Κεφάλαιο 4ο

Ενότητα 2η

1. $B=\sqrt{45-20\sqrt{5}}=\sqrt{45-2\cdot5\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot5\cdot2\sqrt{5}}=\sqrt{(5-2\sqrt{5})^2}=$
$=\left|5-2\sqrt{5}\right|\overset{5>2\sqrt{5}}{=}5-2\sqrt{5}=A$
2. Επειδή $A^2=96$, $B^2=75$, $\Gamma^2=72$ έχουμε ότι Γ<Β<Α
3. $K=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}+\dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{x+1}=\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}+\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}=\dfrac{|x-1|}{x-1}+\dfrac{|x+1|}{x+1}\overset{-1<x<1}{=}-1+1=0$
4. $K=\sqrt{x^2-8x+16}-\sqrt{x^2-10x+25}=|x-4|-|x-5|$, σχηματίζουμε το πινακάκι ....

x	$-\infty$	4		5	$+\infty$
x-4	-	o	+		+
x-5	-		-	o	+

Και διακρίνουμε τις κατάλληλες περιπτώσεις ...

5. $\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}\geq0\Leftrightarrow\sqrt{\alpha}^2+\sqrt{\beta}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}\geq0\Leftrightarrow(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2\geq0$
$\beta-2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha^2-\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha^2-2\alpha+1=0\Leftrightarrow(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2+(\alpha-1)^2=0$
Άρα α=β=1.
6. $(\alpha-1)^2+|2\alpha-\beta|+\sqrt{\alpha-\beta-\gamma}=0\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=2\alpha\\ \gamma=\alpha-\beta\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha=1\\ \beta=2\\ \gamma=-1\end{matrix}$
7. $\sqrt{\alpha\beta}\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{\alpha\beta}}+\sqrt{\alpha\beta}-\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)=0\Leftrightarrow1+\alpha\beta-\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(\alpha-1)(\beta-1)=0$
Άρα α=1 ή β=1.
8. $K=\sqrt{\dfrac{9}{\kappa+1-2\sqrt{\kappa}}}+\sqrt{\dfrac{9}{\kappa+1+2\sqrt{\kappa}}}=\sqrt{\dfrac{9}{(1-\sqrt{\kappa})^2}}+\sqrt{\dfrac{9}{(1+\sqrt{\kappa})^2}}\overset{0<\kappa<1}{=}\dfrac{3}{1-\sqrt{\kappa}}+\dfrac{3}{1+\sqrt{\kappa}}=$
$=\dfrac{3+3\sqrt{\kappa}+3-3\sqrt{\kappa}}{1-\kappa}=\dfrac{6}{1-\kappa}\in Q$
9. α^2 , $\dfrac{1}{\alpha}$, $\sqrt{\alpha}$, α , 1 Ισχύει ότι $0<\alpha<1\Rightarrow\begin{matrix}0<\alpha^2<\alpha\Leftrightarrow0<\sqrt{\alpha^2}<\sqrt{\alpha}\Leftrightarrow0<\alpha<\sqrt{\alpha}\\ \dfrac{1}{\alpha}>1\\ 0<\sqrt{\alpha}<1\end{matrix}$

Άρα $0<\alpha^2<\alpha<\sqrt{\alpha}<1<\frac{1}{\alpha}$

10. $B=\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{\sqrt{5}^2+1+2\cdot 1\cdot\sqrt{5}}=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}=\left|1+\sqrt{5}\right|=1+\sqrt{5}=A$

11. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{4^2}}{\sqrt[3]{4^3}}=\frac{2\cdot\sqrt[3]{16}}{4}=2\sqrt[3]{16}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{6})}{12}=\frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{12}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}}{4-3}=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}$$

12. $\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{3}}{8-3}=\frac{2\sqrt{8}}{5}$

$$(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1})^{10}\cdot(1+\sqrt{3})^{20}=(\sqrt{3}-1)^{10}\cdot(1+\sqrt{3})^{10}=(3-1)^{10}=2^{10}$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}+\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}=\frac{4}{1}=4$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-(2+\sqrt{3})}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=$$
$$=\sqrt{4-3}=1$$

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. Για να ορίζεται η παράσταση $K=\frac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}$, πρέπει

$$\begin{matrix} x\ge 0 \\ x-4\sqrt{x}+4\ne 0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix} x\ge 0 \\ (\sqrt{x}-2)^2\ne 0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix} x\ge 0 \\ \sqrt{x}\ne 2\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix} x\ge 0 \\ x\ne 4\end{matrix}\Leftrightarrow x\in[0,4)\cup(4,+\infty)$$

$$K=\frac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}=\frac{(x-4)^2}{(\sqrt{x}-2)^2}=(\frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4})^2=(\sqrt{x}+2)^2$$

2. $\frac{1}{\nu\cdot\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\cdot\sqrt{\nu}}=\frac{\sqrt{\nu}}{\nu}-\frac{\sqrt{\nu+1}}{\nu+1}\Leftrightarrow\frac{1}{\nu\cdot\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\cdot\sqrt{\nu}}=\frac{(\nu+1)\sqrt{\nu}-\nu\sqrt{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}\Leftrightarrow$

$\nu(\nu+1)=[\nu\cdot\sqrt{\nu+1}+(\nu+1)\cdot\sqrt{\nu}]\cdot[(\nu+1)\cdot\sqrt{\nu}-\nu\cdot\sqrt{\nu+1}]\Leftrightarrow$

$\nu(\nu+1)=(\nu+1)^2\cdot\nu-\nu^2\cdot(\nu+1)\Leftrightarrow\nu(\nu+1)=\nu\cdot(\nu+1)(\nu+1-\nu)\Leftrightarrow\nu(\nu+1)=\nu(\nu+1)$

3. $\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha-\beta}}\Leftrightarrow\alpha-\beta=(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\Leftrightarrow\alpha-\beta=\alpha-\beta$

4. $\frac{1}{2\sqrt{\nu}}>\sqrt{\nu+1}-\sqrt{\nu}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\nu}}>\frac{\nu+1-\nu}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}\Leftrightarrow\frac{1}{2\sqrt{\nu}}>\frac{1}{\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}}\Leftrightarrow\sqrt{\nu+1}+\sqrt{\nu}>2\sqrt{\nu}\Leftrightarrow$

$\sqrt{\nu+1}>\sqrt{\nu}$ που ισχύει

Από 1ο ερώτημα έχουμε $\frac{1}{\sqrt{\nu}} > 2\sqrt{\nu+1} - 2\sqrt{\nu}$, άρα θα ισχύουν :

$1 > 2\sqrt{2} - 2$

$\frac{1}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} > 2\sqrt{4} - 2\sqrt{3}$

...

$\frac{1}{\sqrt{\nu}} > 2\sqrt{\nu+1} - 2\sqrt{\nu}$

προσθέτοντας κατά μέλη παρατηρήστε ότι μερικοί όροι διαγράφονται και

Τελικά έχουμε ...$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\nu}} > 2\sqrt{\nu+1} - 2 = 2(\sqrt{\nu+1} - 1)$

5. $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \le \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}} \Leftrightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \le \frac{|\alpha|}{\sqrt{\beta}} + \frac{|\beta|}{\sqrt{\alpha}} \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \le \frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta} + \frac{\beta\sqrt{\alpha}}{\alpha} \Leftrightarrow$

$\alpha\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\beta\sqrt{\beta} \le \alpha^2\sqrt{\beta} + \beta^2\sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \beta\sqrt{\alpha}(\alpha-\beta) - \alpha\sqrt{\beta}(\alpha-\beta) \le 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\beta\sqrt{\alpha} - \alpha\sqrt{\beta}) \le 0 \Leftrightarrow$

$\frac{(\alpha-\beta)(\beta^2\alpha - \alpha^2\beta)}{(\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta})} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha-\beta)\beta\alpha(\beta-\alpha)}{\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}{\beta\sqrt{\alpha} + \alpha\sqrt{\beta}} \le 0$ που ισχύει .

6. $A = \frac{\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{18 + 8\sqrt{2}}}{\kappa - 2} = \frac{\sqrt{(5-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(4+\sqrt{2})^2}}{\kappa - 2} =$

$= \frac{|5-\sqrt{3}| + |\sqrt{3}-\sqrt{2}| + |4+\sqrt{2}|}{\kappa - 2} = \frac{5 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 4 + \sqrt{2}}{\kappa - 2} = \frac{9}{\kappa - 2}$

Άρα για να είναι ακέραιος πρέπει ...

$\kappa - 2 = \pm 1$ ή $\kappa - 2 = \pm 3$ ή $\kappa - 2 = \pm 9$ δηλαδή $\kappa \in \{3, 1, 5, -1, 11, -7\}$

7. Για να ορίζεται η παράσταση $A = \frac{\alpha - 27}{\sqrt{\alpha-2} - 5}$ πρέπει

$$\begin{matrix} \alpha - 2 \ge 0 \\ \sqrt{\alpha - 2} - 5 \ne 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha \ge 2 \\ \alpha - 2 \ne 25 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha \ge 2 \\ \alpha \ne 25 \end{matrix} \Leftrightarrow \alpha \in [2, 25) \cup (25, +\infty)$$

$$A = \frac{\alpha - 27}{\sqrt{\alpha-2} - 5} = \frac{(\alpha - 27)(\sqrt{\alpha-2} + 5)}{\alpha - 2 - 25} = \sqrt{\alpha - 2} + 5$$

8. Αν α<0 η ανισότητα ισχύει $\alpha < \sqrt{1+\alpha^2}$, επίσης και όταν α=0 ισχύει, θα δείξουμε ότι ισχύει και όταν α>0 οπότε έχουμε ισοδύναμα $\alpha < \sqrt{1+\alpha^2} \Leftrightarrow \alpha^2 < 1 + \alpha^2 \Leftrightarrow 0 < 1$ που ισχύει.

$$K = \frac{1}{\alpha - \sqrt{\alpha^2+1}} + \frac{1}{\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2+1} + \alpha - \sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha^2 - (\sqrt{\alpha^2+1})^2} = \frac{2\alpha}{-1} = -2\alpha$$

9. $K = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 1 + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 1 - 2\sqrt{x-1}} =$

$= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}+1| + |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1}-1|$

$K = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1}-1| \overset{1 \le x \le 2}{=} \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} + 1 = 2$

10. $\sqrt{\alpha\beta} \le \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\alpha\beta} \le \alpha+\beta \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} 4\alpha\beta \le (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta \Leftrightarrow 0 \le (\alpha-\beta)^2$ που ισχύει

$\frac{2}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}} \le \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow 2\alpha\beta \le (\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta} \overset{\alpha,\beta>0}{\Leftrightarrow} 4\alpha^2\beta^2 \le (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)\alpha\beta \Leftrightarrow$

$4\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow 0 \le (\alpha-\beta)^2$ που ισχύει.

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

31	32	33	34	35
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Νιοστή ρίζα πραγματικού αριθμού

ΘΕΜΑ 1ο

Επειδή $(5\sqrt{3})^2 = 75 > 45 = (3\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 5\sqrt{3} > 3\sqrt{5}$

Επειδή $5+\sqrt{3} > 6$ και $5 < 3+\sqrt{5} < 6$ έχουμε ότι $3+\sqrt{5} < 5+\sqrt{3}$

ΘΕΜΑ 2ο

$$A = \sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{2}\sqrt{3}} - \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2} = \left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right| - \left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right| = \sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 3ο

Για την παράσταση : $A = \sqrt[3]{3x-2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ πρέπει

$$\begin{matrix} 3x-2\geq 0 \\ (x-1)^2>0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq \frac{2}{3} \\ x\neq 1 \end{matrix} \Leftrightarrow x\in[\frac{2}{3},1)\cup(1,+\infty)$$

Για την παράσταση : $B=\sqrt[5]{3-|2x+1|}$ πρέπει :

$$3-|2x+1|\geq 0 \Leftrightarrow |2x+1|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq 2x+1\leq 3 \Leftrightarrow -4\leq 2x\leq 2 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 1$$

ΘΕΜΑ 4ο

Αν $\alpha\cdot\beta\geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ Λάθος

Αν $\alpha\in R$, $\beta\geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta}$ Λάθος

Αν $\alpha\in R$ τότε $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$ Σωστό

Αν $\alpha\geq 0$ τότε $(\sqrt{\alpha})^2=\alpha$ Σωστό

Αν $\alpha^2=\beta$ τότε $\alpha=\sqrt{\beta}$ Λάθος

Επαναληπτικό φύλο αξιολόγησης στις ενότητες

Διάταξη – απόλυτη τιμή – ρίζες πραγματικών αριθμών

Ερώτηση 1η

$$(\sqrt{2016})^2+(1-\sqrt{2016})\cdot(\sqrt{2016}+1)=2016+1-2016=1$$

Ερώτηση 2η

$$2\alpha^2+\beta^2-2\alpha+2\alpha\beta+1=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=1$$

Ερώτηση 3η

$$\begin{matrix} 2<x<4 \\ 5<y<6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -2>-x>-4 \\ 5<y<6 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4<-x<-2 \\ 5<y<6 \end{matrix} \Rightarrow 1<y-x<4$$

$$\begin{matrix} 2<x<4 \\ 1<y-x<4 \end{matrix} \Rightarrow 2<x(y-x)<16$$

Ερώτηση 4η

$\alpha\beta+1-\alpha-\beta<0 \Leftrightarrow \alpha(\beta-1)-(\beta-1)<0 \Leftrightarrow (\beta-1)(\alpha-1)<0$ **που ισχύει διότι** $0<\alpha<1<\beta$.

Ερώτηση 5η

$$|\alpha+1|>2 \Leftrightarrow \alpha+1>2 \text{ ή } \alpha+1<-2 \Leftrightarrow \alpha>1 \text{ ή } \alpha<-3$$

Ερώτηση 6η

$$d(x,-1)<3 \Leftrightarrow |x+1|<3 \Leftrightarrow -3<x+1<3 \Leftrightarrow -4<x<2$$

Ερώτηση 7η

$$|\alpha+1|=|3-3\alpha| \Leftrightarrow \alpha+1=3-3\alpha \text{ ή } \alpha+1=3\alpha-1 \Leftrightarrow 4\alpha=2 \text{ ή } 2\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2} \text{ ή } \alpha=1$$

Ερώτηση 8η

$$K = |\alpha - 1| + |\beta - 2| - |\alpha - \beta| \overset{0<\alpha<1<2<\beta}{=} -\alpha + 1 + \beta - 2 + \alpha - \beta = -1$$

Ερώτηση 9η

Για την παράσταση $K = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ πρέπει $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

Για την παράσταση $\Lambda = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$ πρέπει $(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Ερώτηση 10η

Ισχύει ότι : $\kappa = \dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \dfrac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ και $\kappa^2 = 8 + 2\sqrt{15}$

ενώ $\lambda^2 = (\sqrt{8 + 2\sqrt{12}})^2 = 8 + 2\sqrt{12}$, άρα $\kappa^2 > \lambda^2 \overset{\kappa,\lambda>0}{\Leftrightarrow} \kappa > \lambda$

Επαναληπτικό φύλο αξιολόγησης στις ενότητες

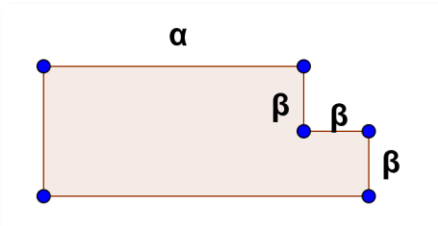
Διάταξη – απόλυτη τιμή – ρίζες πραγματικών αριθμών

ΘΕΜΑ 1ο

1. $(2 - \sqrt{5})^2 = ... = 7 - 4\sqrt{5}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt{5} + 2} = \dfrac{\sqrt{5} - 2}{5 - 4} = \sqrt{5} - 2$

3. $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = ...\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$, άρα οι αριθμοί είναι ίσοι

ΘΕΜΑ 2ο



$d(\alpha, 2) < 1 \Leftrightarrow |\alpha - 2| < 1 \Leftrightarrow -1 < \alpha - 2 < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha < 3$

$|\beta - 1| = |3 - \beta| \Leftrightarrow \beta - 1 = 3 - \beta$ ή $\beta - 1 \overset{\text{αδύνατο}}{=} \beta - 3 \Leftrightarrow \beta = 2$

Ισχύει ότι $\Pi = 6\beta + 2\alpha = 12 + 2\alpha$ και $E = 2\alpha\beta + \beta^2 = 4\alpha + 4$

Άρα $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 2 < 2\alpha < 6 \Leftrightarrow 14 < 2\alpha + 12 < 18 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 18$

Και $1 < \alpha < 3 \Leftrightarrow 4 < 4\alpha < 12 \Leftrightarrow 8 < 4\alpha + 4 < 16 \Leftrightarrow 8 < E < 16$

Ισχύει ότι : $K = |\alpha + \beta| + |3\beta - \alpha| = |\alpha + 2| + |6 - \alpha| \overset{1<\alpha<3}{=} \alpha + 2 + 6 - \alpha = 8$ $K = |\alpha + \beta| + |3\beta - \alpha|$

ΘΕΜΑ 3ο

Επειδή $0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$ θα είναι $\dfrac{1}{\alpha} > 2$ και $0 < \alpha^2 < \dfrac{1}{4}$, επίσης επειδή $1 < \beta < \dfrac{3}{2}$ θα είναι $\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{\beta} < 1$ και $1 < \sqrt{\beta} < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ από

αυτά έχουμε ότι : $\alpha^2 < \dfrac{1}{\beta} < \sqrt{\beta} < \dfrac{1}{\alpha}$

Επαναληπτικό φύλο αξιολόγησης στις ενότητες

Διάταξη – απόλυτη τιμή – ρίζες πραγματικών αριθμών

ΘΕΜΑ 1ο

1. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in R$ ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha\cdot\gamma = \beta\cdot\gamma \Rightarrow \alpha=\beta$ Λάθος

2. Αν $\gamma < 0 < \alpha < \beta$ τότε $\gamma\cdot\alpha > \gamma\cdot\beta$ Σωστό

3. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει $|x|+|y|=0$ τότε x=0 ή y=0 Λάθος

4. Αν $x \in R$ με $x \neq 0$ τότε $\frac{x^2}{|x|}=|x|$ Σωστό

5. Αν $x<0$ τότε $\sqrt{x^2}=-x$ Σωστό

6. Για τους μη αρνητικούς α,β ισχύει η ισοδυναμία $\alpha<\beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha}<\sqrt[\nu]{\beta}$ Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

$$d(2\alpha,1)<3 \Leftrightarrow |2\alpha-1|<3 \Leftrightarrow -3<2\alpha-1<3 \Leftrightarrow -2<2\alpha<4 \Leftrightarrow -1<\alpha<2$$

$$|\beta-2|<1 \Leftrightarrow -1<\beta-2<1 \Leftrightarrow 1<\beta<3$$

$$\begin{matrix}-1<\alpha<2\\1<\beta<3\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-1<\alpha<2\\-2>-2\beta>-6\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-1<\alpha<2\\-6<-2\beta<-2\end{matrix} \Rightarrow -7<\alpha-2\beta<0$$

$$K=|\alpha+1|+2|\beta-3|+|\alpha-2\beta| \overset{-1<\alpha<2}{\underset{1<\beta<3}{=}} (\alpha+1)+2(3-\beta)+|\alpha-2\beta| \overset{-7<\alpha-2\beta<0}{=} \alpha+1+6-2\beta+2\beta-\alpha=7$$

ΘΕΜΑ 3ο

$$\alpha^2+\beta^2=4\alpha-2\beta-5 \Leftrightarrow \alpha^2-4\alpha+4+\beta^2+2\beta+1=0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2+(\beta+1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2\ ,\ \beta=-1$$

Η παράσταση : $\Pi=\frac{x-\alpha}{(\sqrt{x-2})^2}+\frac{2x+\beta}{\sqrt{4x^2-4x+1}}=\frac{x-\alpha}{x-2}+\frac{2x+\beta}{|2x-1|}=\frac{x-2}{x-2}+\frac{2x-1}{|2x-1|}$

ορίζεται για $x\geq 2$ και $x\neq\frac{1}{2}$ άρα για $x\geq 2$ οπότε Π=2.

Ισχύουν : $(\alpha-\beta)\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, $4\cdot\sqrt{\alpha-\beta}=4\sqrt{3}$, $5\sqrt{\alpha}=5\sqrt{2}$, $4x\overset{x\geq 2}{\geq}8$.

Επειδή $(3\sqrt{5})^2=45,\ (4\sqrt{3})^2=48,\ (5\sqrt{2})^2=50,\ (4x)^2\geq 64$ θα είναι $4x>5\sqrt{2}>4\sqrt{3}>3\sqrt{5}$