Παρατηρούμε ότι το παιδί που έχει το φάκελο με τον αριθμό 20 δεν μπορεί να επιλεγεί, αφού εκατέρωθεν αυτού στον κύκλο έχει παιδιά με μικρότερους αριθμούς. Συνεπώς το μέγιστο το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν είναι το πολύ

$$19+18+17+16+15+14+13=112.$$

Επομένως δεν υπάρχει καμιά διάταξη των παιδιών ώστε το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Δίνεται η αριθμητική παράσταση

$$\mathrm{A}=\left[\frac{(-2)^{-10}}{(-8)^{-10}}+3\cdot\frac{32^6}{4^5}\right]^{100}:(12^2-4^2)^{300}$$

Να εκφράσετε την τιμή της παράστασης Α ως δύναμη με βάση το 2.

Λύση

$$\mathrm{A}=\left[\frac{(-2)^{-1}}{(-8)^{-10}}+3\cdot\frac{32^6}{4^5}\right]^{100}:(12^2-4^2)^{300}$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{-2}\right)^{10}+3\cdot\frac{(2^5)^6}{(2^2)^5}\right]^{100}:(144-16)^{300}$$

$$=\left[4^{10}+3\cdot\frac{2^{30}}{2^{10}}\right]^{100}:128^{300}=[(2^2)^{10}+3\cdot 2^{20}]^{100}:(2^7)^{300}$$

$$=[2^{20}+3\cdot 2^{20}]^{100}:(2^7)^{300}=(4\cdot 2^{20})^{100}:(2^7)^{300}$$

$$=(2^2\cdot 2^{20})^{100}:(2^7)^{300}$$

$$=(2^{22})^{100}:(2^7)^{300}=2^{2200}\cdot 2^{2100}=2^{100}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ο εξαψήφιος θετικός ακέραιος $\mathrm{A}=\overline{2023xy}$, όπου x,y ψηφία του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.
Να προσδιορίσετε τα ψηφία x,y έτσι ώστε ο αριθμός Α να διαιρείται με τον αριθμό 17.

Λύση

Έχουμε:

$$\mathrm{A}=2023xy=202300+10x+y=17\cdot 11900+10x+y,$$

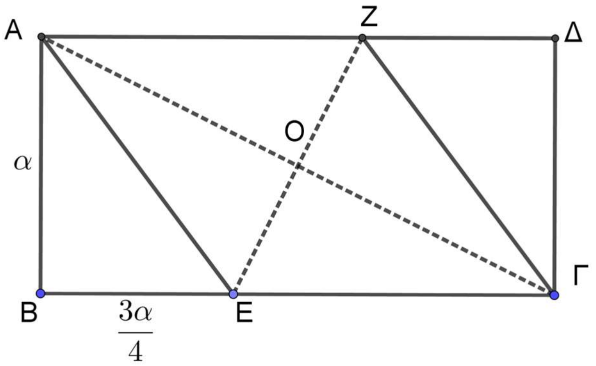
οπότε για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 17 αρκεί ο αριθμός $\overline{xy}=10x+y$ να διαιρείται με το 17, δηλαδή αρκεί $\overline{xy}=10x+y\in\{17,34,51,68,85\}$.
Άρα οι λύσεις είναι τα ζεύγη:

$$(x,y)\in\{(1,7),(3,4),(5,1),(6,8),(8,5)\}.$$

Πρόβλημα 3. Δίνονται 7 θετικοί ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους γνωρίζουμε ότι για οποιουσδήποτε 4 από αυτούς, το γινόμενό τους διαιρείται με το 10. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός (από τους αρχικούς 7) που διαιρείται με το 10.

Λύση. Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν 4 περιττοί αριθμοί, γιατί τότε το 10 δεν θα διαιρούσε το γινόμενό τους. Επομένως οι περιττοί αριθμοί είναι το πολύ τρεις. Άρα οι άρτιοι είναι τουλάχιστον τέσσερεις. Ομοίως, δεν να υπάρχουν 4 αριθμοί που να μην διαιρούνται με το 5, γιατί τότε το γινόμενό τους δεν διαιρείται με το 10. Συνεπώς υπάρχουν το πολύ 3 αριθμοί που δεν διαιρούνται με το 5, άρα τα πολλαπλάσια του 4 είναι τουλάχιστον 4. Τελικά εφόσον υπάρχουν 7 αριθμοί, υπάρχει κάποιος που είναι πολλαπλάσιο και του 2 και του 5, άρα πολλαπλάσιο του 10.

Πρόβλημα 4.



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $\mathrm{AB} = \alpha$, $\mathrm{B\Gamma} = 2\alpha$. Οι ευθείες ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλες και $\mathrm{BE} = \frac{3\alpha}{4}$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\mathrm{AE} = \mathrm{AZ}$.

(β) Η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ περνάει από το Ο που είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΖΕ.

(γ) $\mathrm{A\Gamma} = 2 \cdot \mathrm{EZ}$.

Σημείωση: *Στο φύλλο απαντήσεων να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση

(α) Επειδή ΑΒΓΔ ορθογώνιο έπεται ότι ΒΓ ∥ ΑΔ, οπότε θα είναι και ΕΓ ∥ ΑΖ. Επίσης, από την υπόθεση έχουμε ότι ΑΕ ∥ ΓΖ. Επομένως το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Από την υπόθεση έχουμε:

$$\mathrm{E\Gamma} = 2\alpha - \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\alpha}{4}. \qquad (1)$$

Επίσης, από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ προκύπτει:

$$\mathrm{AE}^2 = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BE}^2} = \sqrt{\alpha^2 + \frac{9\alpha^2}{16}} = \sqrt{\frac{25\alpha^2}{16}} \Rightarrow \mathrm{AE} = \frac{5\alpha}{4}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι: $\mathrm{AE} = \mathrm{E\Gamma}$, οπότε το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες και άρα είναι ρόμβος.

(β) Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ και το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ έχουν κοινή τη διαγώνιο ΑΓ. Επομένως η άλλη διαγώνιος εκάστου από αυτά θα περνάει από το μέσο της ΑΓ.

(γ) Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\mathrm{A\Gamma}^2 = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{B\Gamma}^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2} \Rightarrow \mathrm{A\Gamma} = \alpha\sqrt{5}. \qquad (3)$$

Για το εμβαδό του ρόμβου έχουμε:

$$E_{A\text{ΕΓΖ}} = \frac{1}{2}\cdot \text{ΑΓ}\cdot\text{ΕΖ} = \text{ΑΒ}\cdot\text{ΕΓ} \Rightarrow \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}\cdot EZ = \alpha\cdot\frac{5\alpha}{4} \Rightarrow \text{ΕΖ} = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}. \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $\text{ΑΓ} = 2\cdot\text{ΕΖ}$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς a, b, c έτσι ώστε οι αριθμοί $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ να είναι ακέραιοι. Να βρεθούν όλες οι δυνατές τιμές της παράστασης

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ έχουν γινόμενο

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = 1$$

Συνεπώς, είτε και οι τρεις θα είναι ίσοι με 1 είτε ένας εξ αυτών θα ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1.

(1ος τρόπος) Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε $a = b = c$, οπότε

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 3a\cdot\frac{3}{a} = 9.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, λόγω κυκλικής συμμετρίας, ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$\frac{a}{b} = 1, \qquad \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = -1 \implies a = b = -c \implies b + c = 0 = \frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0,$$

οπότε

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = a\cdot\frac{1}{a} = 1.$$

(2ος τρόπος) Ισχύει ότι

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)+1$$

Έτσι, αν και οι τρεις αριθμοί $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$ και $\frac{c}{a}$ είναι ίσοι με 1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $2\cdot 2\cdot 2+1 = 9$, ενώ αν ένας εξ αυτών ισούται με 1 και οι άλλοι δύο με -1, τότε η τιμή της παράστασης είναι ίση με $0 + 1 = 1$.

Συνεπώς, οι δυνατές τιμές της παράστασης $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ είναι το 9 και το 1.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y, με $y \neq -2$, ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x^2 - 4x + \frac{5}{y+2} = 2 \quad \text{και} \quad 3(x-2)^2 - \frac{4}{y+2} = -1.$$