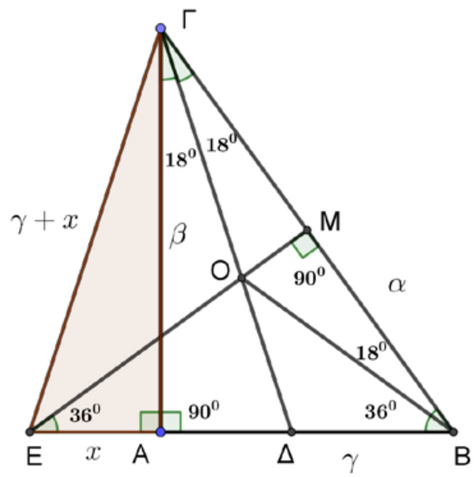


Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΕ έχουμε:

$$\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = 90^0 - \hat{\mathrm{B}} = 90^0 - 54^0 = 36^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{M} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\mathrm{O} \Rightarrow$ ΟΕΒ ισοσκελές με ΟΒ $=$ ΟΕ.
Άρα έχουμε αποδείξει ότι: ΟΒ $=$ ΟΓ $=$ ΟΕ.

(ii) Η γωνία $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε

$$\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = 54^0 + 18^0 = 72^0.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ (ΕΒ $=$ ΕΓ), έχουμε:

$$\Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = \mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot \hat{\mathrm{B}} = 180^0 - 2 \cdot 54^0 = 72^0.$$

Άρα είναι $\mathrm{E}\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ και συνεπώς το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με ΓΔ $=$ ΓΕ.

2. Έστω ΑΕ $= x$. Επειδή ΕΜ μεσοκάθετη της ΒΓ θα είναι ΕΓ $=$ ΕΒ $= \gamma + x$.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\beta^2 + x^2 = (\gamma + x)^2 \Rightarrow \beta^2 + x^2 = \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x \Rightarrow 2\gamma x = \beta^2 - \gamma^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma}.$$

Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. Να αποδείξετε ότι το πηλίκο

$$\mathrm{A} = \frac{\nu^{10} - \nu^6 - \nu^4 + 1}{\nu^7 - \nu^6 - \nu + 1}$$

είναι σύνθετος ακέραιος, για κάθε ακέραιο $\nu \geq 2$.

Λύση

Ο παρονομαστής του κλάσματος γράφεται:

$$\nu^7-\nu^6-\nu+1=\nu^6(\nu-1)-(\nu-1)=(\nu-1)(\nu^6-1)$$
$$=(\nu-1)(\nu^3-1)(\nu^3+1)>0,$$

για κάθε θετικό ακέραιο $\nu\geq 2$. Ο αριθμητής του κλάσματος γράφεται:

$$\nu^{10}-\nu^6-\nu^4+1=\nu^6(\nu^4-1)-(\nu^4-1)=(\nu^4-1)(\nu^6-1)$$

$$=(\nu^2-1)(\nu^2+1)(\nu^6-1)=(\nu-1)(\nu+1)(\nu^2+1)(\nu^6-1).$$

Άρα το κλάσμα γίνεται:

$$\mathrm{A}=\frac{\nu^{10}-\nu^6-\nu^4+1}{\nu^7-\nu^6-\nu+1}=\frac{(\nu-1)(\nu+1)(\nu^2+1)(\nu^6-1)}{(\nu-1)(\nu^6-1)}=(\nu+1)(\nu^2+1)$$

και είναι σύνθετος ακέραιος, αφού οι αριθμοί $\nu+1$ και ν^2+1 είναι θετικοί ακέραιοι μεγαλύτεροι του 2, για κάθε $\nu\geq 2$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓμε $\widehat{\mathrm{B}}=90^\circ$. Έστω Μ το μέσο της υποτείνουσας ΑΓκαι έστω Ν το μέσο της πλευράς ΑΒ. Έστω Κ το συμμετρικό του Ν ως προς το Β και έστω Λ το σημείο τομής της ευθείας ΚΜ με την πλευρά ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΝΛ είναι κάθετη στην ευθεία ΚΓ.

Λύση

Λύση. **(1ος τρόπος)** Παρατηρούμε ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία η $\widehat{\mathrm{K}\mathrm{N}\Lambda}$ είναι συμπληρωματική της $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma$. Αφού η $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Gamma$ συμπληρωματική της $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}=\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\Lambda$. Έχουμε:

1. $\mathbf{K\widehat{N}\Lambda=N\widehat{K}\Lambda}$

Πράγματι, η ΒΓ είναι μεσοκάθετος του ΝΚ και άρα το τρίγωνο ΝΛΚ είναι ισοσκελές.

2. $\mathbf{NM\parallel B\Gamma}$ **και** $\mathbf{NM=BK}$.

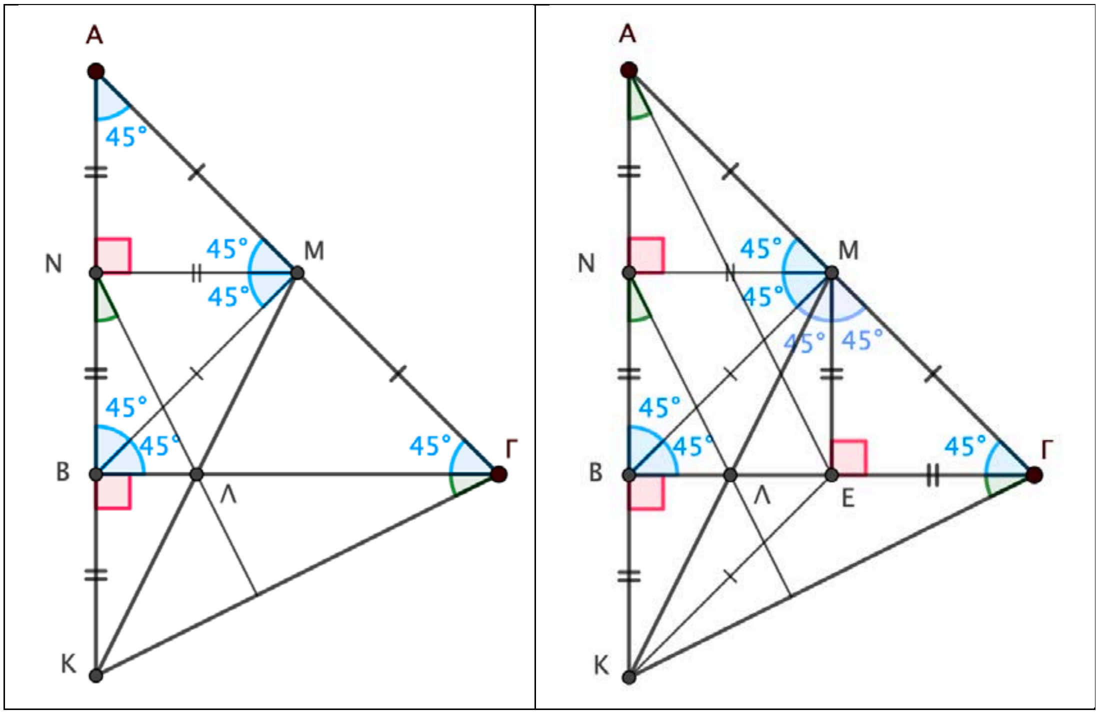
Πράγματι, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\widehat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ισοσκελές με $\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Gamma$. Το Μ είναι το μέσο της υποτείνουσας ΑΓ, οπότε η ΒΜ είναι η μεσοκάθετος της ΑΓ. Έτσι το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και ορθογώνιο, αφού $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{M}=\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{M}=45^\circ$. Αφού το σημείο Ν είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και $\mathrm{AM}=\mathrm{MB}$, η ΝΜ είναι η μεσοκάθετος της ΑΒ. Άρα $\mathrm{MN}\perp\mathrm{AB}$, και τα τρίγωνα ΑΝΜ και ΒΝΜ είναι ισοσκελή ορθογώνια. Έτσι $\mathrm{NM}\parallel\mathrm{B}\Gamma$ και $\mathrm{NM}=\mathrm{AN}=\mathrm{NB}=\mathrm{BK}$.

3. **Τα τρίγωνα ΚΝΜ και ΓΒΚ είναι ίσα**.

Πράγματι, είναι $\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{M}=90^\circ=\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{K}$, $\mathrm{KN}=\mathrm{AB}=\mathrm{B}\Gamma$ και $\mathrm{NM}=\mathrm{BK}$. Από το κριτήριο ΠΓΠ, τα ορθογώνια τρίγωνα ΚΝΜ και ΓΒΚ είναι ίσα, και άρα $\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M}=\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$.

4. $\mathbf{B\widehat{\Gamma}K=K\widehat{N}\Lambda}$.

Από την ισότητα των τριγώνων, έπεται ότι $\mathrm{B}\widehat{\Gamma}\mathrm{K}=\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\mathrm{M}=\mathrm{N}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda=\mathrm{K}\widehat{\mathrm{N}}\Lambda$, όπως θέλαμε. Συνεπώς, $\mathrm{N}\Lambda\perp\mathrm{K}\Gamma$.



($2^{ος}$ τρόπος) Έστω E το μέσο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$. Παρατηρούμε ότι

1. $\mathbf{B\widehat{A}E = B\widehat{\Gamma}K}$.

Πράγματι**,** τα ορθογώνια τρίγωνα ABE και $\mathrm{\Gamma BK}$ είναι ίσα, αφού έχουμε $\mathrm{AB = B\Gamma}$ και $\mathrm{BK = NB = \frac{AB}{2} = BE}$. Συνεπώς, $\mathrm{B\widehat{A}E = B\widehat{\Gamma}K}$.
Άρα η $\mathrm{B\widehat{A}E}$ είναι συμπληρωματική της $\mathrm{B\widehat{K}\Gamma}$, και αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{K\widehat{N}\Lambda = B\widehat{A}E}$.

2. **Το $\boldsymbol{\Lambda}$ είναι το μέσο της $\mathbf{BE}$.**

Πράγματι, όπως στον πρώτο τρόπο, παρατηρούμε ότι το τρίγωνο $\mathrm{ME\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, αφού το M ανήκει στη μεσοκάθετη του $\mathrm{A\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο $\mathrm{BM\Gamma}$ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, και κατά συνέπεια, το M ανήκει και στη μεσοκάθετη του $\mathrm{B\Gamma}$. Άρα $\mathrm{ME \perp B\Gamma}$ και $\mathrm{ME = E\Gamma = B\Gamma/2 = AB/2 = BK}$. Αφού οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες, τα τρίγωνα $\mathrm{KB\Lambda}$ και $\mathrm{ME\Lambda}$ είναι ίσα. Συνεπώς, $\mathrm{B\Lambda = \Lambda E}$, δηλ. το $\mathrm{\Lambda}$ είναι το μέσο της BE.

3. $\mathbf{\widehat{KN\Lambda} = \widehat{BAE}}$.

Από το Θεώρημα Θαλή ή αφού το N είναι το μέσο της AB και το $\mathrm{\Lambda}$ είναι το μέσο της BE, έπεται ότι $\mathrm{N\Lambda \parallel AE}$. Άρα, $\mathrm{K\widehat{N}\Lambda = B\widehat{A}E}$, ως εντός εναλλάξ. Συνεπώς, $\mathrm{N\Lambda \perp K\Gamma}$, όπως θέλαμε.

<u>Σχόλια.</u>

1. Εναλλακτικά, στον πρώτο τρόπο, ο ισχυρισμός 2 έπεται ως εξής: Αφού το N είναι το μέσο της πλευράς AB και το M είναι το μέσο της υποτείνουσας $\mathrm{A\Gamma}$, είναι $\mathrm{NM \parallel B\Gamma}$ και $\mathrm{NM = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{AB}{2} = BK}$.

2. Για τον ισχυρισμό 2 του δεύτερου τρόπο έχουμε εναλλακτικά: Τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΕΒΚ
είναι ορθογώνια ισοσκελή, οπότε ΜΕ ∥ ΒΚ, και αφού $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 45^\circ = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{K}$, και ΜΒ ∥ ΕΚ. Συνεπώς, το ΒΜΕΚ είναι παραλληλόγραμμο, κι άρα οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Επίσης, εναλλακτικά, αφούΝΜ ∥ ΒΓ και το Β είναι το μέσο του τμήματος ΝΚ, έπεται ότι το Λ είναι το μέσο της ΚΜ και $\mathrm{B\Lambda} = \frac{\mathrm{NM}}{2} = \mathrm{BE}/2$. Συνεπώς, το Λ είναι το μέσο της ΒΕ

Πρόβλημα 3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α, β, γ διαφορετικοί μεταξύ τους τέτοιοι ώστε ο καθένας από αυτούς να ισούται με το τετράγωνο του αθροίσματος των δύο άλλων.

Λύση (1ος τρόπος)
Έστω ότι υπάρχουν διαφορετικοί μεταξύ τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha = (\beta+\gamma)^2 \\ \beta = (\gamma+\alpha)^2 \\ \gamma = (\alpha+\beta)^2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma & (1) \\ \beta = \gamma^2+\alpha^2+2\gamma\alpha & (2) \\ \gamma = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta & (3) \end{Bmatrix}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη της δεύτερης από την πρώτη και της τρίτης από τη δεύτερη λαμβάνουμε:

$$\begin{Bmatrix} \alpha-\beta = (\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2\gamma) \\ \beta-\gamma = (\gamma-\beta)(\beta+\gamma+2\alpha) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha+\beta+2\gamma = -1 \\ \beta+\gamma+2\alpha = -1 \end{Bmatrix},$$

αφού $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\gamma - \alpha = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha, \text{ άτοπο.}$$

2ος τρόπος.
Έστω ότι υπάρχουν οι ζητούμενοι αριθμοί. Αν x είναι ένας από τους αριθμούς α, β, γ και $S = \alpha + \beta + \gamma$, τότε:

$$x = (S-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - (2S+1)x + S^2 = 0 \qquad (1)$$

Αν υπάρχουν δύο αριθμοί $x_1 \neq x_2$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1), τότε $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ και από τους τύπους Vieta προκύπτει ότι $x_1 + x_2 = 2S + 1 > S$, που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχουν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους αριθμοί που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

Πρόβλημα 4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ είναι τέτοιοι ώστε

$$\alpha + \beta + \gamma = 6 \text{ και } \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 9,$$

να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2+9)(\beta^2+9)(\gamma^2+9)}\,.$$

Λύση
Από τις υποθέσεις έχουμε:

$$\alpha^2 + 9 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$$

$$\beta^2 + 9 = \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\beta + \alpha)(\beta + \gamma)$$

$$\gamma^2 + 9 = \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι οι αριθμοί $(\alpha + \beta), (\beta + \gamma), (\gamma + \alpha)$, είναι ομόσημοι, και αφού $(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 12 > 0$, έπεται ότι:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) > 0$$

Άρα έχουμε:

$$A = \alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2 + 9)(\beta^2 + 9)(\gamma^2 + 9)} = \alpha\beta\gamma + |(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)|$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 6 \cdot 9 = 54.$$