$$\alpha^2 + 9 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\alpha + \beta)(\alpha + \gamma)$$

$$\beta^2 + 9 = \beta^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\beta + \alpha)(\beta + \gamma)$$

$$\gamma^2 + 9 = \gamma^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = (\gamma + \alpha)(\gamma + \beta)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έπεται ότι οι αριθμοί $(\alpha + \beta), (\beta + \gamma), (\gamma + \alpha)$, είναι ομόσημοι, και αφού $(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\gamma + \alpha) = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 12 > 0$, έπεται ότι:

$$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) > 0$$

Άρα έχουμε:

$$A = \alpha\beta\gamma + \sqrt{(\alpha^2 + 9)(\beta^2 + 9)(\gamma^2 + 9)} = \alpha\beta\gamma + |(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)|$$

$$= \alpha\beta\gamma + (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 6 \cdot 9 = 54.$$

Β΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1. Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακέραιους ν που είναι λύσεις του συστήματος των ανισώσεων:

$$-45 \leq \frac{2025}{45 - \nu} \ \text{ και } \ \frac{2025}{45 - \nu} \leq 45 - \nu.$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. $0 \leq \nu < 45$. Τότε $45 - \nu > 0$ και έχουμε:

$$-45 \leq \frac{2025}{45 - \nu} \Leftrightarrow -2025 + 45\nu \leq 2025 \Leftrightarrow \nu \leq 90 \qquad (1)$$

$$\frac{2025}{45 - \nu} \leq 45 - \nu \Leftrightarrow 2025 \leq (45 - \nu)^2 \Leftrightarrow 45 - \nu \geq 45 \Leftrightarrow \nu \leq 0 \quad (2)$$

Οι ανισώσεις (1) και (2), υπό τη συνθήκη $0 \leq \nu < 45$, συναληθεύουν μόνο για $\nu = 0$.

2. $\nu > 45$. Τότε $45 - \nu < 0$ και έχουμε:

$$-45 \leq \frac{2025}{45 - \nu} \Leftrightarrow -2025 + 45\nu \geq 2025 \Leftrightarrow \nu \geq 90 \qquad (3)$$

$$\frac{2025}{45 - \nu} \leq 45 - \nu \Leftrightarrow 2025 \geq (45 - \nu)^2 \Leftrightarrow -45 + \nu \leq 45 \Leftrightarrow \nu \leq 90 \quad (4)$$

Οι ανισώσεις (3) και (4) συναληθεύουν μόνο για $\nu = 90$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και σημείο Ε στο εξωτερικό του, στο ίδιο ημιεπίπεδο της ΑΓ με το Β, τέτοιο ώστε $\mathrm{A\hat{E}\Gamma} = 90^0$ και $\mathrm{AE} = 2 \cdot \mathrm{E\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΕΔ διέρχεται από το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.

Λύση

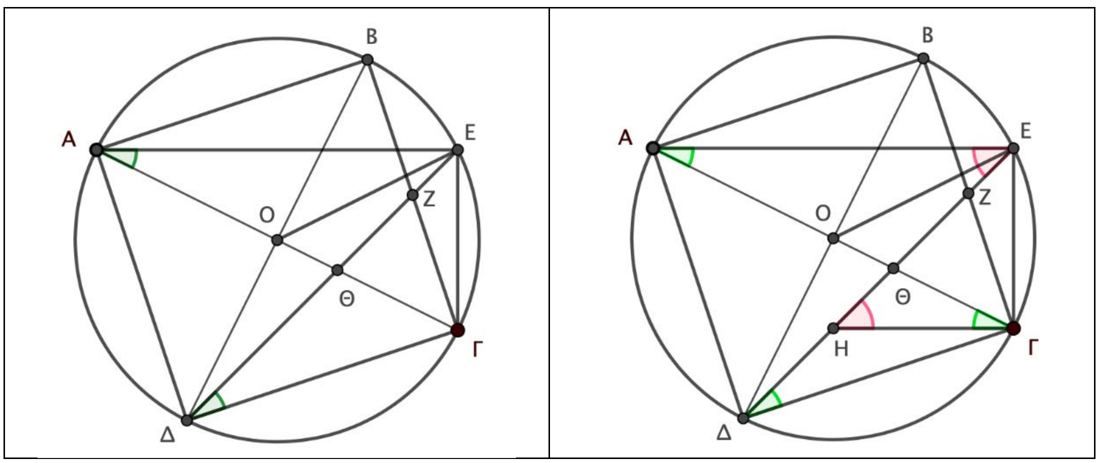
Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου. Το Ο είναι το μέσο της ΑΓ, οπότε η ΕΟ είναι η διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΕΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του ΑΓ και άρα ισούται με το μισό της. Έτσι,

$$\mathrm{OE} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OA} = \mathrm{O\Delta} = \mathrm{OB}.$$

Επομένως, το σημείο Ο ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Ε, Γ, και Δ, που σημαίνει ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΑ.

Έστω Ζ το σημείο τομής της ΕΔ με την πλευρά ΒΓ. Αφού οι εγγεγραμμένες γωνίες κύκλου οι οποίες βαίνουν στο ίδιο τόξο είναι ίσες, έπεται ότι

$$\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{Z}\widehat{\Delta}\Gamma.$$



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΓκαι ΖΔΓείναι όμοια. Αφού ΔΓ = ΒΓ, έχουμε

$$\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\Delta\Gamma} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και τριγωνομετρικά ως εξής:

$$\frac{\mathrm{Z\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}} = \text{εφ}\mathrm{Z}\widehat{\Delta}\Gamma = \text{εφ}\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{AE}} = \frac{1}{2}$$

Συνεπώς, το Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ του τετραγώνου.

(2ος τρόπος) Έστω Θ το σημείο τομής της ΕΔ με την ΑΓ και Η το σημείο τομής της ΕΔ με την παράλληλη ευθεία προς την ΑΕ από το Γ. Τότε τρίγωνα ΑΕΘ και ΓΗΘ είναι όμοια, κι αφού $\Gamma\widehat{\mathrm{H}}\Theta = \mathrm{H}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{A} = 45^\circ = \mathrm{H}\widehat{\mathrm{E}}\Gamma$, το τρίγωνο ΗΓΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ΗΓ=ΕΓ=ΑΕ/2. Έτσι

$$\frac{\mathrm{A}\Theta}{\Theta\Gamma} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{H\Gamma}} = 2$$

και άρα

$$\frac{2 \cdot \mathrm{О\Gamma}}{\Theta\Gamma} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\Theta\Gamma} = 1 + \frac{\mathrm{A}\Theta}{\Theta\Gamma} = 3$$

Άρα $\mathrm{O\Gamma} : \Theta\Gamma = 3 : 2$, οπότε το Θ είναι το βαρύκεντρο του ΔΒΓ. Άρα το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ.

Πρόβλημα 3. Τα 22 παιδιά μιας τάξης σχηματίζουν κύκλο έτσι ώστε κανένα παιδί να μην έχει και στις δύο γειτονικές του θέσεις δεξιά και αριστερά του αγόρι. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό των κοριτσιών της τάξης.

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν στη σειρά διαδοχικά 3 ή περισσότερα αγόρια, γιατί τότε ένα αγόρι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά να υπάρχουν το πολύ 2 αγόρια. Επίσης δεν πρέπει να υπάρχει κάποιο κορίτσι που έχει δίπλα του δυο αγόρια, γιατί τότε ένα κορίτσι θα είχε δύο γειτονικά αγόρια. Άρα πρέπει στη σειρά διαδοχικά να υπάρχουν τουλάχιστον 2 κορίτσια.
Έστω Κ ο αριθμός των κοριτσιών και ν_K οι ομάδες κοριτσιών πάνω στον κύκλο. Έστω Α ο αριθμός των αγοριών και ν_A οι ομάδες αγοριών πάνω στον κύκλο. Για κάθε ομάδα κοριτσιών πρέπει να ακολουθεί μία ομάδα αγοριών, γιατί διαφορετικά θα υπάρχει αγόρι με δύο γειτονικά αγόρια, δηλαδή πρέπει $\nu_K = \nu_A$.
Αν υποθέσουμε ότι $K \leq 11$, τότε $\nu_\kappa \leq 5$, οπότε $\nu_A \leq 5$ και $\mathrm{A} \leq 10$.
Άρα $\mathrm{K} + \mathrm{A} \leq 21$, άτοπο.
Άρα πρέπει $K \geq 12$. Παρατηρούμε ότι για Κ =12 μπορεί να υπάρχει υπόθεση του προβλήματος ως εξής:

$$AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KK\ AA\ KKKK$$

Πρόβλημα 4. Από όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων (m, n) που ικανοποιούν την

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{2024}$$

να βρείτε το ζεύγος με το μικρότερο δυνατό m.

Λύση

Μετά την απαλοιφή παρονομαστών, γράφουμε την εξίσωση στην μορφή

$$2024n - 2024m - mn = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2024 - m)(2024 + n) = 2024^2.$$

Για να βρούμε το μικρότερο δυνατό m, αρκεί ο $2024 - m < 2024$, να είναι ο μεγαλύτερος δυνατός διαιρέτης του 2024^2, που είναι μικρότερος του 2024.
Παρατηρούμε ότι $2024^2 = 2^6 \cdot 11^2 \cdot 23^2$ και για να βρούμε τον μεγαλύτερο διαιρέτη που δεν ξεπερνά τον 2024, αρκεί να ελέγξουμε τους

$$23^2 \cdot 2, 23 \cdot 11 \cdot 4, 11^2 \cdot 16, 11 \cdot 64.$$

Παρατηρούμε ότι ο $11^2 \cdot 16 = 1936$ είναι ο μεγαλύτερος, άρα η μικρότερη δυνατή τιμή του m είναι $2024 - 1936 = 88$. Σε αυτή την περίπτωση παίρνουμε $n = 92$. Πράγματι, έχουμε

$$\frac{1}{88} - \frac{1}{92} = \frac{1}{2024}.$$