ΑΡΝΟΣ

ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός

Σύνολο είναι το αποτέλεσμα μιας πράξης του νου μας με την οποία συγκροτούμε μία ολότητα από καλώς ορισμένα ξεχωριστά αντικείμενα της άμεσης αντίληψης ή της σκέψης μας.

Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο λέγονται <u>στοιχεία του συνόλου</u>.

Ονομάζουμε τα σύνολα γενικά με κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου και τα στοιχεία τους με μικρά γράμματα.

Όταν ένα στοιχείο x ανήκει σε ένα σύνολο Α, γράφουμε:

$$x \in A$$

Όταν ένα στοιχείο x δεν ανήκει σε ένα σύνολο Α, γράφουμε:

$$x \notin A$$

Ένα σύνολο συμβολίζεται:

<u>α) Με αναγραφή των στοιχείων του μέσα σε άγκιστρα.</u>

Παραδείγματα:

$A = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$

$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Σημείωση 1. Τα στοιχεία του συνόλου μέσα στα άγκιστρα, χωρίζονται μεταξύ τους με κόμμα.

Σημείωση 2. Δεν έχει σημασία η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία.

Δηλαδή είναι: $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ή $\Gamma = \{\beta, \gamma, \alpha\}$

Σημείωση 3. Ένα στοιχείο γράφεται μία μόνο φορά μέσα στα άγκιστρα.

ΑΡΝΟΣ

Δηλαδή τα γράμματα της λέξης "σκοπός" αποτελούν το σύνολο: $A = \{σ, κ, ο, π, ς\}$

β) <u>Με περιγραφή μιας χαρακτηριστικής ιδιότητας</u> των στοιχείων του με τη βοήθεια με τη βοήθεια μεταβλητής και άγκιστρου.

Παραδείγματα:

$A = \{x \,/\, x$ φωνήεν του Ελληνικού αλφαβήτου$\}$

και διαβάζουμε

"x όπου x φωνήεν του Ελληνικού αλφαβήτου".

$B = \{x/x$ μονοψήφιος περιττός αριθμός$\}$

$Γ = \{x/x$ κάτοικος του Νομού Αττικής$\}$

Πληθικός αριθμός συνόλου

Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου Α λέγεται πληθικός αριθμός του συνόλου Α και συμβολίζεται στις διάφορες βιβλιογραφίες ως:

$$N(A),\ n(A),\ \nu(A),\ |A|$$

Παραδείγματα:

Αν: $A = \{1, 2, 3\}$, τότε $N(A) = 3$

$B = \{x/x$ φωνήεν του Ελληνικού αλφαβήτου$\}$ τότε $N(B) = 7$

Το κενό - το μονομελές σύνολο

Το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο, δηλαδή ο πληθικός του αριθμός είναι μηδέν, λέγεται <u>κενό</u> σύνολο. Το κενό σύνολο συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

ΑΡΝΟΣ

Παραδείγματα:

$A=\{x/x$ άρτιος αριθμός που έχει τελευταίο ψηφίο το $5\}$
είναι $A=\emptyset$.

$B=\{x/x$ μήνας του έτους με 32 ημέρες$\}$
είναι $B=\emptyset$.

Κάθε σύνολο που έχει μόνο ένα στοιχείο λέγεται μονομελές ή μονοστοιχειακό σύνολο.

Παραδείγματα:

$A=\{x/x$ ψηφίο του αριθμού $333\}$, είναι $A=\{3\}$

$B=\{x/x$ μήνας του έτους που αρχίζει με το γράμμα Φ$\}$,
είναι $B=\{$Φεβρουάριος$\}$

Σημειώσεις:

1. Τα σύμβολα $\{\alpha\}$ και α είναι διαφορετικά.
   Το $\{\alpha\}$ παριστάνει το μονομελές σύνολο με μοναδικό στοιχείο του το α.
   Σωστό είναι το $\alpha\in\{\alpha\}$.
2. Είναι: $\{\emptyset\}\neq\emptyset$. Σωστό είναι το $\emptyset\in\{\emptyset\}$
3. Αν $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ δεν είναι σωστό να γράφουμε $A=3$. Σωστό είναι το $N(A)=3$.

Ίσα σύνολα

Δύο σύνολα Α και Β είναι ίσα, όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία και γράφουμε $A=B$.

Διαφορετικά τα σύνολα είναι άνισα και γράφουμε $A\neq B$.

ΑΡΝΟΣ

Παραδείγματα:

Έστω τα σύνολα:

$A = \{x / x$ γράμμα της λέξης "άλλο"$\}$

$B = \{x / x$ γράμμα της λέξης "όλα"$\}$

$\Gamma = \{x / x$ γράμμα της λέξης "καλά"$\}$

Είναι: $A = \{\alpha, \lambda, o\}$, $B = \{o, \lambda, \alpha\}$ και $\Gamma = \{\kappa, \alpha, \lambda\}$

Άρα: $A = B$ και $A \neq \Gamma$.

Υποσύνολο ενός συνόλου

Ένα σύνολο Β ονομάζεται υποσύνολο ενός συνόλου Α, όταν κάθε στοιχείο του συνόλου Β είναι και στοιχείο του συνόλου Α. Γράφουμε $B \subseteq A$. Το σύνολο Α λέγεται υπερσύνολο ή σύνολο αναφοράς του Β.

Συμβολικά ο ορισμός αυτός διατυπώνεται ως εξής:

$$B \subseteq A \iff \text{για κάθε } x \in B \Rightarrow x \in A$$

Όταν το σύνολο Β δεν είναι υποσύνολο του Α, γράφουμε $B \nsubseteq A$

Παράδειγμα:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 2, 4\}$

Για κάθε $x \in B \Rightarrow x \in A$, οπότε είναι $B \subseteq A$

Σημείωση: Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε άλλου συνόλου, ακόμη και του εαυτού του.

Δηλ. ισχύει: $\varnothing \subseteq A$ για κάθε σύνολο και

$$\varnothing \subseteq \varnothing$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

1. $A \subseteq A$ (ανακλαστική ή αυτοπαθής)
2. ($A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$) $\Rightarrow A \subseteq \Gamma$, (μεταβατική)
3. (Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$) $\Rightarrow A = B$, (αντισυμμετρική).

Γνήσιο υποσύνολο

Ένα σύνολο Β λέγεται γνήσιο υποσύνολο ενός άλλου συνόλου Α, αν και μόνο αν, το Β είναι υποσύνολο του Α και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο x τέτοιο ώστε:

$$x \in A \text{ και } x \notin B$$

Συμβολικά τότε γράφουμε $B \subset A$

Παράδειγμα:

Αν $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ και $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ τότε είναι $B \subseteq A$, ($\delta \in A$ και $\delta \notin B$) οπότε είναι $B \subset A$.

Παρατήρηση: Αν δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος να τονίσουμε ότι το σύνολο Β είναι γνήσιο υποσύνολο του Α, τότε γράφουμε απλά $B \subseteq A$.

Δυναμοσύνολο ενός συνόλου

Δυναμοσύνολο $\wp(A)$ ενός συνόλου Α, είναι το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του συνόλου Α.

Παράδειγμα:

Αν $A = \{1, 2, 3\}$, τότε:

$$\wp(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\}\}$$

ΑΡΝΟΣ

Σημείωση: Ένα σύνολο A με ν στοιχεία, $N(A)=\nu$, έχει 2^{ν} υποσύνολα.
Δηλ. είναι: $N(\wp(A)) = 2^{\nu}$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είναι $N(A)=3$ και $N(\wp(A)) = 2^3 = 8$.

Ισοδύναμα σύνολα

Δύο σύνολα A και B λέγονται ισοδύναμα όταν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα.

Συμβολίζουμε $A \sim B$.

Παράδειγμα:

Τα σύνολα $A=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ και $B=\{x, y, \omega\}$ είναι ισοδύναμα γιατί μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία τους ένα προς ένα, όπως φαίνεται στην παρακάτω διάταξη.

$$\begin{array}{ccccccc} A = \{ & \alpha, & \beta, & \gamma & \} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ B = \{ & x, & y, & \omega & \} \end{array}$$

Παρατηρήσεις:

1. Δύο σύνολα A και B για να είναι ισοδύναμα, πρέπει να έχουν τον ίδιο πληθάριθμο.
Δηλ. πρέπει να ισχύει $N(A)=N(B)$
2. Δύο ίσα σύνολα A και B είναι ισοδύναμα.
Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε.

ΑΡΝΟΣ

Πεπερασμένα σύνολα - απειροσύνολα

Αν ένα σύνολο έχει πληθάριθμο συγκεκριμένο φυσικό αριθμό, όσο μεγάλος και αν είναι αυτός, τότε λέγεται πεπερασμένο.

Αν όμως ένα σύνολο έχει άπειρα στοιχεία λέγεται απειροσύνολο.

Παραδείγματα:

- $A = \{x / x$ πενταψήφιος φυσικός αριθμός$\}$.

  Είναι: $A = \{100.000, 100.001, \cdots, 999.998, 999.999\}$

  Το σύνολο Α είναι πεπερασμένο γιατί ο πληθάριθμός του είναι: $N(A) = 999.999 - 99.999 = 900.000$

- $\mathbb{N} = \{x / x$ φυσικός αριθμός$\}$

  Είναι: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

  Προφανώς ο πληθάριθμος του $\mathbb{N}$ δεν μπορεί να είναι ένας πολύ μεγάλος φυσικός αριθμός, με δεδομένο ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι.

ΑΡΝΟΣ

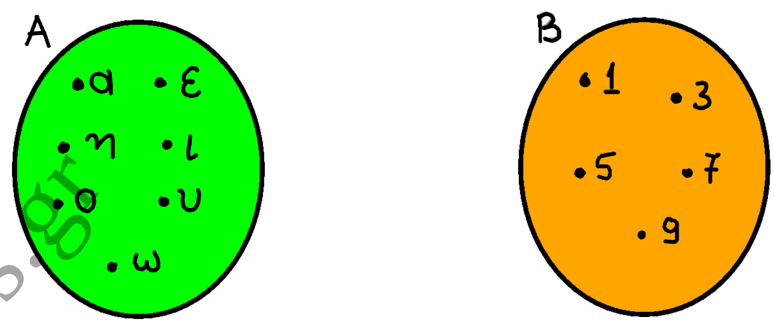
Διαγράμματα του Venn

Η κατανόηση όσων θα αναφέρουμε για τα σύνολα, καθώς και οι πράξεις που θα επακολουθήσουν διευκολύνονται με τη σχηματική του παράσταση με τα λεγόμενα διαγράμματα Venn.

Αυτά συνήθως είναι κλειστές οβάλ ή κυκλικές γραμμές μέσα στις οποίες γράφουμε τα στοιχεία του κάθε συνόλου, δίνοντας και το όνομα του συνόλου στο αντίστοιχο διάγραμμα, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.

Έστω τα σύνολα:

$A=\{α, ε, η, ι, ο, υ, ω\}$ και $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$



Στην περίπτωση που ο πληθάριθμος του συνόλου είναι μεγάλος ή το σύνολο είναι απειροσύνολο, δεν είναι δυνατή η αναγραφή όλων των στοιχείων του μέσα στην κλειστή γραμμή. Έτσι είναι αρκετό να σχεδιάσουμε το σύνολο απλά μόνο με την κλειστή γραμμή και ενδεχομένως μία εσωτερική γραμμοσκίαση.

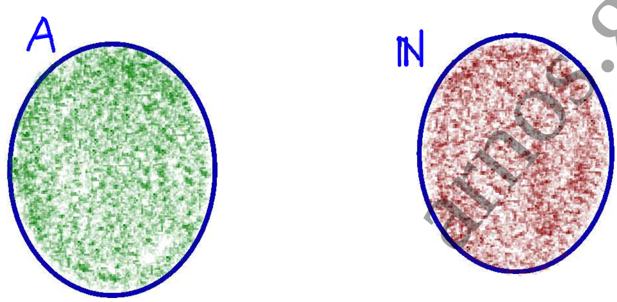
Παραδείγματα:

Έστω τα σύνολα

$A=\{x/x$ κάτοικος του Δήμου Αθηναίων$\}$

$\mathbb{N} = \{x / x$ το σύνολο των φυσικών αριθμών$\}$

Τα διαγράμματα Venn των συνόλων αυτών φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



Το βασικό σύνολο Ω

Σε κάθε περίπτωση μελέτης ενός θέματος στο οποίο εμπλέκονται και σύνολα, θεωρούμε ότι αυτά αποτελούνται από στοιχεία ενός μη κενού συνόλου που ονομάζεται βασικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς και συμβολίζεται συνήθως με Ω, U ή E.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ενωση συνόλων

Ένωση δύο συνόλων Α και Β λέγεται το σύνολο που αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο σύνολο Α είτε στο σύνολο Β.

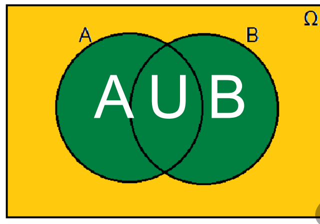
Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A \cup B$

Αν Α, Β είναι δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω τότε συμολικά έχουμε:

$$A \cup B = \{x \in \Omega / \ x \in A \text{ είτε } x \in B\}$$

Δηλ. το σύνολο $A \cup B$ αποτελείται από τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των συνόλων Α και Β

Η γραφική παράσταση της ένωσης δύο συνόλων φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.

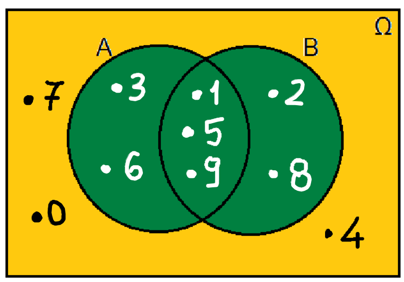


Παράδειγμα:

Αν $\Omega=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A=\{1,3,5,6,9\}$ και $B=\{1,5,9,2,8\}$

τότε $A\cup B=\{1,2,3,5,6,8,9\}$ και φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.



Ισχύουν οι ιδιότητες

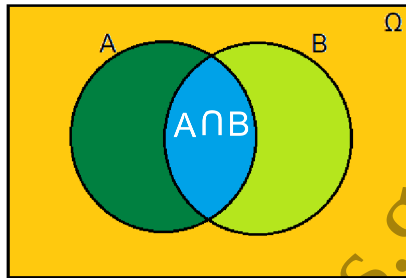
1. $A\cup B=B\cup A$, (αντιμεταθετική)
2. $(A\cup B)\cup \Gamma=A\cup(B\cup\Gamma)$, (προσεταιριστική)

Τομή συνόλων

Τομή δύο συνόλων Α και Β λέγεται το συνολο που αποτελείται μόνο από τα κοινά στοιχεία των δύο αυτών συνόλων.

Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε $A\cap B$

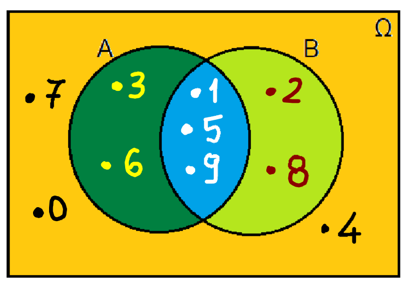
Η γραφική παράσταση της τομής των συνόλων Α και Β φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.



Το σύνολο $A \cap B$ αποτελείται από τα στοιχεία που βρίσκονται στη γαλάζια περιοχή.

Παράδειγμα:

Αν A και B είναι τα σύνολα που αναφέραμε στην ένωση των συνόλων τότε το σύνολο της τομής τους είναι το $A \cap B = \{1, 5, 9\}$ και φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα Venn.



Ισχύουν οι ιδιότητες:

1. $A \cap B = B \cap A$, (αντιμεταθετική)
2. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$, (προσεταιριστική)

Σημείωση: Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα σύνολα A και B δεν έχουν κοινά στοιχεία και λέγονται ξένα μεταξύ τους.

Ιδιότητες που συνδέουν τις πράξεις της ένωσης και της τομής

1. Η πράξη της ένωσης είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της τομής. Δηλαδή ισχύει:

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

ΑΡΝΟΣ

2. Η πράξη της τομής είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της ένωσης. Δηλαδή ισχύει

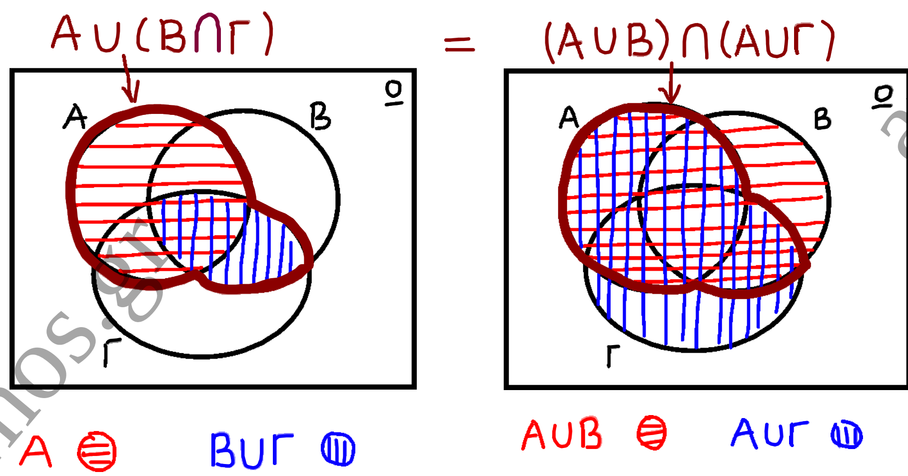
$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

Σημείωση: Η απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων μπορεί να γίνει γραφικά με διαγράμματα Venn.

Η ισχύς τους μπορεί να διαπιστωθεί με αριθμητικά παραδείγματα.

Απόδειξη γραφική της ιδιότητας.

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma), \quad (1)$$



Παρατηρούμε ότι και τα δύο μέλη της ισότητας εκφράζουν την ίδια καμπυλόγραμμη περιοχή στα δύο παραπάνω σχήματα.

Επομένως έχει αποδειχθεί γραφικά η ιδιότητα (1).

ΑΡΝΟΣ

Απόδειξη αριθμητική της ιδιότητας

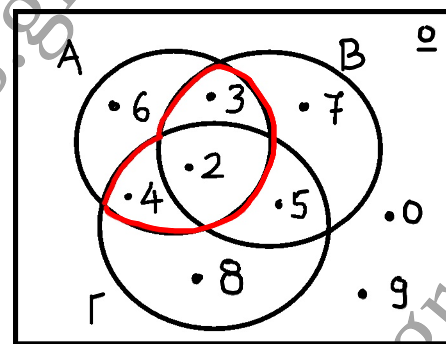
$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

Έστω το βασικό σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 7, 8, 9\}$ και τα σύνολα:

$A = \{2, 3, 4, 6\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$

$\Gamma = \{2, 4, 5, 8\}$



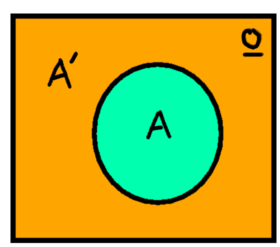
Έχουμε:

- $A \cap (B \cup \Gamma) = \{2, 3, 4, 6\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
  $= \{2, 3, 4\}$
- $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = \{2, 3\} \cup \{2, 4\}$
  $= \{2, 3, 4\}$

Άρα: $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

Συμπλήρωμα συνόλου

Αν Ω είναι ένα σύνολο αναφοράς και A ένα υποσύνολό του, τότε το σύνολο των στοιχείων του Ω τα οποία δεν ανήκουν στο A λέγεται συμπλήρωμα του A (ως προς το Ω.



Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με A' ή A^c ή $C_\Omega A$

Συμβολικά γράφουμε:

$$A' = \{x \in \Omega \,/\, x \notin A\}$$

Από τον ορισμό και με τη βοήθεια του διαγράμματος διαπιστώνουμε ότι ισχύουν:

1. $A \cap A' = \emptyset$
2. $A \cup A' = \Omega$
3. $(A')' = A$
4. $\Omega' = \emptyset$
5. $\emptyset' = \Omega$

Διαφορά δύο συνόλων

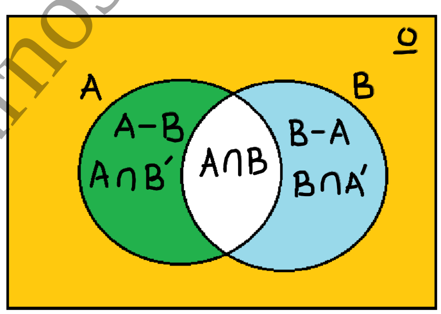
Ορίζουμε ως διαφορά του συνόλου Β από το σύνολο Α, που συμβολίζουμε Α − Β το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο σύνολο Β.

Συμβολικά έχουμε:

$$A - B = \{x \in \Omega \,/\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$$

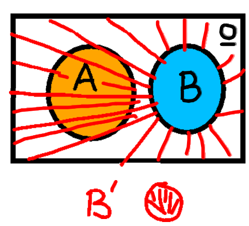
Με όμοιο τρόπο ορίζεται και η διαφορά του συνόλου Α από το σύνολο Β.

$$B - A = \{x \in \Omega \,/\, x \in B \text{ και } x \notin A\}$$



Σημειώσεις:

1. Είναι: $A - B = A \cap B'$
   $B - A = B \cap A'$
2. Αν $A = B$ τότ $A' = B'$ και
   $A - B = A \cap B' = A \cap A' = \emptyset$
3. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε: $A - B = A \cap B' = A$



Με τη βοήθεια του διαγράμματος διαπιστώνουμε ότι ισχύουν:

1. $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$
2. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
3. $(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset$

ΑΡΝΟΣ

4. $(B-A)\cup(A\cap B)=B$

5. $(A-B)\cap(A\cap B)\cap(B-A)=\emptyset$

6. $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

Σχετικά με τους πληθάριθμους ισχύουν:

1. $N(A\cup B)=N(A)+N(B)-N(A\cap B)$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow N(A\cap B)=N(A)+N(B)-N(A\cup B)\\ \text{Όμως: } N(A\cap B)\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(A)+N(B)-N(A\cup B)\geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{N(A\cup B)\leq N(A)+N(B)}\ ,\ (1)$$

- Η (1) ισχύει σαν ισότητα όταν $A\cap B=\emptyset$ γιατί τότε είναι $N(A\cap B)=0$.
- Η (1) γενικεύεται και ισχύει για περισσότερα σύνολα. Δηλ.

$$\boxed{N(A\cup B\cup \Gamma)\leq N(A)+N(B)+N(\Gamma)}$$

- Επιπλέον ισχύει η ισότητα

$$\boxed{N(A\cup B\cup\Gamma)=N(A)+N(B)+N(\Gamma)-N(A\cap B)-N(A\cap\Gamma)-N(B\cap\Gamma)+N(A\cap B\cap\Gamma)}$$

$$\left.\begin{array}{l}2.\ N(A-B)=N(A)-N(A\cap B)\\ 3.\ N(B-A)=N(B)-N(A\cap B)\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow N(A-B)+N(B-A)=N(A)+N(B)-2N(A\cap B)$$

Όμως: $(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$, (2)

$$\overset{(2)}{\Longrightarrow}\boxed{N[(A-B)\cup(B-A)]=N(A)+N(B)-2N(A\cap B)}\ ,\ (3)$$

Συμμετρική διάφορα ή διαζευκτικό άθροισμα ή απλά άθροισμα συνόλων

Το σύνολο $(A-B)\cup(B-A)$ που αποτελείται από τα στοιχεία του βασικού συνόλου Ω που ανήκουν μόνο στο σύνολο A ή μόνο στο σύνολο ονομάζεται Συμμετρική διαφορά ή διαζευκτικό άθροισμα ή απλά άθροισμα συνόλων και συμβολίζεται $A \dot{+} B$

Δηλαδή είναι: $A \dot{+} B = (A-B)\cup(B-A)$, διαβάζεται "Μόνο A ή μόνο B" και έχει πληθάριθμο:

$$N(A \dot{+} B) = N(A) + N(B) - 2N(A\cap B).$$

Επίσης ισχύουν:

$$A \dot{+} B = (A\cup B) - (A\cap B) \quad \text{και}$$

$$N(A \dot{+} B) = N(A\cup B) - N(A\cap B)$$

Παράδειγμα.

Ένα ξενοδοχείο την καλοκαιρινή περίοδο απασχολεί 200 συνολικά υπαλλήλους. Από αυτούς οι 110 μιλούν Αγγλικά, οι 70 μιλούν Γαλλικά, ενώ 40 μιλούν Αγγλικά και Γαλλικά. Να βρείτε πόσοι υπάλληλοι μιλούν:

α) Αγγλικά είτε Γαλλικά

β) μόνο Αγγλικά

γ) μόνο Γαλλικά

δ) μόνο Αγγλικά ή μόνο Γαλλικά

ε) δεν μιλούν Αγγλικά είτε Γαλλικά

Απάντηση

Αν $A = \{x / x$ υπάλληλος που μιλάει Αγγλικά$\}$

και $\Gamma = \{x / x$ υπάλληλος που μιλάει Γαλλικά$\}$

τότε έχουμε:

α) $N(A\cup\Gamma)=N(A)+N(\Gamma)-N(A\cap\Gamma)$
$=110+70-40$

$\Rightarrow N(A\cup\Gamma)=140$, υπάλληλοι μιλούν Αγγλικά είτε Γαλλικά.

β) $N(A-\Gamma)=N(A)-N(A\cap\Gamma)$
$=110-40$

$\Rightarrow N(A-\Gamma)=70$, υπάλληλοι μιλούν μόνο Αγγλικά.

γ) $N(\Gamma-A)=N(\Gamma)-N(\Gamma\cap A)$
$=70-40$

$\Rightarrow N(\Gamma-A)=30$, υπάλληλοι μιλούν μόνο Γαλλικά

δ) $N(A\dot{-}\Gamma)=N(A)+N(\Gamma)-2N(A\cap\Gamma)$
$=110+70-2\cdot 40$

$\Rightarrow N(A\dot{-}\Gamma)=100$, υπάλληλοι μιλούν μόνο Αγγλικά ή μόνο Γαλλικά

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο:
$N(A\dot{-}\Gamma)=N(A\cup\Gamma)-N(A\cap\Gamma)=140-40=100.$

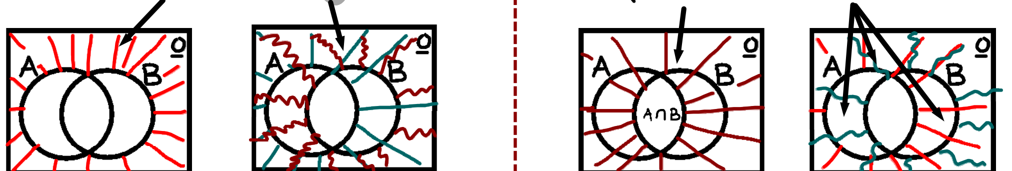
ε) $N[(A\cup\Gamma)']=N(\Omega)-N(A\cup\Gamma)$
$=200-140$

$\Rightarrow N[(A\cup\Gamma)']=60$, υπάλληλοι δεν μιλούν Αγγλικά είτε Γαλλικά.

Τύποι De Morgan

Ισχύουν οι τύποι:

1. $(A\cup B)'=A'\cap B'$ 2. $(A\cap B)'=A'\cup B'$



$(A\cup B)'$ A' B' $(A\cap B)'$ A' B'

ΑΡΝΟΣ

Διαμερισμός ή Διαμέριση συνόλου

Διαμερισμός ενός συνόλου $A \neq \emptyset$ λέγεται ένα σύνολο Δ από υποσύνολα $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ του A για τα οποία ισχύει:

1. $A_i \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ με $i, j \in \{1, 2, \cdots, \nu\}$
3. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_\nu = A$

Τα σύνολα $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$ λέγονται κλάσεις του διαμερισμού Δ.

Παραδείγματα:

1.

Τα παιδιά ενός 6-θέσιου Δημοτικού Σχολείου χωρίζονται (διαμερίζονται), σε 6 τάξεις (κλάσεις), Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄, Ε΄, ΣΤ΄.

Για τα υποσύνολα αυτά προφανώς ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του ορισμού.

2.

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{2, 3, 5, 8, 9, 25\}$ και τα σύνολα $A_1 = \{x \in A \,/\, x = \text{πολ}2\}$, $A_2 = \{x \in A \,/\, x = \text{πολ}3\}$ και $A_3 = \{x \in A \,/\, x = \text{πολ}5\}$.

Είναι: $A_1 = \{2, 8\}$, $A_2 = \{3, 9\}$ και $A_3 = \{5, 25\}$.

Παρατηρούμε ότι: $A_1, A_2, A_3 \subset A$ και

- $A_1 \neq \emptyset$, $A_2 \neq \emptyset$, $A_3 \neq \emptyset$
- $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $A_3 \cap A_1 = \emptyset$
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$.

Επομένως τα υποσύνολα A_1, A_2, A_3 είναι κλάσεις του διαμερισμού $\Delta = \{A_1, A_2, A_3\}$.

ΑΡΝΟΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ - ΙΔΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. Υποσύνολο

$B \subseteq A \Rightarrow$ για κάθε $x \in B \Rightarrow x \in A$.

Δεχόμαστε ότι: $\emptyset \subseteq A$ για κάθε σύνολο A

2. Γνήσιο Υποσύνολο

$B \subset A \Leftrightarrow$ ($B \subseteq A$ και υπάρχει $x \in A$ με $x \notin B$)

3. Δυναμοσύνολο

Αν $N(A) = \nu$ τότε $N(\wp(A)) = 2^{\nu}$

4. Ισότητα συνόλων

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ και $B \subseteq A)$

5. Υποσύνολο - Ιδιότητες

i) $A \subseteq A$, (αυτοπαθής - ανακλαστική)

ii) $(A \subseteq B$ και $B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$, (αντισυμμετρική)

iii) $(A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma) \Rightarrow A \subseteq \Gamma$, (μεταβατική)

6. Ένωση συνόλων - Ιδιότητες

i) $A \cup B = B \cup A$, (ανακλαστική)

ii) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$, προσεταιριστική

iii) $A \cup \emptyset = A$, (ιδιότητα του κενού συνόλου)

iv) Αν $A \subseteq \Omega$ τότε $A \cup \Omega = \Omega$, (Ιδιότητα του βασικού συνόλου)

v) $A \cup A = A$, (ιδιότητα του αδύναμου στοιχείου)

$\left.\begin{array}{l}\text{vi) } A \subseteq A \cup B \text{ και } B \subseteq A \cup B \\ \text{vii) } A \subseteq B \Rightarrow A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Gamma\end{array}\right\}$ Ιδιότητες εγκλεισμού

viii) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

7. Τομή συνόλων - Ιδιότητες

i) $A \cap B \subseteq A \cup B$

ii) $A \cap B = B \cap A$, (αντιμεταθετική)

iii) $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$, (προσεταιριστική)

iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$ ιδιότητα του κενού

v) Αν $A \subseteq \Omega$ τότε $A \cap \Omega = A$, ιδιότητα του βασικού συνόλου Ω

vi) $A \cap A = A$, ιδιότητα του αδύναμου στοιχείου

vii) $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
viii) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$
} Ιδιότητες εγκλεισμού

ix) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

8. Σχέση ένωσης και τομής συνόλων.

i) Επιμεριστική ιδιότητα της ένωσης ως προς την τομή συνόλων.

- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $(B \cap \Gamma) \cup A = (B \cap A) \cup (\Gamma \cap A)$

ii) Επιμεριστική ιδιότητα της τομής ως προς την ένωση συνόλων.

- $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
- $(B \cup \Gamma) \cap A = (B \cap A) \cup (\Gamma \cap A)$

9. Ιδιότητες του συμπληρώματος συνόλου.

i) $\emptyset' = \Omega$ και $\Omega' = \emptyset$

ii) $A \cap A' = \emptyset$ και $A \cup A' = \Omega$

iii) $(A')' = A$

iv) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ } Τύποι De Morgan

v) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

vi) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

10. Διαφορά συνόλων – Ιδιότητες

i) $A - B = A \cap B'$

ii) $A - B \neq B - A$

iii) $(A - B) - \Gamma \neq A - (B - \Gamma)$

iv) $A - A = A \cap A' = \emptyset$

v) $A \cap (B - \Gamma) = (A \cap B) - (A \cap \Gamma)$

vi) $A \cup (B - \Gamma) \neq (A \cup B) - (A \cup \Gamma)$

vii) $A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$

viii) $(A - B) - \Gamma = A - (B \cup \Gamma)$

ix) $(A - B) - \Gamma = (A - \Gamma) - (B - \Gamma)$

} Αποδεικνύονται κάνοντας χρήση της $A - B = A \cap B'$

11. Συμμετρική διαφορά ή διαζευκτικό άθροισμα

Ιδιότητες

i) $A \dotplus B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ii) Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $A \dotplus B = A \cup B$

iii) $A \dotplus \emptyset = A$

iv) $A \dotplus B = B \dotplus A$

v) $A \dotplus (B \dotplus \Gamma) = (A \dotplus B) \dotplus \Gamma$

vi) $A \cap (B \dotplus \Gamma) = (A \cap B) \dotplus (A \cap \Gamma)$

vii) $A \dotplus (B \cup \Gamma) \neq (A \cup B) \dotplus (A \cup \Gamma)$