



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
84^{ος} ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ “Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ”
20 Ιανουαρίου 2024
Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta, \text{ με } \alpha \neq 0, \beta \text{ ψηφία.}$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.

(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \frac{9n^2 + 15n + 10}{3n + 2}$$

είναι ακέραιος.

Πρόβλημα 3. Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της χώρας μας συμμετέχουν 14 ομάδες που η καθεμία παίζει με όλες τις άλλες δύο παιχνίδια. Μετά το τέλος όλων των παιχνιδιών οι 6 πρώτες ομάδες δημιουργούν έναν όμιλο στον οποίο οι ομάδες παίζουν μεταξύ τους ανά δύο από 2 παιχνίδια. Οι 8 υπόλοιπες ομάδες δημιουργούν δεύτερο όμιλο στον οποίο κάθε ομάδα παίζει με όλες τις άλλες μία μόνο φορά. Κάθε ομάδα παίρνει 3 βαθμούς για κάθε νίκη της, 1 βαθμό για κάθε ισοπαλία της και 0 βαθμούς για κάθε ήττα της.

(α) Να βρείτε πόσα παιχνίδια παίζονται συνολικά μέσα σε μία χρονιά.

(β) Αν σε μία χρονιά το σύνολο των βαθμών όλων των ομάδων ήταν 677, να βρείτε πόσα παιχνίδια έληξαν με ισοπαλία.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 54^\circ$. Η κάθετη στο μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ τέμνει τη διχοτόμο $\Gamma\Delta$ της γωνίας $\hat{\Gamma}$ στο σημείο O και την ευθεία AB στο σημείο E . Έστω $A\Gamma = \beta$, $AB = \gamma$, $B\Gamma = \alpha$.

(α) Να αποδείξετε ότι: (i) $OB = OG = OE$,
(ii) $\Gamma\Delta = \Gamma E$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AE συναρτήσει των μηκών α, β, γ των πλευρών του τριγώνου $AB\Gamma$.

Σημείωση. Να κάνετε στο φύλλο απαντήσεων το δικό σας σχήμα.

