ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

40η ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ «Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ»
18 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2023

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c} a+b+c=0 \\ ab^3+bc^3+ca^3=0 \end{array}\right\}.$$

Λύση (1ος τρόπος)
Γράφουμε $c=-a-b$, και αντικαθιστώντας στην δεύτερη σχέση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 0 = ab^3+b(-a-b)^3+(-a-b)a^3 &= -(-ab^3+b(a+b)^3+(a+b)a^3) \\ &= -(a^4\ +\ 2\,a^3\,b\ +\ 3\,a^2\,b^2\ +\ 2\,a\,b^3\ +\ b^4) \\ &= -(a^2(a+b)^2+b^2(a+b)^2+a^2b^2) \\ &= -a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2. \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε άθροισμα τετραγώνων, θα πρέπει καθένας από αυτούς να είναι μηδέν, δηλαδή $ab=bc=ca=0$. Επομένως, έπεται ότι δύο από τους αριθμούς πρέπει να είναι μηδέν και από την $a+b+c=0$, προκύπτει ότι και ο τρίτος θα είναι μηδέν, δηλαδή $a=b=c=0$.

2ος τρόπος
Οι όροι ab^3, bc^3, και ca^3 προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε το $a+b+c$ με το $a^3+b^3+c^3$:

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)=a^4+b^4+c^4+ab^3+bc^3+ca^3+ac^3+ba^3+cb^3 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι

$$(ab^3+bc^3+ca^3)-(ac^3+ba^3+cb^3)=ab(b^2-a^2)+bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)$$

Με το δεξί μέλος να είναι ίσο με

$$\begin{gathered} ab(a+b)(b-a)+bc(b+c)(c-b)+ca(a+c)(a-c)= \\ -abc(b-a+c-b+a-c)=0 \end{gathered}$$

Άρα

$$ac^3 + ba^3 + cb^3 = ab^3 + bc^3 + ca^3 = 0,$$

και αφού $a + b + c = 0$, η (1) δίνει

$$a^4 + b^4 + c^4 = 0.$$

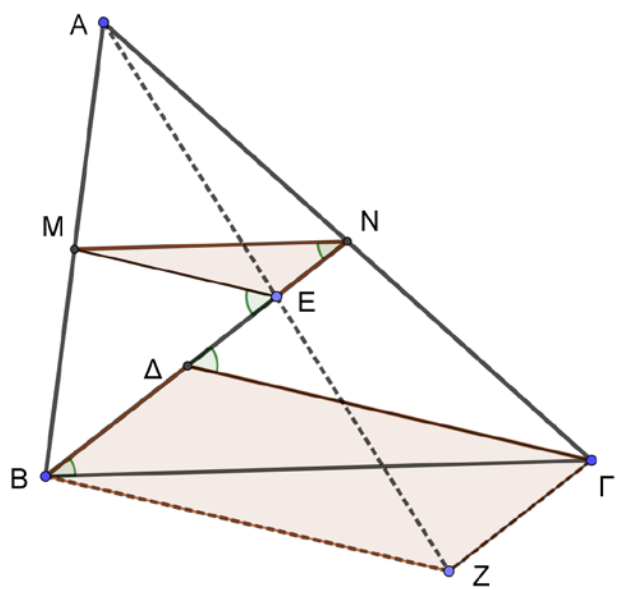
Συνεπώς, $a = b = c = 0$.

Πρόβλημα 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, αντίστοιχα. Θεωρούμε δύο σημεία Δ και Ε πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, έτσι ώστε ΓΔ ∥ ΜΕ και ΒΔ < ΒΕ. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{EN}.$$

Λύση



Σχήμα 1

1^{ος} τρόπος.

Επειδή ΜΕ ∥ ΓΔ έπεται ότι $\Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{E} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{E}}\Delta$, ως εντός εναλλάξ γωνίες. Επομένως,

$$180^0 - \Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{E} = 180^0 - \mathrm{M}\widehat{\mathrm{E}}\Delta \Rightarrow \mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{N} \quad (1)$$

Επειδή τα σημεία Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, αντίστοιχα έπεται ότι

$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{B\Gamma}, \quad \mathrm{MN} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}. \quad (2)$$

οπότε με τέμνουσα την ευθεία ΒΝ, έχουμε

$$\Delta\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{N}}\mathrm{E}, \quad (3)$$

ως εντός εναλλάξ γωνίες.

Από τις σχέσεις (1) και (3) προκύπτει ότι τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΜΕΝ είναι όμοια, οπότε

$$\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{MN}} = 2 \Rightarrow \mathrm{B\Delta} = 2 \cdot \mathrm{EN}.$$

$2^{ος}$ τρόπος

Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ευθεία ΒΝ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΕ στο σημείο Ζ. Επειδή Ν μέσο ΒΓ και ΝΕ ∥ ΓΖ, έπεται ότι: Ε μέσο ΑΖ και

$$\Gamma Z = 2 \cdot EN.$$

Επειδή Μ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΖ, αντίστοιχα, έπεται ότι:

$$ME \parallel B\Gamma\,.$$

Επομένως το τετράπλευρο ΒΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τα δύο ζεύγη των απέναντι πλευρών του ευθείες παράλληλες. Τότε θα είναι και

$$B\Delta = \Gamma Z = 2 \cdot EN.$$

$3^{ος}$ τρόπος

Έστω Θ το σημείο τομής των διαμέσων ΒΝ και ΜΓ, δηλαδή το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τότε

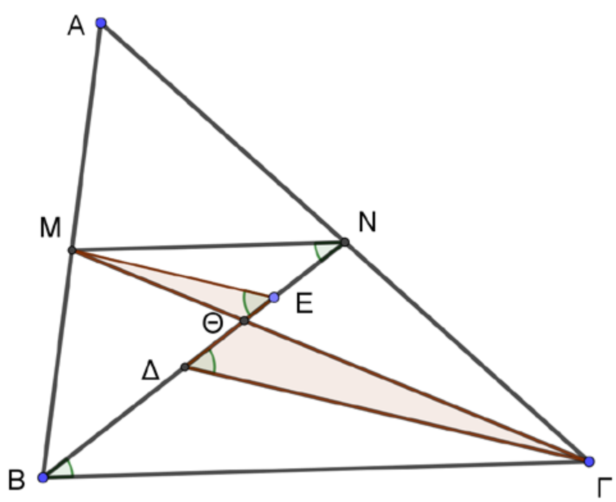
$$\frac{B\Theta}{\Theta N} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta M} = 2.$$

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΜΕΘ και ΓΔΘ προκύπτει ότι:

$$\frac{\Delta\Theta}{\Theta E} = \frac{\Gamma\Theta}{\Theta M} = 2.$$

Συνεπώς $\frac{B\Theta}{\Theta N} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta E}$ και άρα, από τις ιδιότητες των αναλογιών, έπεται ότι

$$\frac{B\Theta - \Delta\Theta}{\Theta N - \Theta E} = \frac{B\Delta}{EN} = 2.$$



Σχήμα 2

Πρόβλημα 3
Να βρείτε το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων που έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:
(α) Έχουν κορυφές σημεία (x, y) του επιπέδου Oxy, με x, y μη αρνητικούς ακεραίους και $x \leq 8$, $y \leq 8$.
(β) Έχουν πλευρές παράλληλες στους άξονες.
(γ) Έχουν εμβαδόν E, με $30 < E \leq 40$.

Λύση
Αρχικά παρατηρούμε ότι τα μήκη των πλευρών των ορθογωνίων πρέπει να είναι μικρότερα ή ίσα του 8.
Θα εξετάσουμε αρχικά ποιες τιμές για το εμβαδόν είναι δεκτές: Το 40 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο (με $x, y \leq 8$) ως $40 = 5 \cdot 8$. Τώρα ένα 5×8 ορθογώνιο μπορεί να μπει στο 8×8 με 4 τρόπους οριζόντια και 4 τρόπους κάθετα, άρα συνολικά έχουμε 8 ορθογώνια.
Τα 39, 38, 37, 34, 33, 31 έχουν κάποιον πρώτο παράγοντα μεγαλύτερο του 8, οπότε δεν μπορούν να γραφούν ως γινόμενο δύο αριθμών μικρότερων του 8. Το 36 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο (με $x, y \leq 8$) ως $36 = 6 \cdot 6$. Τώρα ένα 6×6 ορθογώνιο (τετράγωνο) μπορεί να μπει στο 8×8 με 3^2 τρόπους, άρα συνολικά έχουμε 9.
Το 35 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $35 = 5 \cdot 7$. Ένα 5×7 ορθογώνιο μπαίνει με $2 \cdot (4 \cdot 2) = 16$ τρόπους.
Το 32 γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $32 = 4 \cdot 8$. Ένα 4×8 ορθογώνιο μπορεί να μπει με $2 \cdot 5 = 10$ τρόπους.
Τελικά έχουμε $8 + 9 + 16 + 10 = 43$ οθρογώνια με τις ζητούμενες ιδιότητες.

Πρόβλημα 4
Να προσδιορίσετε όλους τους θετικούς ακέραιους $\alpha, \beta, \mu\varepsilon\ \alpha > 1$, που είναι τέτοιοι ώστε ο β είναι διαιρέτης του $\alpha - 1$ και ο $2\alpha + 1$ είναι διαιρέτης του $5\beta - 3$.

Λύση
Επειδή ο β είναι διαιρέτης του $\alpha - 1$ και ο $2\alpha + 1$ είναι διαιρέτης του $5\beta - 3$, με $\alpha > 1$, οι αριθμοί

$$x = \frac{\alpha - 1}{\beta} \text{ και } y = \frac{5\beta - 3}{2\alpha + 1}$$

είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε:

$$0 < xy = \frac{\alpha - 1}{\beta} \cdot \frac{5\beta - 3}{2\alpha + 1} < \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{5\beta}{2\alpha} = \frac{5}{2} \Rightarrow xy \in \{1,2\}.$$

- Αν $xy = 1$, τότε $x = y = 1$, οπότε προκύπτει το σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha - 1 = \beta \\ 2\alpha + 1 = 5\beta - 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha = \beta + 1 \\ 2(\beta + 1) + 1 = 5\beta - 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 3, \beta = 2}.$$

- Αν $xy = 2$, τότε $x = 1, y = 2$ ή $x = 2, y = 1$, οπότε προκύπτουν τα συστήματα:

$$\begin{Bmatrix} \alpha - 1 = \beta \\ 4\alpha + 2 = 5\beta - 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \beta + 1 \\ 4(\beta + 1) + 2 = 5\beta - 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 10, \beta = 9}.$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha - 1 = 2\beta \\ 2\alpha + 1 = 5\beta - 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 2\beta + 1 \\ 2(2\beta + 1) + 1 = 5\beta - 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 13, \beta = 6}.$$

2ος τρόπος. Αφού $\beta | \alpha - 1$, θα έχουμε ότι:

$$\alpha - 1 = \beta\kappa \qquad (1),$$

για κάποιον θετικό ακέραιο κ. Επιπλέον, $2\alpha + 1 |\, 5\beta - 3$, άρα υπάρχει θετικός ακέραιος λ ώστε

$$5\beta - 3 = (2\alpha + 1)\lambda.$$

Η τελευταία, λόγω της (1), γίνεται:

$$5\beta - 3 = \lambda(2\beta\kappa + 3) \Rightarrow \beta(2\lambda\kappa - 5) = -3\lambda - 3 \qquad (2)$$

Το δεξί μέλος στην τελευταία είναι αρνητικό, άρα $2\lambda\kappa - 5 < 0$, οπότε

$$2\lambda\kappa \leq 4 \Leftrightarrow \lambda\kappa \leq 2.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\lambda = \kappa = 1 \text{ ή } \lambda = 2, \kappa = 1, \text{ ή } \lambda = 1, \kappa = 2.$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε στην πρώτη περίπτωση $\beta = 2$, οπότε από τη σχέση (1) έχουμε $a = 3$.

Στην δεύτερη περίπτωση βρίσκουμε $b = 9$, οπότε από την (1), έχουμε: $a = 10$.

Στην δεύτερη περίπτωση βρίσκουμε $b = 6$, οπότε από την (1), έχουμε: $a = 13$.