

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34

106 79 ΑΘΗΝΑ

Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr



GREEK MATHEMATICAL SOCIETY

34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street

GR. 106 79 - Athens - HELLAS

Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025

e-mail : info@hms.gr

www.hms.gr

**ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ**  
**84<sup>ος</sup> ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ**  
**ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”**

**20 Ιανουαρίου 2024**

**Ενδεικτικές λύσεις**

**Β' Γυμνασίου**

**Πρόβλημα 1.** Να υπολογίσετε την τιμή των αριθμητικών παραστάσεων

$$A = (5^2 - 4^2) \cdot (2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2) \cdot 2024^0,$$

$$B = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3 \cdot 5^2)$$

και να εκφράσετε το πηλίκο  $\frac{A^{1012}}{B^{1012}}$  ως δύναμη με βάση το 3.

**Λύση**

$$A = (5^2 - 4^2) \cdot (2^3 - 2^2 + 1) + (10^2 - 8^2) \cdot 2024^0$$

$$= (25 - 16) \cdot (8 - 4 + 1) + (100 - 64) \cdot 1 = 9 \cdot 5 + 36 = 45 + 36 = 81 = 3^4.$$

$$B = (1 + 3 + 3^2 + 3^3 - 31) \cdot (1 + 5 + 5^2 + 5^3 - 3 \cdot 5^2)$$

$$= (1 + 3 + 9 + 27 - 31) \cdot (1 + 5 + 25 + 125 - 3 \cdot 25) = 9 \cdot 81 = 3^2 \cdot 3^4 = 3^6.$$

$$\frac{A}{B} = \frac{3^4}{3^6} = \frac{1}{3^2}, \text{ οπότε } \left(\frac{A}{B}\right)^{1012} = \left(\frac{3^4}{3^6}\right)^{1012} = (3^{-2})^{1012} = 3^{-2024}.$$

**Πρόβλημα 2.** Η Μαρία πριν να ανοίξουν τα Σχολεία πήγε για ψώνια στην αγορά. Εκεί από τα χρήματα που είχε μαζί της ξόδεψε το  $\frac{1}{8}$  των χρημάτων της για να αγοράσει τετράδια και το  $\frac{1}{4}$  των χρημάτων της για να αγοράσει βιβλία. Στη συνέχεια αγόρασε ένα φόρεμα με έκπτωση 20% ξοδεύοντας τα  $\frac{2}{3}$  των χρημάτων που της είχαν απομείνει. Μετά από αυτές τις αγορές η Μαρία διαπίστωσε ότι της είχαν απομείνει 50 ευρώ. Να βρείτε:

(α) Πόσα χρήματα είχε μαζί της η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά.

(β) Ποια ήταν η αρχική τιμή του φορέματος που αγόρασε πριν την έκπτωση.

**Λύση**

(α) Έστω ότι η Μαρία ξεκίνησε το πρωί με  $x$  ευρώ. Τότε πλήρωσε για τετράδια  $\frac{x}{8}$  και για βιβλία  $\frac{x}{4}$  ευρώ, δηλαδή

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{8} = \frac{3x}{8} \text{ ευρώ}$$

οπότε της έμειναν

$$x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8} \text{ ευρώ.}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε την εξίσωση:

$$x = \frac{3x}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5x}{8} + 50 \Leftrightarrow x = \frac{3x}{8} + \frac{10x}{24} + 50$$

$$\Leftrightarrow 24x = 9x + 10x + 1200 \Leftrightarrow 5x = 1200 \Leftrightarrow x = 240.$$

Άρα η Μαρία πηγαίνοντας στην αγορά είχε μαζί της 240 ευρώ.

(β) Η Μαρία πλήρωσε για το φόρεμα

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5x}{8} = \frac{10x}{24} = \frac{10 \cdot 240}{24} = 100 \text{ ευρώ}$$

οπότε η τιμή του πριν την έκπτωση του 20% ήταν

$$100 \cdot \frac{100}{80} = \frac{10000}{80} = 125 \text{ ευρώ.}$$

**2ος τρόπος για το (α) ερώτημα**

Όπως προηγουμένως, βρίσκουμε ότι είχαν απομείνει στη Μαρία  $\frac{5x}{8}$  ευρώ.

Επομένως τα 50 ευρώ είναι το  $\frac{1}{3} \cdot \frac{5x}{8} = \frac{5x}{24}$ , οπότε έχουμε

$$\frac{5x}{24} = 50 \Rightarrow 5x = 1200 \Rightarrow x = 240.$$

### Πρόβλημα 3

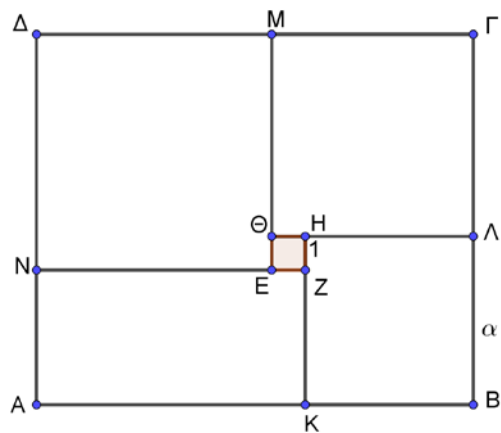
Στο διπλανό σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει υποδιαιρεθεί στα τετράγωνα

ΚΒΛΗ, ΕΖΗΘ, ΘΛΓΜ, ΝΕΜΔ

και στο ορθογώνιο ΑΚΖΝ.

Δίνεται ότι το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει πλευρά ίση με 1, το τετράγωνο ΚΒΛΗ έχει πλευρά ίση με  $\alpha$  και για το ορθογώνιο ΑΚΖΝ ισχύει η σχέση  $AK = 2 \cdot KZ$ .

Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  και το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.



**Λύση**

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$\Theta\Lambda = \alpha + 1, \quad ME = M\Theta + \Theta E = \Theta\Lambda + \Theta E = \alpha + 2,$$

$$AK = NZ = NE + EZ = ME + EZ = \alpha + 3, AN = KZ = \alpha - 1.$$

Επομένως, έχουμε:

$$AK = 2 \cdot KZ \Leftrightarrow \alpha + 3 = 2 \cdot (\alpha - 1) \Leftrightarrow \alpha + 3 = 2\alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

Άρα είναι

$$AB = AK + KB = \alpha + 3 + \alpha - 1 = 2\alpha + 2 = 12,$$

$$B\Gamma = B\Lambda + \Lambda\Gamma = \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = 11,$$

$$(AB\Gamma\Delta) = 12 \cdot 11 = 131.$$

**Πρόβλημα 4**

(α) Να γράψετε τον ακέραιο 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

(β) Να γράψετε την κλασματική μονάδα  $\frac{1}{2024}$  ως διαφορά δύο κλασματικών μονάδων με παρονομαστές μικρότερους του 2024, δηλαδή να βρείτε θετικούς ακέραιους  $\mu, \nu$  έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}$$

**Λύση**

(α)  $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ .

(β) Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμητή του κλάσματος  $\frac{1}{2024}$  ως διαφορά δύο διαιρετών του 2024 η οποία να ισούται με 1. Έχουμε

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23 - 2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} - \frac{2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{1}{88} - \frac{1}{92}$$