Λύσεις – απαντήσεις ασκήσεων και διαγωνισμάτων

Κεφάλαιο 1ο

Ενότητα 1η

1. $(2\kappa+1)\cdot(2\lambda+1)=4\kappa\lambda+2\kappa+2\lambda+1=2(2\kappa\lambda+\kappa+\lambda)+1\overset{2\kappa\lambda+\kappa+\lambda=\rho}{=}2\rho+1$

2. $(2\kappa)^2=4\kappa^2=2\cdot2\kappa^2\overset{\rho=2\kappa^2}{=}2\rho$

3. $(2\kappa+1)^2=4\kappa^2+4\kappa+1=2(2\kappa^2+2\kappa)+1\overset{2\kappa^2+2\kappa=\rho}{=}2\rho+1$

4. $(2\kappa)\cdot(2\lambda+1)=4\kappa\lambda+2\kappa=2(2\kappa\lambda+\kappa)\overset{2\kappa\lambda+\kappa=\rho}{=}2\rho$

5. Αν έχουμε δύο διαδοχικούς ακέραιους τότε κάποιος από αυτούς θα είναι άρτος και ο άλλος περιττός, οπότε το γινόμενο τους θα είναι αριθμός άρτιος

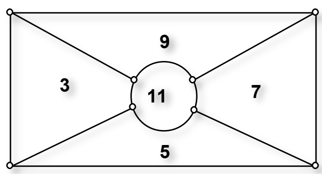
Ενότητα 2η

1. Έχουμε ότι το τετράγωνο ενός άρτιου ότι είναι άρτιος και θέλουμε να δείξουμε ότι ο ακέραιος θα είναι άρτιος.

Έστω ότι είναι περιττός, τότε το τετράγωνό του θα είναι περιττός, άτοπο. Άρα ο ακέραιος θα είναι άρτιος.

2. Δεν μπορεί να υπάρχουν ακέραιοι μ,ν τέτοιοι ώστε $4\nu^2=2\mu+1$, διότι το 1ο μέλος είναι άρτιος αριθμός και το δεύτερο περιττός.

3. Παρατηρείστε ότι όλες οι ενδείξεις είναι περιττοί αριθμό. Οπότε το άθροισμα τριών οποιονδήποτε περιττών είναι αριθμός περιττός. Δεν μπορεί να είναι ίσος με 22.



Ενότητα 3η

1. Για το α και το β δες το παράδειγμα σελίδα 5. Για το 0,232323…. Ονομάζουμε α=0,232323… πολλαπλασιάζουμε επί 100 και έχουμε 100α=23,232323… . Αν αφαιρέσουμε τις δύο ισότητες έχουμε 99α=23, άρα α=23/99

2. $1,333...=1+0,333=1+\frac{3}{9}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

$$0,0333...=\frac{1}{10}\cdot0,333...=\frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$$

$$2,0121212...=\frac{1}{100}\cdot201,121212...=\frac{1}{100}\cdot(201+0,121212...)=\frac{1}{100}(201+\frac{12}{99})\in Q$$

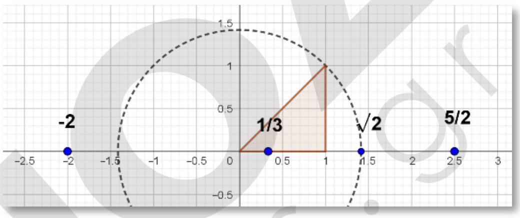
$$1,5123123...=\frac{1}{10}\cdot15,123123123...=\frac{1}{10}\cdot(15+0,123123123...)=\frac{1}{10}(15+\frac{123}{999})\in Q$$

3. $0,777...+0,888...+0,444...=\frac{7}{9}+\frac{8}{9}+\frac{4}{9}=\frac{19}{9}$

Ενότητα 4^η

1. Έστω α-ρ=ρ' τότε α=ρ+ρ' άτοπο. Άρα η διαφορά ενός ρητού (ρ) από έναν άρρητο (α) θα είναι άρρητος.

Ενότητα 5^η



1. Δες το διπλανό σχήμα …
2. Μπορούμε να βρούμε αρκετούς αριθμούς ανάμεσα στους 3,40 και 3,41 διότι : $3,40=\dfrac{3400}{1000}$ και $3,41=\dfrac{3410}{1000}$, άρα μπορούμε να βρούμε τους αριθμούς $\dfrac{3401}{1000},\dfrac{3402}{1000},\dfrac{3403}{1000},\dots$

Ενότητα 6^η

1. $(2x+5)\cdot 5+y=108 \Leftrightarrow 10x+25+y=108 \Leftrightarrow 10x+y=83$. Επειδή τα x,y είναι ψηφία ουσιαστικά το πρώτο μέλος της ισότητας εκφράζει την δεκαδική γραφή του αριθμού 83 , άρα x=8 και y=3
2. $\dfrac{222223\cdot 444441\cdot 222220+222216}{222222^2} \overset{\alpha=222222}{=} \dfrac{(\alpha+1)(2\alpha-3)(\alpha-2)+(\alpha-6)}{\alpha^2}=\dots=$ $\dfrac{2\alpha^3-5\alpha^2}{\alpha^2}=2\alpha-5=444439$

Ενότητα 7^η

1. $(0,4)^{10}\cdot(-2,5)^{10}=[0,4\cdot(-2,5)]^{10}=(-1)^{10}=1$

   $\dfrac{(0,25)^8}{2^{-16}}=(0,25)^8\cdot 2^{16}=[(0,5)^2]^8\cdot 2^{16}=(0,5)^{16}\cdot 2^{16}=(0,5\cdot 2)^{16}=1^{16}=1$

   $(0,3)^4\cdot 3^{-4}\cdot 10000=(0,3)^4\cdot 3^{-4}\cdot 10^4=(0,3\cdot 10)^4\cdot 3^{-4}=3^4\cdot 3^{-4}=3^0=1$
2. $A=[1^n-(-1)^{n+1}-1^{n+2}-(-1)^{n+3}]\cdot(-1)^{n+2023}=(1-1-1-1)\cdot 1=-2$

   Η άσκηση θα ήταν ενδιαφέρουσα αν δεν μας λέγανε ότι ο n είναι περιττός. Μπορείτε να αποδείξετε ότι σε οποιαδήποτε περίπτωση το αποτέλεσμα θα είναι -2;
3. $[(\chi^2\cdot\psi^3)^{-2}\cdot(\chi\cdot\psi^3)^4]:(\chi^3:\psi^{-1})^{-3}=(\chi^{-4}\cdot\psi^{-6}\cdot\chi^4\cdot\psi^{12}):(\chi^{-9}:\psi^3)=\dfrac{\chi^0\cdot\psi^6}{\dfrac{\chi^{-9}}{\psi^3}}=\chi^9\cdot\psi^9=(\chi\cdot\psi)^9$

   Άρα μετά την αντικατάσταση η παράσταση θα είναι ίση με 1.

Ενότητα 8^η

1. $(x+y)^2-2(x+y)\cdot(x-y)+(x-y)^2=[(x+y)-(x-y)]^2=4y^2$

   $(\kappa-\lambda)^3+(\kappa+\lambda)^3+3(\kappa-\lambda)^2\cdot(\kappa+\lambda)+3(\kappa-\lambda)\cdot(\kappa+\lambda)^2=[(\kappa-\lambda)+(\kappa+\lambda)]^3=8\kappa^3$

2. $\dfrac{\alpha^2+(\alpha+2)^2+(\alpha+4)^2+1}{12}=\ldots=\dfrac{3\alpha^2+12\alpha+21}{12}\overset{\alpha=2\nu+1}{=}\dfrac{3(2\nu+1)^2+12(2\nu+1)+21}{12}=$

$\dfrac{3(4\nu^2+4\nu+1)+24\nu+12+21}{12}=\dfrac{12\nu^2+36\nu+36}{12}=\nu^2+3\nu+3\in Z$

3. $(m^2-n^2)^2+4m^2n^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=(m^4+2m^2n^2+n^4)=(m^2+n^2)^2$

Για m=8 και ν=1 η ισότητα γίνεται $63^2+16^2=65^2$

4. $2007\cdot 2009^3-2008\cdot 2006^3\overset{\alpha=2007}{=}\alpha\cdot(\alpha+2)^3-(\alpha+1)\cdot(\alpha-1)^3=\ldots=$

$=8\alpha^3+12\alpha^2+6\alpha+1=(2\alpha+1)^3$

5. $(\dfrac{\beta+1}{2})^2-(\dfrac{\beta-1}{2})^2=\beta$ - απλές πράξεις …

Αν β περιττός τότε οι β-1 και β+1 άρτιοι άρα τα κλάσματα ακέραιοι

Αν «διαβάσουμε» την 1η ισότητα έχουμε ότι ο περιττός β γράφεται ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων

6. Από την ταυτότητα $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$ έχουμε ότι αν

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$ τότε $\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]=0$

και επειδή $(\alpha+\beta+\gamma)\neq 0$ θα είναι $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$ από όπου καταλήγουμε στο α=β=γ

7. Αν α+β=2 τότε $(\alpha+\beta)^2=4\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=4\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2=4-2\alpha\beta$, επίσης

$(\alpha+\beta)^3=8\Leftrightarrow\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=8\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3=8-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\Leftrightarrow\alpha^3+\beta^3=8-6\alpha\beta$

αντικαθιστούμε στην ισότητα : $K=12\cdot(\alpha^2+\beta^2)-4\cdot(\alpha^3+\beta^3)=12(4-2\alpha\beta)-4(8-6\alpha\beta)=16$

8. Ισχύει ότι : $\alpha^2\beta+2\alpha^2\beta+2\beta^3+3\alpha^2\beta+(\alpha-\beta)^3=6\alpha^2\beta+2\beta^3+\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=$

$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$

Ενότητα 9η

1. $K=(\nu^2+3\nu+1)^2-1=(\nu^2+3\nu+1-1)(\nu^2+3\nu+1+1)=(\nu^2+3\nu)(\nu^2+3\nu+2)=$

$=\nu(\nu+3)(\nu+1)(\nu+2)$

2. $\dfrac{(8^{\nu+1}+8^{\nu})^2}{(4^{\nu}-4^{\nu-1})^3}=\dfrac{[8^{\nu}(8+1)]^2}{[4^{\nu-1}(4-1)]^3}=\dfrac{8^{2\nu}\cdot 81}{4^{3\nu-3}\cdot 27}=\dfrac{2^{6\nu}\cdot 3}{2^{6\nu-6}}=3\cdot 2^6$

3. $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}=\sqrt{\dfrac{2^{30}+2^{20}}{2^{12}+2^{22}}}=\sqrt{\dfrac{2^{20}(2^{10}+1)}{2^{12}(1+2^{10})}}=\sqrt{2^8}=2^4$

4. $\alpha^2+\alpha^2\beta^2+\beta^2\overset{\beta=\alpha+1}{=}\alpha^2+\alpha^2(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^2=\ldots=\alpha^4+2\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha+1=(\alpha^2+\alpha+1)^2$

Ασκήσεις επανάληψης

1. $x+\dfrac{1}{x}=y+\dfrac{1}{y}\Leftrightarrow x^2y+y=y^2x+x\Leftrightarrow x^2y+y-y^2x-x=0\Leftrightarrow xy(x-y)-(x-y)=0\Leftrightarrow$

$(x-y)(xy-1)=0\Leftrightarrow x=y\quad ή\quad xy=1$

2. $(\alpha+1)^2-\alpha^2=\ldots=2\alpha+1$. Ας βρούμε έναν περιττό αριθμό που είναι τετράγωνο κάποιου ακεραίου. Για παράδειγμα τον 49 τότε επειδή $7^2=49=2\cdot 24+1\overset{\alpha=24}{=}(24+1)^2-24^2$, άρα $25^2=24^2+7^2$, τέτοιες Πυθαγόρειες τριάδες υπάρχουν άπειρες γιατί υπάρχουν άπειροι περιττοί αριθμοί που να είναι τετράγωνα ακεραίων.

3. $\dfrac{\alpha(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)}{\beta}=\dfrac{\beta(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)}{\alpha}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2-\alpha^4=\beta^2\gamma^2+\beta^2\alpha^2-\beta^4\Leftrightarrow$

$\alpha^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^2\gamma^2+\beta^4=0\Leftrightarrow\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)=0\Leftrightarrow(\alpha^2-\beta^2)(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)=0\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)=0\overset{\alpha+\beta\neq 0}{\Leftrightarrow}\alpha=\beta\quad ή\quad \gamma^2=\alpha^2+\beta^2$

4. $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha^3\beta-\alpha^3\gamma+\beta^3\gamma-\beta^3\alpha+\gamma^3\alpha-\gamma^3\beta=0\Leftrightarrow$

$\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)-\gamma(\alpha^3-\beta^3)+\gamma^3(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)[\alpha\beta(\alpha+\beta)-\gamma(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\gamma^3]=0\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\gamma\alpha^2-\gamma\alpha\beta-\gamma\beta^2+\gamma^3)=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)[\alpha^2(\beta-\gamma)+\alpha\beta(\beta-\gamma)-\gamma(\beta^2-\gamma^2)]=0\Leftrightarrow$

$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha^2+\alpha\beta-\gamma\beta-\gamma^2)=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)[(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)+\beta(\alpha-\gamma)]=0\Leftrightarrow$

5. Επειδή $\alpha+\beta+\gamma=0\Leftrightarrow\alpha=-\beta-\gamma\Rightarrow\alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\Leftrightarrow\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma=\gamma^2$ (1)

Όμοια θα είναι : $\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma=\alpha^2$ (2) και $\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta=\beta^2$ (3), οπότε :

$$\frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}\overset{(1),(2),(3)}{=}\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}\overset{(Y)}{=}\frac{\gamma^2}{-\gamma}+\frac{\alpha^2}{-\alpha}+\frac{\beta^2}{-\beta}=$$

$=-\gamma-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta+\gamma)=0$

6. $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}=\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}=$

$\dfrac{4}{1-x^4}+\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{8}{1+x^8}=\dfrac{8}{1-x^8}+\dfrac{8}{1+x^8}=\dfrac{16}{1-x^{16}}$

7. $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=0\Leftrightarrow x^2y-x^2z+y^2z-y^2x+z^2x-z^2y=0\Leftrightarrow$

$xy(x-y)-z(x^2-y^2)+z^2(x-y)=0\Leftrightarrow(x-y)(xy-zx-zy+z^2)=0\Leftrightarrow$

$(x-y)[x(y-z)-z(y-z)]=0\Leftrightarrow(x-y)(y-z)(x-z)=0\Leftrightarrow$

$x=y$ ή $y=z$ ή $x=z$

8. $\dfrac{5\alpha}{\alpha-\beta}-\dfrac{3\beta}{\alpha+\beta}=5\Leftrightarrow5\alpha^2+5\alpha\beta-3\alpha\beta+3\beta^2=5\alpha^2-5\beta^2\Leftrightarrow2\alpha\beta+8\beta^2=0\Leftrightarrow2\beta(\alpha+4\beta)=0$

Άρα ή β=0 οπότε $A=\dfrac{10\alpha-4\beta}{\alpha+6\beta}=\dfrac{10\alpha}{\alpha}\overset{\alpha\neq0}{=}10$

ή α=-4β οπότε $A=\dfrac{10\alpha-4\beta}{\alpha+6\beta}=\dfrac{-40\beta-4\beta}{-4\beta+6\beta}=\dfrac{-44\beta}{-2\beta}\overset{\beta\neq0}{=}22$

9. Ισχύει ότι $\left(\dfrac{x^2+1}{2}\right)^2=\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)^2+x^2$, άρα υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο

10. $\alpha\cdot\beta+2\alpha+\beta=3\Leftrightarrow\alpha(\beta+2)+\beta+2=5\Leftrightarrow(\beta+2)(\alpha+1)=5$ οπότε

$\begin{matrix}\beta+2=5\\ \alpha+1=1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=3\\ \alpha=0\end{matrix}$ ή $\begin{matrix}\beta+2=-5\\ \alpha+1=-1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=-7\\ \alpha=-2\end{matrix}$ ή $\begin{matrix}\beta+2=1\\ \alpha+1=5\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=-1\\ \alpha=4\end{matrix}$ ή $\begin{matrix}\beta+2=-1\\ \alpha+1=-5\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\beta=-3\\ \alpha=-6\end{matrix}$

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Οι πραγματικοί αριθμοί – οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

ΘΕΜΑ 1ο

$$\alpha = 0,777... = \frac{7}{9}, \quad \alpha+\beta+\gamma = 2 \Leftrightarrow \frac{7}{9}+\frac{2}{3}+\gamma = 2 \Leftrightarrow \gamma = 2-\frac{13}{9} \Leftrightarrow \gamma = \frac{5}{9} = 0,555...$$

ΘΕΜΑ 2ο

$$(2\nu+1)+(2\mu+1) = 2\nu+2\mu+2 = 2(\nu+\mu+1) \overset{\rho=\nu+\mu+1}{=} 2\rho$$

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $\alpha-\rho=\rho' \Leftrightarrow \alpha=\rho+\rho'$ άτοπο άρα $(\alpha-\rho)\in Q'$

ΘΕΜΑ 4ο

$$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \alpha^2\beta+\beta-\alpha\beta^2-\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta)+(\beta-\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\beta-\alpha)(\alpha\beta-1) = 0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} \alpha\beta = 1$$

$$K = \frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\cdot\beta^{24}}{\alpha^{-2}\cdot 1} = \alpha^{24}\cdot\beta^{24} = (\alpha\cdot\beta)^{24} = 1$$

ΘΕΜΑ 5ο

$$A = \frac{\chi^{-3}}{\psi^{-2}} : \frac{\chi^{-2}}{3\psi^{-2}} = \frac{\chi^{-3}}{\psi^{-2}}\cdot\frac{3\psi^{-2}}{\chi^{-2}} = 3\cdot\chi^{-1}\cdot\psi^0 = \frac{3}{\chi} \overset{\chi=3}{=} 1$$