



**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**84<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**

**20 Ιανουαρίου 2024**

**Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**Πρόβλημα 1.** Να αποδείξετε ότι το πηλίκο

$$A = \frac{v^{10} - v^6 - v^4 + 1}{v^7 - v^6 - v + 1}$$

είναι σύνθετος ακέραιος, για κάθε ακέραιο  $v \geq 2$ .

**Πρόβλημα 2.** Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{B} = 90^\circ$ . Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ και έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ το συμμετρικό του Ν ως προς το Β και έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας ΚΜ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΝΛ είναι κάθετη στην ευθεία ΚΓ.

**Πρόβλημα 3.** Να εξετάσετε αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε ο καθένας από αυτούς να ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των δύο άλλων.

**Πρόβλημα 4.** Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι τέτοιοι ώστε

$$\alpha + \beta + \gamma = 6 \text{ και } \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 9,$$

να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2 + 9)(\beta^2 + 9)(\gamma^2 + 9)}.$$

*Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες  
Καλή επιτυχία!*

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες*