# Κεφάλαιο 6ο

**Ενότητα 3η**

1. $\begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ 2x^2-7x+3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \\ x\in[\frac{1}{2},3] \end{cases} \Leftrightarrow x\in[\frac{1}{2},1)\cup(2,3]$
2. $x^2\le 4 \Leftrightarrow x\in[-2,2]$
3. $x<x^2\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x<x^2 \\ x^2\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x>0 \\ x^2-1\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ x\in[-1,1] \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1,0)$
4. $\frac{1}{x^2}<1 \underset{x^2>0}{\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}} 1<x^2 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
5. $-2<x^2-2x-3<5 \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x^2-2x-3 \\ x^2-2x-3<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-1>0 \\ x^2-2x-8<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} x\in(-\infty,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},+\infty) \\ x\in(-2,4) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-2,1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2},4)$
6. $|x^2-3x|<2 \Leftrightarrow -2<x^2-3x<2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2>0 \\ x^2-3x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$

   $\begin{cases} x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \\ x\in(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{3+\sqrt{17}}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(\frac{3-\sqrt{17}}{2},1)\cup(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2})$
7. $3x^2-15x+18>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

   Θα δείξουμε ότι ισχύει $3(|k|+4)^2-15(|k|+4)+18>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό κ

   Ονομάζουμε $f(x)=3x^2-15x+18$, για κάθε πραγματικό αριθμό κ ισχύει ότι $|\kappa|+4\in(3,+\infty)$ οπότε $f(|\kappa|+4)>0$
8. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(\alpha)=\alpha^2-\alpha\cdot\beta+\beta^2$ το οποίο έχει $\Delta=\beta^2-4\beta^2=-\beta^2\le 0$, άρα $f(\alpha)\ge 0$

   Όμοια $g(\alpha)=\alpha^2+\alpha\cdot\beta+\beta^2\ge 0$
9. $|x|\ge 2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$ και $|x|\ge 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. Θεωρούμε το τριώνυμο $g(x)=x^2-3x+2$ και το $f(x)=x^2-3|x|+2=|x|^2-3|x|+2=g(|x|)$, οπότε σχετικά με το πρόσημο του f έχουμε ότι

   $f(x)>0 \overset{|x|=u}{\Leftrightarrow} g(u)>0 \Leftrightarrow u\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty) \overset{u=|x|}{\Leftrightarrow} |x|<1$ ή $|x|>2 \Leftrightarrow -1<x<1$ ή $x>2$ ή $x<-2$

   $x\in(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,+\infty)$
10. $|2x-3|<3 \Leftrightarrow -3<2x-3<3 \Leftrightarrow 0<2x<6 \Leftrightarrow 0<x<3$

    $f(x)=|x^2-3x|+|5-x|+|x-4| \underset{x\in(0,3)}{\overset{x^2-3x<0}{=}} (-x^2-3x)+(5-x)+(-x+4)=-x^2-5x+9$

11. Για την παράσταση $f(x)=|x^2-3x+2|-|x^2-4|$ Σχηματίζουμε το παρακάτω πινακάκι

| x | $-\infty$ | | -2 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2$-3x+2 | | + | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $x^2$-4 | | + | 0 | - | | - | 0 | + | |

Άρα αν $x\le -2$ τότε $f(x)=(x^2-3x+2)-(x^2-4)=-3x+6$

αν $-2<x<1$ τότε $f(x)=(x^2-3x+2)+(x^2-4)=2x^2-3x-2$

αν $1\le x<2$ τότε $f(x)=-(x^2-3x+2)+(x^2-4)=3x-6$

αν $x\ge 2$ τότε $f(x)=(x^2-3x+2)-(x^2-4)=-3x+6$

Για την ανίσωση f(x)>0 έχουμε

Αν $x\le -2$ τότε $f(x)=-3x+6>0 \Leftrightarrow x<2$ άρα $x\le -2$

Αν $-2<x<1$ τότε $f(x)=2x^2-3x-2>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(2,+\infty)$ άρα $x\in(-2,-\frac{1}{2})$

Αν $1\le x<2$ τότε $f(x)=3x-6>0 \Leftrightarrow x>2$ αδύνατο

Αν $x\ge 2$ τότε $f(x)=-3x+6>0 \Leftrightarrow x<2$ αδύνατο

Άρα $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$

12. $f(x)=|x-2|+x-3=\begin{cases} 2x-5 & ,x\ge 2 \\ -1 & ,x<2 \end{cases}$

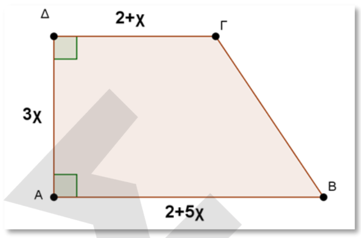
$$f(x)=x^2-4x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=x^2-4x & ,x\ge 2 \\ -1=x^2-4x & ,x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0 & ,x\ge 2 \\ x^2-4x+1=0 & ,x<2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ ή } x=5 & ,x\ge 2 \\ x=2\pm\sqrt{3} & ,x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \text{ ή } x=2-\sqrt{3}$$

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5>0 & ,x\ge 2 \\ -1>0 & ,x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$$

**Ενότητα 4η**

1. $\dfrac{5t}{1+\frac{1}{36}t^2}\ge 12 \Leftrightarrow 5t\ge 12+\frac{1}{3}t^2 \Leftrightarrow t^2-15t+36\le 0 \Leftrightarrow t\in(3,12)$, άρα το φάρμακο είναι αποτελεσματικό για 9 ώρες.




2. $\begin{matrix} E<99 \\ \Pi>39 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \dfrac{(2+x)+(2+5x)}{2}\cdot 3x<99 \\ (2+x)+3x+(2+5x)+5x>39 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 13x^2+2x-33<0 \\ 14x>35 \end{matrix} \Leftrightarrow$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{matrix} x\in(0,3) \\ x>\dfrac{5}{2} \end{matrix} \Leftrightarrow x\in(\dfrac{5}{2},3)$

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

**Επίλυση ανισώσεων 1ου – 2ου βαθμού**

ΘΕΜΑ 1ο

**Α)** Σχετικά με το πρόσημο του τριωνύμου ισχύουν τα παρακάτω.

Εάν το τριώνυμο $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in R$ και $\alpha\neq 0$ έχει :

1. δύο ρίζες τότε, εκτός των ριζών είναι ομόσημο του α, ενώ εντός των ριζών είναι ετερόσημο του α

2. Δ<0 τότε πάντα είναι ομόσημο του α

**Β)** Εάν το τριώνυμο $f(x)=2^{2010}x^2+\beta x+\gamma$ με $\beta,\gamma\in R$ έχει ρίζες του αριθμούς -1 και 2 τότε :

1. η ανίσωση $f(x)>0$ αληθεύει για $x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

2. από τους αριθμούς $f(0),f(-1),f(-2^{2010})$ ,
μεγαλύτερος είναι ο $f(0)$ και μικρότερος ο $f(-2^{2010})$

ΘΕΜΑ 2ο

$$1\leq\frac{1}{x^2}\underset{x\neq 0}{\overset{x^2>0}{\Leftrightarrow}} x^2\leq 1\Leftrightarrow x^2-1\leq 0\Leftrightarrow x\in[-1,1]$$

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x)=x^2-3x+2$ άρα $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ , $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(1,2)$ , $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

$x^2\leq 4\Leftrightarrow x\in[-2,2]$

$$\begin{matrix} x^2-3x+2\geq 0 \\ x^2\leq 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty) \\ x\in[-2,2] \end{matrix} \Leftrightarrow x\in[-2,1]\cup\{2\}$$

**Ενότητα 5η**

1. Για να ορίζεται στο R η παράσταση $f(x)=\sqrt{x^2-3\lambda x+1}$ θα πρέπει να ισχύει $x^2-3\lambda x+1\geq 0$ για κάθε x πραγματικό άρα $\Delta\leq 0\Leftrightarrow 9\lambda^2-4\leq 0\Leftrightarrow \lambda\in[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$
2. Για να έχει το τριώνυμο $f(x)=2x^2-(\kappa-2)\cdot x-\kappa$

   δύο αντίθετες ρίζες πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ S=0\end{matrix}\Leftrightarrow \begin{matrix}(\kappa-2)^2+8\kappa>0\\ \frac{\kappa-2}{4}=0\end{matrix}\Leftrightarrow \kappa=2$

   δύο ρίζες με γινόμενο -2 πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ P=-2\end{matrix}\Leftrightarrow \begin{matrix}(\kappa-2)^2+8\kappa>0\\ -\frac{\kappa}{2}=-2\end{matrix}\Leftrightarrow \kappa=4$
3. Η διακρίνουσα του $f(x)=x^2-(\lambda-2)x+1-\lambda$ είναι $\Delta=(\lambda-2)^2-4(1-\lambda)=\lambda^2\geq 0$, άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει πάντα λύση.
   Επίσης είναι $S=\lambda-2$ και $P=1-\lambda$, οπότε το πινακάκι των προσήμων είναι

| λ | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Δ | + | o | + | | + | | + | |
| P | + | | + | o | - | | - | |
| S | - | | - | | - | o | + | |

   Όταν λ<0 η εξίσωση έχει δύο λύσεις αρνητικές
   Όταν λ=0 η εξίσωση έχει μία διπλή λύση αρνητική
   Όταν 0<λ<1 η εξίσωση έχει δύο λύσεις αρνητικές
   Όταν λ=1 η εξίσωση έχει δύο λύσεις το 0 και μία αρνητική
   Όταν 1<λ<2 η εξίσωση έχει δύο λύσεις ετερόσημες με την αρνητική απολύτως μεγαλύτερη της θετικής.
   Όταν λ=2 η εξίσωση έχει δύο λύσεις αντίθετες
   Όταν λ>2 η εξίσωση έχει δύο λύσεις ετερόσημες με την θετική απολύτως μεγαλύτερη της αρνητικής.
4. Για να έχει το τριώνυμο $f(x)=x^2-(\lambda-4)x-2\lambda+5$ ρίζα το -1 πρέπει $1+(\lambda-4)-2\lambda+5=0\Leftrightarrow\lambda=2$
   Για να είναι η εξίσωση f(x)=0 αδύνατη πρέπει $\Delta=(\lambda-4)^2-4(-2\lambda+5)<0\Leftrightarrow\lambda^2-9<0\Leftrightarrow\lambda\in(-3,3)$
   Για να έχει η εξίσωση μία διπλή λύση πρέπει Δ=0 άρα λ=3 ή λ=-3
   Για να έχει η εξίσωση δύο λύσεις αντίθετες πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ S=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ \lambda-4=0\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda=4$
   Για να έχει η εξίσωση δύο λύσεις αντίστροφες πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ P=1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ -2\lambda+5=1\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda=-2$

Για να έχει δύο λύσεις άνισες με $x_1^2+x_2^2=10$ πρέπει

$$\begin{matrix}\Delta>0\\ x_1^2+x_2^2=10\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ S^2-2P=10\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ (\lambda-4)^2-2(-2\lambda+5)=10\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ \lambda^2-4\lambda-4=0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}\lambda\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\\ \lambda=2\pm2\sqrt{2}\end{matrix} \Leftrightarrow \lambda=2+2\sqrt{2}$$

Ασκήσεις επανάληψης

1. Για να έχει η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda^2-3=0$ δύο λύσεις άνισες πρέπει
   $\Delta=\lambda^2-4(\lambda^2-3)>0\Leftrightarrow 12-3\lambda^2>0\Leftrightarrow \lambda^2-4<0\Leftrightarrow \lambda\in(-2,2)$
   Η παράσταση $K=x_1^2+x_2^2$ είναι ίση με $K=S^2-2P=\lambda^2-2(\lambda^2-3)=6-\lambda^2$ και επειδή -2<λ<2 παίρνει τιμές $|\lambda|<2\Leftrightarrow 0\le\lambda^2<4\Leftrightarrow 0\ge-\lambda^2>-4\Leftrightarrow 6\ge 6-\lambda^2>2$ οπότε η μεγαλύτερη τιμή της είναι K=6
   $x_1^2+x_2^2-x_1x_2\ge1\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow 6-\lambda^2-\lambda^2-3\ge1\Leftrightarrow 2(1-\lambda^2)\ge0 \overset{-2<\lambda<2}{\Leftrightarrow} \lambda\in[-1,1]$
2. Η εξίσωση $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-2)x-7\lambda-1=0$ έχει δύο λύσεις άνισες όταν
   $$\begin{matrix}\lambda\ne1\\ \Delta=4(\lambda-2)^2-4(\lambda-1)(-7\lambda-1)>0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\ne1\\ 8\lambda^2-10\lambda+3>0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\ne1\\ \lambda\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{4},+\infty)\end{matrix} \Leftrightarrow$$
   $$\lambda\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{4},1)\cup(1,+\infty)$$
   Για να είναι ετερόσημες αρκεί $P<0\Leftrightarrow \frac{-7\lambda-1}{\lambda-1}<0\Leftrightarrow(7\lambda+1)(\lambda-1)>0\Leftrightarrow\lambda\in(-\infty,-\frac{1}{7})\cup(1,+\infty)$
   Για να έχει δύο λύσεις θετικές πρέπει
   $$\begin{matrix}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{4},1)\cup(1,+\infty)\\ \frac{2(\lambda-2)}{\lambda-1}>0\\ \frac{-7\lambda-1}{\lambda-1}>0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\in(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{4},1)\cup(1,+\infty)\\ \lambda\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)\\ \lambda\in(-\frac{1}{7},1)\end{matrix} \Leftrightarrow \lambda\in(-\frac{1}{7},\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{4},1)$$
3. Για να έχει η εξίσωση $x^2-(\lambda+2)\cdot x+(4\lambda-8)=0$ πραγματικές λύσεις πρέπει $\Delta\ge0$ που ισχύει διότι $\Delta=\ldots=(\lambda-6)^2\ge0$
   Για λ=6 η εξίσωση έχει μία διπλή λύση η οποία είναι η $x^2-8x+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4$
   Για να έχει λύσεις αντίθετες πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ S=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\ne6\\ \lambda+2=0\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda=-2$
   Για να έχει λύσεις αντίστροφες πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ P=1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\ne6\\ 4\lambda-8=1\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda=\frac{9}{4}$
   Για να είναι το τριώνυμο πάντα θετικό πρέπει Δ<0 και Α>0 πράγμα αδύνατο
   Για να έχει λύση το 1 πρέπει $1-\lambda-2+4\lambda-8=0\Leftrightarrow\lambda=3$

Για να έχει δύο λύσεις με άθροισμα 8 πρέπει $\begin{matrix} \lambda \neq 6 \\ S = \lambda + 2 = 6 \end{matrix}$ πράγμα αδύνατο

Αν $x_1, x_2$ οι λύσεις της εξίσωσης τότε θα είναι $S = \lambda + 2$ και $P = 4\lambda - 8$, οπότε η εξίσωση που θα έχει ως λύσεις τους $-x_1,\ -x_2$ θα είναι η

$x^2 - (-x_1 - x_2)x + (-x_1)(-x_2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 + (\lambda + 2)x + (4\lambda - 8) = 0$

4. Για να είναι πάντα θετικό το τριώνυμο $f(x) = (\lambda^2 - \lambda - 2)x^2 - (2\lambda + 1)x + 1$ πρέπει

$$\begin{matrix} \Delta < 0 \\ \alpha > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (2\lambda+1)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda - 2) < 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda < -\frac{9}{8} \\ \lambda \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \end{matrix} \Leftrightarrow \lambda < -\frac{9}{8}$$

Για να είναι πάντα αρνητικό το τριώνυμο $f(x) = (\lambda^2 - \lambda - 2)x^2 - (2\lambda + 1)x + 1$ πρέπει

$$\begin{matrix} \Delta < 0 \\ \alpha < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (2\lambda+1)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda - 2) < 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 2 < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda < -\frac{9}{8} \\ \lambda \in (-1, 2) \end{matrix} \text{ πράγμα αδύνατο}$$

5. Για να έχει η εξίσωση $x^2 - (a+2)|x| + a - 2 = 0$ δύο λύσεις άνισες πρέπει η επιλύουσα να έχει δύο ετερόσημες λύσεις ή μια διπλή θετική, άρα οι συνθήκες είναι

$$P < 0 \Leftrightarrow a - 2 < 0 \Leftrightarrow a < 2 \text{ ή } \begin{matrix} \Delta = 0 \\ S > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (a+2)^2 - 4(a-2) = 0 \\ a + 2 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a^2 - 4 = 0 \\ a > -2 \end{matrix} \Leftrightarrow a = 2$$

6. Επειδή ισχύει $a \cdot f(\xi) < 0$ έχουμε ότι για κάποιο ξ το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α, αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
7. Επειδή ισχύει $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) < 0$ έχουμε ότι υπάρχουν δύο τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες το τριώνυμο αλλάζει πρόσημο, αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες.
8. Για το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 4x + 1$, $x \in R$ έχουμε $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$ και

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$

Για την παράσταση $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot (\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda) = \kappa \cdot f(\kappa) \cdot \lambda \cdot f(\lambda)$ με $0 < 2 - \sqrt{3} < \kappa < 2 + \sqrt{3} < \lambda$ έχουμε ότι Κ,λ>0 και f(κ)<0 και f(λ)>0 άρα η παράσταση είναι αρνητική

9. Το τριώνυμο $f(x) = \kappa \cdot x^2 - x + \kappa$ με $\kappa \neq 0$ για να έχει δύο άνισες ρίζες πρέπει

$\Delta = 1 - 4\kappa^2 > 0 \Leftrightarrow \kappa \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Για να είναι πάντα θετικό πρέπει $\begin{matrix} \kappa > 0 \\ \Delta < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa > 0 \\ \kappa \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \end{matrix} \Leftrightarrow \kappa \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

Για να έχει μία διπλή ρίζα αρνητική πρέπει $\begin{matrix} \Delta = 0 \\ S < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa = \pm\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\kappa} < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2}$

Αν $\kappa < -\frac{1}{2}$ τότε Δ<0 και κ αρνητικό άρα το τριώνυμο είναι πάντα αρνητικό, οπότε f(2023)<0

10. Η εξίσωση $x^2 + ax + b + 2 = 0$ έχει λύσεις τους $x_1 < x_2$, ενώ η εξίσωση $x^2 + ax + b - 2 = 0$ έχει λύσεις τους $\rho_1 < \rho_2$. Θέτοντας όπου α=-5 και b=2 καταλήγουμε σε δύο περιπτώσεις εξισώσεων τις $x^2$-5x+4=0 με λύσεις

τις 1 και 4 και την εξίσωση $\chi^2$-5χ=0 με λύσεις τις 0 και 5.Επειδή είναι 0<1<4<5 μάλλον θα πρέπει να δείξουμε $\rho_1<\chi_1<\chi_2<\rho_2$. Επειδή $x_1^2+ax_1+b-2 \overset{x_1^2+ax_1+b+2=0}{=} -4<0$ θα πρέπει $\rho_1<x_1<\rho_2$, όμοια και για το $x_2$ οπότε τελικά θα είναι $\rho_1<x_1<x_2<\rho_2$.

Ερωτήσεις κατανόησης

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Σ** | **Σ** | **Λ** | **Λ** | **Λ** | **Λ** | **Λ** | **Σ** | **Λ** | **Λ** |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Σ** | **Σ** | **Λ** | **Λ** | **Σ** | **Σ** | **Σ** | **Σ** |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| **Σ** | **Σ** | **Λ** | **Σ** | **Λ** |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| **Λ** | **Σ** | **Σ** | **Σ** |

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

**Επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού**

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

Το τριώνυμο $g(x)=(k+2)x^2+(k+2)x-k$ με $k\in R-\{-2\}$ έχει διακρίνουσα ίση με $\Delta=(k+2)(5k+2)$

Οπότε για $\kappa\in(-2,-\frac{2}{5})$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Για να είναι πάντα θετικό πρέπει $\begin{matrix}\Delta<0\\ \kappa+2>0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa\in(-2,-\frac{2}{5})\\ \kappa>-2\end{matrix} \Leftrightarrow \kappa\in(-2,-\frac{2}{5})$

Για να έχει δύο ρίζες ετερόσημες θα πρέπει $P<0 \Leftrightarrow -\frac{\kappa}{\kappa+2}<0 \Leftrightarrow \kappa(\kappa+2)>0 \Leftrightarrow \kappa\in(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

**Επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού**

ΘΕΜΑ 1ο

| κ | $-\infty$ | -2 | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Δ | + | 0 | + | | + | | + | |
| P | + | | + | 0 | - | | - | |
| S | - | | - | | - | 0 | + | |

Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις σχετικά με το είδος και το πλήθος των ριζών του τριωνύμου :

**1.** Όταν $\kappa \in (-\infty,-2)\cup(-2,0)$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες αρνητικές

**2.** Όταν $\kappa \in (0,2)$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ετερόσημες με την αρνητική απολύτως μεγαλύτερη της θετικής

**3.** Όταν $\kappa \in (2,+\infty)$ το τριώνυμο έχει δύο ρίζες ετερόσημες με την θετική απολύτως μεγαλύτερη της αρνητικής

**4**. Όταν κ = -2 το τριώνυμο έχει μία διπλή ρίζα αρνητική

**5.** Όταν κ = 0 το τριώνυμο έχει δύο ρίζες το 0 και μία αρνητική

**6.** Όταν το κ = 2 το τριώνυμο έχει δύο ρίζες αντίθετες.

ΘΕΜΑ 2ο

$$T(x)=(x^2-5x+4)(x^2+1)<0 \Leftrightarrow x^2-5x+4<0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\in(0,1)\cup(4,+\infty)$$

Άρα το έτος 3.234.522=3,234522 εκατομμύρια χρόνια η θερμοκρασία θα είναι κάτω από το 0.

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

**Επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού**

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρία …

ΘΕΜΑ 2ο

Για το τριώνυμο $f(x)=x^2-4x+1$ , $x\in R$ έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$ και $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$

Για τις τιμές $f(\frac{1}{2-\sqrt{3}})$ , $f(\sqrt{3})$ , $f(-2-\sqrt{3})$ έχουμε …

$f(\frac{1}{2-\sqrt{3}}) = f(2+\sqrt{3}) = 0$ , $2-\sqrt{3} < \sqrt{3} < 2+\sqrt{3}$ άρα $f(\sqrt{3}) < 0$ και $-2-\sqrt{3} < 2-\sqrt{3}$ άρα $f(-2-\sqrt{3}) > 0$

ΘΕΜΑ 3ο

Το τριώνυμο $f(x) = \kappa \cdot x^2 - x + \kappa$ με $\kappa \neq 0$ για να έχει δύο άνισες ρίζες πρέπει $\Delta = 1 - 4\kappa^2 > 0 \Leftrightarrow \kappa \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Για να είναι πάντα αρνητικό πρέπει $\begin{matrix} \kappa < 0 \\ \Delta < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa < 0 \\ \kappa \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty) \end{matrix} \Leftrightarrow \kappa \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

Για να έχει ρίζες αντίστροφες και αρνητικές θα πρέπει

$$\begin{matrix} \Delta > 0 \\ P = 1 \\ S < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \kappa \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ 1 = 1 \\ \frac{1}{\kappa} < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \kappa \in (-\frac{1}{2}, 0)$$

Επειδή $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$ η τιμή της f θα είναι ετερόσημη του κ άρα $\kappa \cdot f(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$