \Rightarrow

Όμως: $N(A \cap B) \geq 0$

$\Rightarrow N(A) + N(B) - N(A \cup B) \geq 0$

$\Rightarrow N(A \cup B) \leq N(A) + N(B)$, (1)

• Η (1) ισχύει σαν ισότητα όταν $A \cap B = \emptyset$ γιατί τότε είναι $N(A \cap B) = 0$.

• Η (1) γενικεύεται και ισχύει για περισσότερα σύνολα. Δηλ.

$N(A \cup B \cup \Gamma) \leq N(A) + N(B) + N(\Gamma)$

• Επιπλέον ισχύει η ισότητα

$N(A \cup B \cup \Gamma) = N(A) + N(B) + N(\Gamma) - N(A \cap B) - N(A \cap \Gamma) - N(B \cap \Gamma) + N(A \cap B \cap \Gamma)$

2. $N(A-B) = N(A) - N(A \cap B)$ } $\stackrel{(+)}{\Rightarrow}$

3. $N(B-A) = N(B) - N(A \cap B)$ }

$\Rightarrow N(A-B) + N(B-A) = N(A) + N(B) - 2N(A \cap B)$

Όμως: $(A-B) \cap (B-A) = \emptyset$, (2)

$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} N[(A-B) \cup (B-A)] = N(A) + N(B) - 2N(A \cap B)$, (3)



Συμμετρική διάφορα ή διαζευκτικό άθροισμα ή απλά άθροισμα συνόλων

Το σύνολο $(A-B) \cup (B-A)$ που αποτελείται από τα στοιχεία του βασικού συνόλου Ω που ανήκουν μόνο στο σύνολο A ή μόνο στο σύνολο ονομάζεται

Συμμετρική διαφορά ή διαζευκτικό άθροισμα ή απλά άθροισμα συνόλων και συμβολίζεται $A \ddagger B$

Δηλαδή είναι: $A \ddagger B = (A-B) \cup (B-A)$, διαβάζεται

“Μόνο A ή μόνο B ” και έχει πληθώραμο:

$$N(A \ddagger B) = N(A) + N(B) - 2N(A \cap B).$$

Επίσης ισχύουν:

$$A \ddagger B = (A \cup B) - (A \cap B) \text{ και}$$

$$N(A \ddagger B) = N(A \cup B) - N(A \cap B)$$

Παράδειγμα.

Ένα ξενοδοχείο την καλοκαιρινή περίοδο απασχολεί 200 συνολικά υπάλληλους. Από αυτούς οι 110 μιλούν Αγγλικά, οι 70 μιλούν Γαλλικά, ενώ 40 μιλούν Αγγλικά και Γαλλικά. Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι μιλούν:

α) Αγγλικά είτε Γαλλικά

β) μόνο Αγγλικά

γ) μόνο Γαλλικά

δ) μόνο Αγγλικά ή μόνο Γαλλικά

ε) δεν μιλούν Αγγλικά είτε Γαλλικά

Απάντηση

Αν $A = \{x/x \text{ υπάλληλος που μιλάει Αγγλικά}\}$

και $\Gamma = \{x/x \text{ υπάλληλος που μιλάει Γαλλικά}\}$

τότε έχουμε:



$$\alpha) N(A \cup \Gamma) = N(A) + N(\Gamma) - N(A \cap \Gamma) \\ = 110 + 70 - 40$$

$\Rightarrow N(A \cup \Gamma) = 140$, υπάλληλοι μιλούν Αγγλικά είτε Γαλλικά.

$$\beta) N(A - \Gamma) = N(A) - N(A \cap \Gamma) \\ = 110 - 40$$

$\Rightarrow N(A - \Gamma) = 70$, υπάλληλοι μιλούν μόνο Αγγλικά.

$$\gamma) N(\Gamma - A) = N(\Gamma) - N(\Gamma \cap A) \\ = 70 - 40$$

$\Rightarrow N(\Gamma - A) = 30$, υπάλληλοι μιλούν μόνο Γαλλικά

$$\delta) N(A \ddagger \Gamma) = N(A) + N(\Gamma) - 2N(A \cap \Gamma) \\ = 110 + 70 - 2 \cdot 40$$

$\Rightarrow N(A \ddagger \Gamma) = 100$, υπάλληλοι μιλούν μόνο Αγγλικά ή μόνο Γαλλικά

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο:

$$N(A \ddagger \Gamma) = N(A \cup \Gamma) - N(A \cap \Gamma) = 140 - 40 = 100.$$

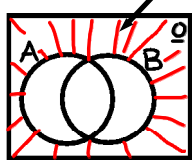
$$\epsilon) N[(A \cup \Gamma)'] = N(\Omega) - N(A \cup \Gamma) \\ = 200 - 140$$

$\Rightarrow N[(A \cup \Gamma)'] = 60$, υπάλληλοι δεν μιλούν Αγγλικά είτε Γαλλικά.

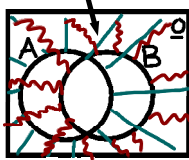
Τύποι De Morgan

Ισχύουν οι τύποι:

$$1. (A \cup B)' = A' \cap B'$$

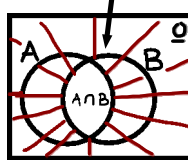


$$(A \cup B)' \text{ (shaded)}$$



$$A' \cap B' \text{ (shaded)}$$

$$2. (A \cap B)' = A' \cup B'$$



$$(A \cap B)' \text{ (shaded)}$$



$$A' \cup B' \text{ (shaded)}$$



Διαμερισμός ή Διαμέριση συνόλου

Διαμερισμός ενός συνόλου $A \neq \emptyset$ λέγεται ένα σύνολο Δ από υποσύνολα A_1, A_2, \dots, A_n του A για τα οποία ισχύει:

1. $A_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ με $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A$

Τα σύνολα A_1, A_2, \dots, A_n λέγονται κλάσεις του διαμερισμού Δ .

Παραδείγματα:

1.

Τα παιδιά ενός 6-θέσιου Δημοτικού Σχολείου χωρίζονται (διαμερίζονται), σε 6 τάξεις (κλάσεις), Α', Β', Γ', Δ', Ε', ΣΤ'.

Για τα υποσύνολα αυτά προφανώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού.

2.

Θερούμε το σύνολο $A = \{2, 3, 5, 8, 9, 25\}$ και τα σύνολα

$A_1 = \{x \in A \mid x = \text{πολ}2\}$, $A_2 = \{x \in A \mid x = \text{πολ}3\}$ και

$A_3 = \{x \in A \mid x = \text{πολ}5\}$.

Είναι: $A_1 = \{2, 8\}$, $A_2 = \{3, 9\}$ και $A_3 = \{5, 25\}$.

Παρατηρούμε ότι: $A_1, A_2, A_3 \subset A$ και

- $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_3 \neq \emptyset$
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $A_3 \cap A_1 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$.

Επομένως τα υποσύνολα A_1, A_2, A_3 είναι κλάσεις του διαμερισμού $\Delta = \{A_1, A_2, A_3\}$.



1. Υποσύνολο

$$B \subseteq A \Rightarrow \text{για κάθε } x \in B \Rightarrow x \in A.$$

Δεχόμαστε ότι: $\emptyset \subseteq A$ για κάθε σύνολο A

2. Γνήσιο Υποσύνολο

$$B \subset A \Leftrightarrow (B \subseteq A \text{ και υπάρχει } x \in A \text{ με } x \notin B)$$

3. Δυναμοσύνολο

$$\text{Αν } N(A) = n \text{ τότε } N(\rho(A)) = 2^n$$

4. Ισότητα συνόλων

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A)$$

5. Υποσύνολο - Ιδιότητες

i) $A \subseteq A$, (αυτοπαθής - ανακλαστική)

ii) $(A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$, (αντισυμμετρική)

iii) $(A \subseteq B \text{ και } B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$, (μέταβατική)

6. Ένωση συνόλων - Ιδιότητες

i) $A \cup B = B \cup A$, (ανακλαστική)

ii) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$, προσεταιριστική

iii) $A \cup \emptyset = A$, (ιδιότητα του κενού συνόλου)

iv) Αν $A \subseteq \emptyset$ τότε $A \cup \emptyset = \emptyset$, (ιδιότητα του βασικού συνόλου)

v) $A \cup A = A$, (ιδιότητα του αδύναμου στοιχείου)

vi) $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ } Ιδιότητες εγκλεισμού

vii) $A \subseteq B \Rightarrow A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$ }

 **ΑΡΝΟΣ**

viii) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

7. Τομή συνόλων - Ιδιότητες

- i) $A \cap B \subseteq A \cup B$
 - ii) $A \cap B = B \cap A$, (αντιμεταθετική)
 - iii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, (προσεταιριστική)
 - iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$ ιδιότητα του κενού
 - v) Αν $A \subseteq \emptyset$ τότε $A \cap \emptyset = A$, ιδιότητα του βασικού συνόλου \emptyset
 - vi) $A \cap A = A$, ιδιότητα του αδύναμου στοιχείου
 - vii) $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
 - viii) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
 - ix) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$
- } Ιδιότητες εγκλεισμού

8. Σχέση ένωσης και τομής συνόλων.

i) Επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή συνόλων.

- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

ii) Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση συνόλων.

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$

9. Ιδιότητες του συμπληρώματος συνόλου.

- i) $\emptyset' = \emptyset$ και $\emptyset' = \emptyset$
- ii) $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \emptyset$

 **ΑΡΝΟΣ**

iii) $(A')' = A$

iv) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 v) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ } Τύποι De Morgan

vi) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

10. Διαφορά συνόλων - Ιδιότητες

i) $A - B = A \cap B'$

ii) $A - B \neq B - A$

iii) $(A - B) - \Gamma \neq A - (B - \Gamma)$

iv) $A - A = A \cap A' = \emptyset$

v) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$

vi) $A \cup (B - \Gamma) \neq (A \cup B) - (A \cup \Gamma)$

vii) $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

viii) $(A - B) - \Gamma = A - (B \cup \Gamma)$
 ix) $(A - B) - \Gamma = (A - \Gamma) - (B - \Gamma)$ } Αποδεικνύονται
 κάνοντας χρήση
 της $A - B = A \cap B'$

11. Συμμετρική διαφορά ή διαζευτικό άθροισμα

Ιδιότητες

i) $A \ddagger B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ii) Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $A \ddagger B = A \cup B$

iii) $A \ddagger \emptyset = A$

iv) $A \ddagger B = B \ddagger A$

v) $A \ddagger (B \ddagger \Gamma) = (A \ddagger B) \ddagger \Gamma$

vi) $A \cap (B \ddagger \Gamma) = (A \cap B) \ddagger (A \cap \Gamma)$

vii) $A \ddagger (B \cup \Gamma) \neq (A \cup B) \ddagger (A \cup \Gamma)$