Λύση

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$\mathrm{\Theta\Lambda} = \alpha + 1, \qquad \mathrm{ME} = \mathrm{M\Theta} + \mathrm{\Theta E} = \mathrm{\Theta\Lambda} + \mathrm{\Theta E} = \alpha + 2,$$

$$\mathrm{AK} = \mathrm{NZ} = \mathrm{NE} + \mathrm{EZ} = \mathrm{ME} + \mathrm{EZ} = \alpha + 3, \mathrm{AN} = \mathrm{KZ} = \alpha - 1.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{AK} = 2 \cdot \mathrm{KZ} \Leftrightarrow \mathrm{\alpha} + 3 = 2 \cdot (\alpha - 1) \Leftrightarrow \alpha + 3 = 2\alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha = 5.$$

Άρα είναι

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AK} + \mathrm{KB} = \alpha + 3 + \alpha - 1 = 2\alpha + 2 = 12,$$

$$\mathrm{B\Gamma} = \mathrm{B\Lambda} + \mathrm{\Lambda\Gamma} = \alpha + \alpha + 1 = 2\alpha + 1 = 11,$$

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = 12 \cdot 11 = 131.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να γράψετε τον ακέραιο 2024 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.
(β) Να γράψετε την κλασματική μονάδα $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο κλασματικών μονάδων με παρονομαστές μικρότερους του 2024, δηλαδή να βρείτε θετικούς ακέραιους μ, ν έτσι ώστε:

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu}$$

Λύση

(α) $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$.

(β) Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμητή του κλάσματος $\frac{1}{2024}$ ως διαφορά δύο διαιρετών του 2024 η οποία να ισούται με 1. Έχουμε

$$\frac{1}{2024} = \frac{1}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23 - 2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{23}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} - \frac{2 \cdot 11}{2^3 \cdot 11 \cdot 23} = \frac{1}{88} - \frac{1}{92}$$

Γ΄ Γυμνασίου

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τους θετικούς ακέραιους της μορφής

$$\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta, \text{ με } \alpha \neq 0, \beta \text{ ψηφία.}$$

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε ακέραιος που γράφεται στην παραπάνω μορφή είναι πολλαπλάσιο του 11.
(β) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους της παραπάνω μορφής που είναι πολλαπλάσια του 4 και του 9 και να γράψετε καθέναν από αυτούς ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Λύση

(α) $\overline{\alpha\alpha\beta\beta} = 1000\alpha + 100\alpha + 10\beta + \beta = 1100\alpha + 11\beta = 11 \cdot 100\alpha + 11\beta$

$$= 11 \cdot (100\alpha + \beta) = \text{πολ.}11.$$

(β) Επειδή αριθμός $\mathrm{A} = \overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 4 έπεται ότι ο ακέραιος $\overline{\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 4, οπότε πρέπει:

$$\beta = 0 \text{ ή } \beta = 4 \text{ ή } \beta = 8. \qquad (1)$$

Επειδή αριθμός $\mathrm{A} = \overline{\alpha\alpha\beta\beta}$ είναι πολλαπλάσιο του 9, έπεται ότι το άθροισμα των ψηφίων του είναι πολλαπλάσιο του 9, δηλαδή $2(\alpha + \beta) \in \{9, 18, 27, 36\}$, οπότε

$$\alpha + \beta = 9 \text{ ή } \alpha + \beta = 18 \qquad (2)$$

- Αν $\beta = 0$ προκύπτει ότι $\alpha = 9$ και $\mathrm{A} = 9900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$.
- Αν $\beta = 4$ προκύπτει ότι $\alpha = 5$ και
  $\mathrm{A} = 5544 = 11 \cdot 504 = 11 \cdot 9 \cdot 56 = 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 = 11 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^3$.
- Αν $\beta = 8$ προκύπτει ότι $\alpha = 1$ και
  $\mathrm{A} = 1188 = 11 \cdot 108 = 11 \cdot 9 \cdot 12 = 11 \cdot 3^2 \cdot 3 \cdot 4 = 11 \cdot 3^3 \cdot 2^2$.

Πρόβλημα 2. Να προσδιορίσετε όλες τις τιμές του ακέραιου ν για τις οποίες ο αριθμός

$$\mathrm{A} = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2}$$

είναι ακέραιος.

Λύση

$$\mathrm{A} = \frac{9\nu^2 + 15\nu + 10}{3\nu + 2} = \frac{(3\nu + 2)^2 + 3\nu + 6}{3\nu + 2} = \frac{(3\nu + 2)^2 + (3\nu + 2) + 4}{3\nu + 2} =$$

$$= 3\nu + 3 + \frac{4}{3\nu + 2}.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (3\nu + 2) \mid 4 \Rightarrow 3\nu + 2 \in \{-1, 1, -2, 2, -4, 4\}.$$

Επειδή $\nu \in \mathbb{Z}$ έπεται ότι: $\nu \in \{-2, -1, 0\}$.

Πρόβλημα 3

Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου της χώρας μας συμμετέχουν 14 ομάδες που η καθεμία παίζει με όλες τις άλλες δύο παιγνίδια. Μετά το τέλος όλων των παιγνιδιών οι 6 πρώτες ομάδες δημιουργούν έναν όμιλο στον οποίο οι ομάδες παίζουν μεταξύ τους ανά δύο από 2 παιγνίδια. Οι 8 υπόλοιπες ομάδες δημιουργούν δεύτερο όμιλο στον οποίο κάθε ομάδα παίζει με όλες τις άλλες μία μόνο φορά. Κάθε ομάδα παίρνει 3 βαθμούς για κάθε νίκη της, 1 βαθμό για κάθε ισοπαλία της και 0 βαθμούς για κάθε ήττα της.

(α) Να βρείτε πόσα παιγνίδια παίζονται συνολικά μέσα σε μία χρονιά.
(β) Αν σε μία χρονιά το σύνολο των βαθμών όλων των ομάδων ήταν 677, να βρείτε πόσα παιγνίδια έληξαν με ισοπαλία.

Λύση
(α) Στην πρώτη φάση κάθε ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες 13 δύο φορές 2 φορές, οπότε έχουμε συνολικά $13 + 13 = 26$ αγωνιστικές σε κάθε μία από τις οποίες διεξάγονται $14 : 2 = 7$ παιγνίδια. Έτσι έχουμε στην πρώτη φάση

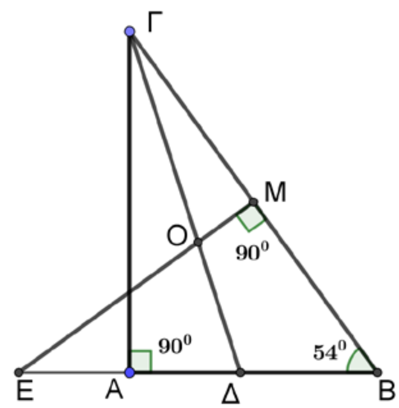
$$26 \cdot 7 = 182 \text{ παιγνίδια.}$$

Ομοίως στον όμιλο των 6 πρώτων ομάδων διεξάγονται: $10 \cdot 3 = 30$ παιγνίδια, ενώ στο όμιλο των υπόλοιπων 8 ομάδων διεξάγονται $4 \cdot 7 = 28$ παιγνίδια.

Άρα συνολικά έχουμε $182 + 30 + 28 = 240$ παιγνίδια.

(β) Αν όλα τα παιγνίδια έληγαν με νίκη μιας ομάδας, τότε θα είχαμε συνολικά το μέγιστο δυνατό αριθμό βαθμών, δηλαδή $240 \cdot 3 = 720$. Επειδή οι συνολικοί βαθμοί ήταν 677, αυτό σημαίνει ότι είχαμε και ισόπαλα παιγνίδια στα οποία οι βαθμοί για τις δύο ομάδες ήταν 2, δηλαδή κάθε ισόπαλο παιγνίδι μείωνε τον αριθμό των βαθμών κατά 1. Άρα τα ισόπαλα παιγνίδια ήταν $720 - 677 = 43$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{\mathrm{A}} = 90^0$ και $\widehat{\mathrm{B}} = 54^0$. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΓΔ της γωνίας $\widehat{\Gamma}$ στο σημείο Ο και την ευθεία ΑΒ στο σημείο Ε. Έστω $\mathrm{A\Gamma} = \beta$, $\mathrm{AB} = \gamma$, $\mathrm{B\Gamma} = \alpha$.
(α) Να αποδείξετε ότι:
(i) $\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OE}$
(ii) $\Gamma\Delta = \Gamma\mathrm{E}$.
(β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ συναρτήσει των μηκών των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.



Σημείωση. *Να κάνετε στο φύλλο απαντήσεων το δικό σας σχήμα.*

Λύση
1. Φέρουμε το τμήμα ΟΒ. Επειδή ΟΜ μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ έπεται ότι:

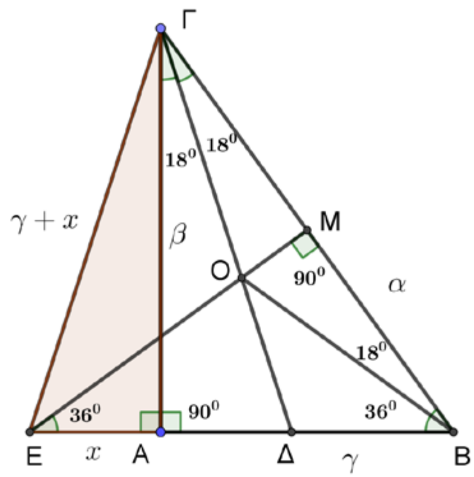
$$\mathrm{OB} = \mathrm{O\Gamma}.$$

Τότε το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και έχει

$$\mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{O}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{90^0 - 54^0}{2} = 18^0.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \widehat{\mathrm{B}} - \mathrm{O}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = 54^0 - 18^0 = 36^0.$$



Επίσης, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΜΕ έχουμε:

$$B\hat{E}M = 90^0 - \hat{B} = 90^0 - 54^0 = 36^0.$$

Άρα είναι $O\hat{B}E = B\hat{E}M = B\hat{E}O \Rightarrow$ ΟΕΒ ισοσκελές με ΟΒ = ΟΕ.
Άρα έχουμε αποδείξει ότι: ΟΒ = ΟΓ = ΟΕ.

(ii) Η γωνία $E\hat{\Delta}\Gamma$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΒΓ, οπότε

$$E\hat{\Delta}\Gamma = 54^0 + 18^0 = 72^0.$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ (ΕΒ = ΕΓ), έχουμε:

$$\Delta\hat{E}\Gamma = B\hat{E}\Gamma = 180^0 - 2 \cdot \hat{B} = 180^0 - 2 \cdot 54^0 = 72^0.$$

Άρα είναι $E\hat{\Delta}\Gamma = \Delta\hat{E}\Gamma$ και συνεπώς το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές με ΓΔ = ΓΕ.

2. Έστω $AE = x$. Επειδή ΕΜ μεσοκάθετη της ΒΓ θα είναι $E\Gamma = EB = \gamma + x$.
Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΓ και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$\beta^2 + x^2 = (\gamma + x)^2 \Rightarrow \beta^2 + x^2 = \gamma^2 + x^2 + 2\gamma x \Rightarrow 2\gamma x = \beta^2 - \gamma^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\gamma}.$$