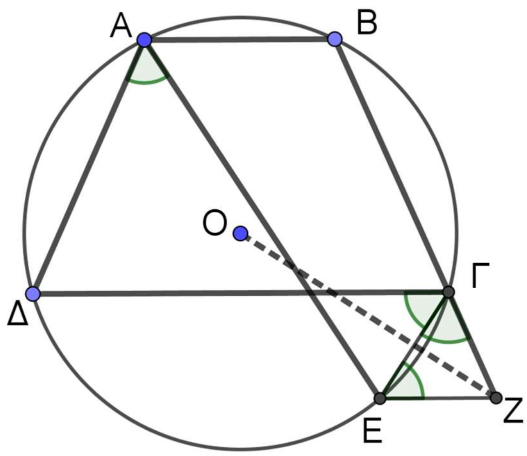
Δίνεται ότι η ΑΕ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$, και $\mathrm{EZ}||\Delta\Gamma$, ενώ γνωρίζουμε ότι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες . Έτσι, έχουμε

$$\mathrm{Z\hat{E}\Gamma} = \mathrm{E\hat{\Gamma}\Delta} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2}.$$

Αφού το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο, έχουμε $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}}$, και αφού $\mathrm{EZ}||\Delta\Gamma$ είναι

$$\mathrm{E\hat{Z}\Gamma} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{B} = 180° - \widehat{\mathrm{B}} = 180° - \widehat{\mathrm{A}}.$$



Άρα στο τρίγωνο ΕΖΓ είναι

$$\mathrm{E\hat{\Gamma}Z} = 180° - \mathrm{E\hat{Z}\Gamma} - \mathrm{Z\hat{E}\Gamma} = 180° - \left(180° - \widehat{\mathrm{A}}\right) - \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \frac{\widehat{\mathrm{A}}}{2} = \mathrm{Z\hat{E}\Gamma}.$$

Επομένως, το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{EZ} = \Gamma\mathrm{Z}$. Αφού $\mathrm{OE} = \mathrm{O}\Gamma$, τα σημεία Ο και Ζ ορίζουν την μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος ΕΓ. Συνεπώς, η ευθεία ΟΖ είναι κάθετη στην ΕΓ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) = 4a\cdot\frac{4}{a} = 16.$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a+b+c+d = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.

Σε κάθε άλλη υποπερίπτωση, π.χ. αν

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=-1 \text{ και } \frac{c}{d}=\frac{d}{a}=1$$

παίρνουμε

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=2a\cdot\frac{2}{a}=4.$$

Στην τρίτη περίπτωση όπου

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{a}=-1,$$

παίρνουμε $a+b=b+c=c+d=d+a=0$, οπότε $a=c$ και $b=d$ και η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0, αφού $a+b+c+d=0$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ είναι το 16, το 4 και το 0.

Πρόβλημα 2. Να εξετάσετε αν υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος, ώστε κάποιος από τους αριθμούς

$$\mathrm{A}=2023\cdot 10^{n}+6,$$

να ισούται με τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει τέτοιος θετικός ακέραιος. Έστω ότι

$$\mathrm{A}=2023\cdot 10^{n}+6=x^{2}, \text{ για κάποιο ακέραιο } x.$$

(1ος τρόπος) Αφού ο Α είναι άρτιος, θα είναι $x=2y$ για κάποιο ακέραιο y, οπότε θα έχουμε

$$2023\cdot 10^{n}+6=4y^{2}$$

ή ισοδύναμα, αφού διαιρέσουμε με το 2,

$$10115\cdot 10^{n-1}+3=2y^{2}$$

Εάν $n=1$, η τελευταία σχέση δίνει $y^2=5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2<5059<72^2$).
Εάν $n>1$, το αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης είναι περιττός αριθμός, ενώ το δεξί είναι άρτιος, άτοπο. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(2ος τρόπος) Αν $n=1$, τότε $\mathrm{A}=20236=4\cdot 5059$, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ($71^2<5059<72^2$).

Εάν $n>1$, τότε ο αριθμός $\mathrm{A}-2=2023\cdot 10^{n}+4$ διαιρείται με το 4. Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x=4k+\upsilon$, με k ακέραιο και $0\leq\upsilon\leq 3$ βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 κατά τη διαίρεση του με το 4. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

(3ος τρόπος) Αφού το 2023 είναι πολλαπλάσιο του 7, βλέπουμε ότι ο Α αφήνει υπόλοιπο 6 κατά τη διαίρεσή του με το 7.
Θεωρώντας τις περιπτώσεις $x = 7k + \upsilon$, με k ακέραιο και $0 \leq \upsilon \leq 6$, βλέπουμε ότι το τετράγωνο του ακέραιου αριθμού x αφήνει υπόλοιπο 0, 1, 2 ή 4 κατά τη διαίρεσή του με το 7. Συνεπώς, ο Α δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 3. Δίνονται τα τριώνυμα $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $Q(x) = x^2 + \gamma x + \delta$, με $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ακέραιους, τέτοια ώστε $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$. Να δειχθεί ότι το άθροισμα $\alpha + \gamma$ και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσια του 2023.

Λύση. (**1ος τρόπος**) Αφού $P(2022) = Q(1)$ παίρνουμε

$$2022^2 + 2022\alpha + \beta = 1 + \gamma + \delta,$$

οπότε

$$\gamma + \delta + \alpha - \beta = 2023\alpha + 2022^2 - 1 = 2023(\alpha + 2021).$$

και αφού $Q(2022) = P(1)$ παίρνουμε $2022^2 + 2022\gamma + \delta = 1 + \alpha + \beta$, οπότε

$$\alpha + \beta + \gamma - \delta = 2023\gamma + 2022^2 - 1 = 2023(\gamma + 2021).$$

Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε $2(\beta - \delta) = 2023(\gamma - \alpha)$, οπότε

$$\beta - \delta = \frac{2023(\gamma - \alpha)}{2}.$$

Αφού το 2023 είναι περιττός αριθμός και η διαφορά $\beta - \delta$ είναι ακέραιος, θα πρέπει η διαφορά $\gamma - \alpha$ να είναι άρτιος. Συνεπώς η διαφορά $\beta - \delta$ είναι πολλαπλάσιο του 2023, και το άθροισμα

$$\alpha + \gamma = 2023(\gamma + 2021) - (\beta - \delta)$$

είναι πολλαπλάσιο του 2023.

(2^{ος} τρόπος)
Αφού $P(1) = Q(2022)$ και $P(2022) = Q(1)$, η εξίσωση

$$Q(x) = P(2023 - x),$$

έχει λύσεις $x = 1$ και $x = 2022$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$x^2 + \gamma x + \delta = (2023 - x)^2 + \alpha(2023 - x) + \beta,$$

ή, κάνοντας τις πράξεις, ισοδύναμα

$$(\alpha + \gamma + 4046)x = 2023\alpha + \beta - \delta + 2023^2.$$

Αν $\alpha + \gamma + 4046 \neq 0$, τότε η τελευταία εξίσωση έχει μοναδική λύση ως προς x, άτοπο. Άρα

$$\alpha + \gamma + 4046 = 0 \quad \text{και} \quad 2023\alpha + \beta - \delta + 2023^2 = 0.$$

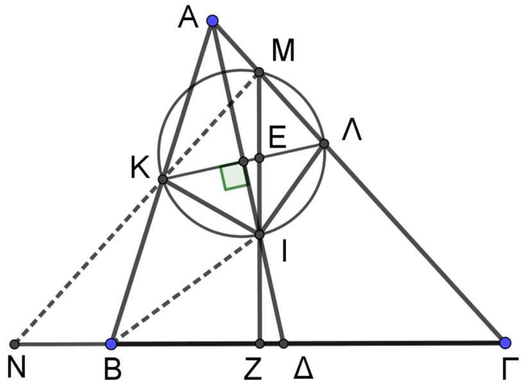
Συνεπώς,

$$\alpha + \gamma = -4046 \quad \text{και} \quad \beta - \delta = -2023\alpha - 2023^2,$$

δηλ. πολλαπλάσια του 2023.

Πρόβλημα 4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και το σημείο τομής των διχοτόμων του Ι. Έστω ότι η ευθεία ΑΙ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Δ.

Θεωρούμε σημείο Κ στην πλευρά ΑΒ τέτοιο ώστε ΒΚ = ΒΔ, και σημείο Λ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΛ = ΑΚ. Αν Μ είναι το σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΚΙΛ με την ΑΛ (διαφορετικό από το Λ), να αποδείξετε ότι η ευθεία ΜΙ είναι κάθετη στην ΒΓ.



Λύση

Τα τρίγωνα ΚΒΙ και ΔΒΙ είναι ίσα από ΠΓΠ (ΒΙ κοινή, ΒΚ = ΒΔ, ΚΒΙ = ΔΒΙ), οπότε

$$I\widehat{K}B = I\widehat{\Delta}B = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2},$$

ως εξωτερική στο τρίγωνο ΑΔΓ.
Έτσι στο τετράπλευρο ΚΙΔΒ είναι

$$K\widehat{I}\Delta = 360^\circ - \widehat{B} - 2\left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 360^\circ - \widehat{B} - 2\widehat{\Gamma} - \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{\Gamma}.$$

Τα τρίγωνα ΑΚΙ και ΑΛΙ είναι ίσα από ΠΓΠ (ΑΙ κοινή, ΑΚ = ΑΛ, ΚΑΙ = ΛΑΙ), οπότε

$$\Lambda\widehat{I}A = K\widehat{I}A = 180^\circ - K\widehat{I}\Delta = \widehat{\Gamma}.$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΚΙΛΜ παίρνουμε

$$A\widehat{M}K = K\widehat{I}\Lambda = 2 \cdot \Lambda\widehat{I}A = 2 \cdot \widehat{\Gamma}.$$

Από αυτό στο σημείο μπορούμε να συνεχίσουμε με δύο τρόπους:

(**1ος τρόπος**) Παρατηρούμε ότι $AI \perp K\Lambda$, οπότε $M\widehat{\Lambda}K = 90^\circ - \widehat{A}/2$, και

$$M\widehat{I}\Lambda = M\widehat{K}\Lambda = A\widehat{M}K - M\widehat{\Lambda}K = 2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{A}/2).$$

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΜΙ με την ΒΓ. Τότε έχουμε

$$Z\widehat{I}\Delta = A\widehat{I}M = A\widehat{I}\Lambda - M\widehat{I}\Lambda = \widehat{\Gamma} - (2 \cdot \widehat{\Gamma} - (90^\circ - \widehat{A}/2)) = 90^\circ - \widehat{A}/2 - \widehat{\Gamma}.$$

Έτσι

$$Z\widehat{I}\Delta + I\widehat{\Delta}Z = \left(90^\circ - \widehat{A}/2 - \widehat{\Gamma}\right) + \left(\widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2}\right) = 90^\circ$$

και άρα $I\widehat{Z}\Delta = 90^\circ$, όπως θέλαμε.

(**2ος τρόπος**) Έχουμε

$$M\widehat{K}I = 180^\circ - M\widehat{\Lambda}I = 180^\circ - A\widehat{\Lambda}I = \widehat{\Gamma} + \frac{\widehat{A}}{2} = I\widehat{K}B,$$

δηλαδή, το Ι είναι παράκεντρο του τριγώνου ΑΚΜ, και άρα η ΜΙ είναι η

διχοτόμος της γωνίας $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$. Έτσι, αν Ν είναι το σημείο τομής της ευθείας ΜΚ με την ευθεία ΓΒ, σχηματίζεται το ισοσκελές τρίγωνο ΝΜΓ με

$$\widehat{\mathrm{N}} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{N} - \mathrm{M}\widehat{\Gamma}\mathrm{N} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{K} - \widehat{\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Gamma} - \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}.$$

Αφού η ΜΙ διχοτομεί τη γωνία $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{M}}\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου ΝΜΓ, είναι κάθετη στην ΒΓ.

<u>Σχόλιο.</u> Ένας άλλος τρόπος για τη σχέση $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = \widehat{\Gamma}$ είναι ο εξής:
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΚΒΔ, βρίσκουμε

$$\mathrm{BK}\Delta = \mathrm{B}\Delta\mathrm{K} = 90^\circ - \widehat{\mathrm{B}}/2 = \widehat{\mathrm{A}}/2 + \widehat{\Gamma}/2.$$

Επειδή $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\mathrm{I} = \widehat{\mathrm{A}}/2 + \widehat{\Gamma}$, έχουμε ότι $\mathrm{I}\widehat{\Delta}\mathrm{K} = \mathrm{I}\widehat{\mathrm{K}}\Delta = \widehat{\Gamma}/2$. Άρα $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{I}}\mathrm{A} = \widehat{\Gamma}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c, d έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3}\right).$$

Λύση
Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{d}$ και $\frac{d}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{a} = 1.$$

Συνεπώς, όλοι τους είναι ίσοι με 1 ή δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1 ή όλοι τους είναι ίσοι με -1.

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c = d$, οπότε

$$(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} + \frac{1}{e}\right) = 16$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου δύο εξ αυτών είναι ίσοι με 1 και οι άλλοι δύο με -1, αν

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = -1 \text{ ή } \frac{b}{c} = \frac{d}{a} = -1,$$

τότε $a = -b$ και $c = -d$ ή $c = -b$ και $d = -a$ οπότε

$$a^3 + b^3 = 0 \text{ και } c^3 + d^3 = 0 \text{ ή } b^3 + c^3 = 0 \text{ και } a^3 + d^3 = 0$$

Επομένως έχουμε $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$, οπότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με 0.