

Κεφάλαιο 3^ο

Ενότητα 1^η

- $|x|=2$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση ίση με 2, άρα ο αριθμός μπορεί να είναι ο 2 ή ο -2
 $|x|=0$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση ίση με 0, άρα ο αριθμός μπορεί να είναι ο 0
 $|x|=-2$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση ίση με -2, πράγμα αδύνατο.
- $|x|<2$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μικρότερη του 2, άρα $-2<x<2$
 $|x|>3$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μεγαλύτερη του 3, άρα $x>3$ ή $x<-3$
 $|x|>-2$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μεγαλύτερη του -2 που ισχύει πάντα.
 $|x|<-3$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μικρότερη του -3 πράγμα αδύνατο.
 $|x|\leq 0$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μικρότερη ή ίση του 0, που μπορεί να ισχύει μόνο αν $x=0$.
 $|x|<0$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μικρότερη του 0, πράγμα αδύνατο.
 $|x|>0$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μεγαλύτερη του 0, πράγμα που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό εκτός από το 0.
 $|x|\geq 0$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μεγαλύτερη ή ίση του 0, που ισχύει πάντα.
 $3<|x|<5$ άρα αναζητούμε τον αριθμό που απέχει από το 0 απόσταση μεγαλύτερη του 3 και συγχρόνως μικρότερη του 5. Αυτό ισχύει όταν $3<x<5$ ή $-5<x<-3$.

Ενότητα 3^η

- $|x-2|=-3$ αδύνατη, $|x+2|=0 \Leftrightarrow x=-2$, $|x-1|=3 \Leftrightarrow x-1=\pm 3 \Leftrightarrow x=4$ ή $x=-2$
 $|x-2|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x-2\leq 3 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 5$, $|x-2|\leq -3$ αδύνατη, $|x-2|<0$ αδύνατη
 $|x-2|\leq 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, $|x-2|>0 \Leftrightarrow x\neq 2$, $|x-2|\geq 0$ ισχύει πάντα,
 $|x-2|\geq 3 \Leftrightarrow x-2\geq 3$ ή $x-2\leq -3 \Leftrightarrow x\geq 5$ ή $x\leq -1$, $|x-2|\geq -3$ ισχύει πάντα.
- $\frac{|x|-1}{2} + \frac{|x|+3}{3} > \frac{9-|x|}{6} \Leftrightarrow 3(|x|-1) + 2(|x|+3) > 9-|x| \Leftrightarrow 6|x| > 6 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x < -1$

Ενότητα 4^η

- $K = |x-2| + |x+2| \stackrel{|x|\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2}{=} (-x+2) + (x+2) = 4$
- $K = |x+1| + |x-5| + |x^2+1| \stackrel{1<x<3}{=} (1+x) + (-x+5) + (x^2+1) = x^2 + 7$
- $K = |x-y| + |5-y| + |x+1| \stackrel{-1<x<y<3}{=} (-x+y) + (5-y) + (x+1) = 6$
- $K = |x+5| + |x^2+1| - |x^2-4| \stackrel{|2x+1|<2 \Leftrightarrow -2<2x+1<2 \Leftrightarrow -3/2<x<1/2}{=} (x+5) + (x^2+1) + |x-2| \cdot |x+2| =$
 $= x^2 + x + 6 + (-x+2)(x+2) = x^2 + x + 6 + 4 - x^2 = x + 10$

5. $K = |2 - x| + |x + 1|$ σχηματίζουμε το πίνακάκι :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
2-x	+	+	○	-
x+1	-	○	+	+

Οπότε

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση : } K = |2 - x| + |x + 1| \stackrel{x < -1}{=} (2 - x) + (-x - 1) = -2x + 1$$

$$2^{\text{η}} \text{ περίπτωση : } K = |2 - x| + |x + 1| \stackrel{-1 \leq x \leq 2}{=} (2 - x) + (x + 1) = 3$$

$$3^{\text{η}} \text{ περίπτωση : } K = |2 - x| + |x + 1| \stackrel{x > 2}{=} (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1$$

6. $K = |x^2 + 1| + |2 - x| + |x| = (x^2 + 1) + |2 - x| + |x|$, σχηματίζουμε το πίνακάκι :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
2-x	+	+	○	-
x	-	○	+	+

Οπότε

$$1^{\text{η}} \text{ περίπτωση : } K = (x^2 + 1) + |2 - x| + |x| \stackrel{x < 0}{=} x^2 + 1 + (2 - x) + (-x) = x^2 - 2x + 3$$

$$2^{\text{η}} \text{ περίπτωση : } K = (x^2 + 1) + |2 - x| + |x| \stackrel{0 < x < 2}{=} x^2 + 1 + (2 - x) + x = x^2 + 3$$

$$3^{\text{η}} \text{ περίπτωση : } K = (x^2 + 1) + |2 - x| + |x| \stackrel{x > 2}{=} x^2 + 1 + (x - 2) + x = x^2 + 2x - 1$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

- $A = |\alpha - \beta| - |\beta - 2| + |\alpha - 2| - 2|\alpha - 3| \stackrel{\alpha < 2 < \beta}{=} (-\alpha + \beta) - (\beta - 2) + (-\alpha + 2) - 2(-\alpha + 3) = -2$
- $f(x) = |x^2 - 3x| + |5 - x| + |x - 4| = |x| \cdot |x - 3| + |5 - x| + |x - 4| \stackrel{0 \leq x \leq 3}{=} = -x \cdot (-x + 3) + (5 - x) + (-x + 4) = -x^2 - 5x + 9$
- $|3 - |x - 2|| \stackrel{-1 < x < 2}{=} |3 - (x - 2)| = |5 - x| = 5 - x$
- $x^2 - 2x + 1 + |x - y| + z^2 - 4z + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + |x - y| + (z - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$ και $z = 2$
 $(x + 1)^2 - 2|x + 1| \cdot |y + 1| + y^2 + 2y + x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow$
 $|x + 1|^2 - 2|x + 1| \cdot |y + 1| + y^2 + 2y + 1 + x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (|x + 1| - |y + 1|)^2 + (x - 2)^2 = 0$
 Άρα $\begin{cases} |x + 1| - |y + 1| = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1| = |y + 1| \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y + 1| = 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 = \pm 3 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \text{ ή } y = -4 \\ x = 2 \end{cases}$
 $(|x - 2017| + 20) \cdot (|y - 2016| + 40) = 800 \Leftrightarrow$
 $|x - 2017| \cdot |y - 2016| + 20|y - 2016| + 40|x - 2017| = 0 \Leftrightarrow y = 2016$ και $x = 2017$
- $\begin{cases} |x| \leq 2 \\ |y| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -3 \leq y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 3x \leq 6 \\ 3 \geq -y \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 3x \leq 6 \\ -3 \leq -y \leq 3 \end{cases} \Rightarrow -9 \leq 3x - y \leq 9 \Leftrightarrow |3x - y| \leq 9$
- $A = -|\alpha| + |\alpha - 3| - 2|\alpha + 2| + |2\alpha - 1| \stackrel{-2 < \alpha < -1 \Leftrightarrow -4 < 2\alpha < -2}{=} -(-\alpha) + (-\alpha + 3) - 2(\alpha + 2) + (-2\alpha + 1) = -4\alpha$
- $\begin{cases} d(x, 0) < 2 \\ d(y, 0) < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < 2 \\ |y| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ -3 < y < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ 6 > -2y > -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ -6 < -2y < 6 \end{cases} \Rightarrow -8 < x - 2y < 8 \Leftrightarrow$
 $|x - 2y| < 8 \Leftrightarrow d(x, 2y) < 8$
- Ισχύει ότι $-|x| - 1 < -|x| \leq x \leq |x| < |x| + 1$
- $\begin{cases} |\alpha - \beta| < 2 \\ |\alpha - \gamma| < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \alpha - \beta < 2 \\ -3 < \alpha - \gamma < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 > \beta - \alpha > -2 \\ -3 < \alpha - \gamma < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < \beta - \alpha < 2 \\ -3 < \alpha - \gamma < 3 \end{cases} \Rightarrow -5 < \beta - \gamma < 5 \Leftrightarrow |\beta - \gamma| < 5$
- $|x - 3| + |6 - 2x| = 12 \Leftrightarrow |x - 3| + 2|3 - x| = 12 \Leftrightarrow |x - 3| + 2|x - 3| = 12 \Leftrightarrow 3|x - 3| = 12 \Leftrightarrow$
 $|x - 3| = 4 \Leftrightarrow x - 3 = \pm 4 \Leftrightarrow x = 6 \text{ ή } x = -2$
 $x^2 = |x| \Leftrightarrow |x|^2 - |x| = 0 \Leftrightarrow |x| \cdot (|x| - 1) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \text{ ή } |x| = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm 1$
- Σχηματίζουμε το παρακάτω πίνακάκι

x	$-\infty$	-1/3	3/2	5	$+\infty$
x-5	-	-	-	o	+
3x+1	-	o	+	+	+
2x-3	-	-	o	+	+

1^η περίπτωση : Αν $x < -\frac{1}{3}$ τότε $|x-5|+|3x+1|+|2x-3| = (-x+5)+(-3x-1)+(-2x+3) = -6x+7$

2^η περίπτωση : Αν $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$ τότε $|x-5|+|3x+1|+|2x-3| = (-x+5)+(3x+1)+(-2x+3) = 9$

3^η περίπτωση : Αν $\frac{3}{2} < x < 5$ τότε $|x-5|+|3x+1|+|2x-3| = (-x+5)+(3x+1)+(2x-3) = 4x+3$

4^η περίπτωση : Αν $x \geq 5$ τότε $|x-5|+|3x+1|+|2x-3| = (x-5)+(3x+1)+(2x-3) = 6x-7$

12. $|x-3|=4 \Leftrightarrow |x|-3=\pm 4 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|=7 & \Rightarrow x=\pm 7 \\ |x|=-1 & \Rightarrow \text{αδύνατο} \end{cases}$

$|1-|x|| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq 1-|x| \leq 2 \Leftrightarrow -3 \leq -|x| < 1 \Leftrightarrow 3 \geq |x| \geq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 3 \\ -1 \leq |x| \end{cases} \Leftrightarrow$

$-3 \leq x \leq 3$
ισχύει πάντα $\Leftrightarrow x \in [-3, 3]$

$|x+3|-1 \geq 1 \Leftrightarrow |x+3|-1 \geq 1$ ή $|x+3|-1 \leq -1 \Leftrightarrow |x+3| \geq 2$ ή $|x+3| \leq 0 \Leftrightarrow$

$x+3 \geq 2$ ή $x+3 \leq -2$ ή $x = -3 \Leftrightarrow x \geq -1$ ή $x \leq -5$ ή $x = -3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -5] \cup [-1, +\infty) \cup \{-3\}$

$1 \leq |2x+1| < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq |2x+1| \\ |2x+1| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 1 \text{ ή } 2x+1 \leq -1 \\ -2 < 2x+1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \text{ ή } x \leq -1 \\ -\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{2}, -1] \cup [0, \frac{1}{2}]$

$|x^2-5x+4|+|x^2-1|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+4=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ή } x=4 \\ x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$|x^2-9|+(6-2x)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-9=0 \\ 6-2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 3 \\ x=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

13. $\left| \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta} \right| < 1 \Leftrightarrow |\alpha+\beta| < |1+\alpha\beta| \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 < (1+\alpha\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 < 1+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-1-\alpha^2\beta^2 < 0 \Leftrightarrow \alpha^2(1-\beta^2)-(1-\beta^2) < 0 \Leftrightarrow (\alpha^2-1)(1-\beta^2) < 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha-1)(\alpha+1)(1-\beta)(1+\beta) < 0$ που ισχύει διότι $-1 < \alpha < 1$ και $-1 < \beta < 1$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ

31	32	33	34	35
Σ	Σ	Σ	Λ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

ΘΕΜΑ 1^ο

$$|x-2| \leq 0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

$$|x+3| > 2 \Leftrightarrow x+3 > 2 \text{ ή } x+3 < -2 \Leftrightarrow x > -1 \text{ ή } x < -5$$

$$|x+3| = 4 \Leftrightarrow x+3 = \pm 4 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-7$$

$$|x-2| = |3-x| \Leftrightarrow x-2=3-x \text{ ή } x-2 \stackrel{\text{αδύνατο}}{=} x-3 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$|1-x| > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$x(x-2) + |x-y| + z^2 = 4z-5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + |x-y| + z^2 - 4z + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + |x-y| + (z-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=y=1 \text{ και } z=2$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$\text{Ισχύουν : } |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ και } |\psi-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \psi-3 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \psi \leq 4 \text{ άρα ...}$$

$$|x-1| + |\psi-2| - |x-\psi| \stackrel{-1 \leq x \leq 1 < 2 \leq \psi \leq 4}{=} (-x+1) + (\psi-2) - (-x+\psi) = -1$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$(\alpha-1) \cdot (1-\beta) > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha-1 > 0 \\ 1-\beta > 0 \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} \alpha-1 < 0 \\ 1-\beta < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha > 1 \\ 1 > \beta \end{matrix} \text{ ή } \begin{matrix} \alpha < 1 \\ 1 < \beta \end{matrix} \stackrel{\alpha < \beta}{\Leftrightarrow} \alpha < 1 < \beta$$

$$\text{Ισχύει ότι } d(\alpha, \beta) = 4 \Leftrightarrow |\alpha-\beta| = 4 \stackrel{\alpha < \beta}{\Leftrightarrow} \beta - \alpha = 4, \text{ άρα } K = |\alpha-1| + |1-\beta| \stackrel{\alpha < 1 < \beta}{=} (-\alpha+1) + (-1+\beta) = \beta - \alpha = 4$$