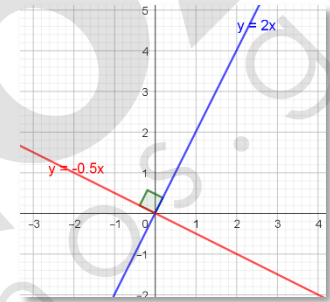
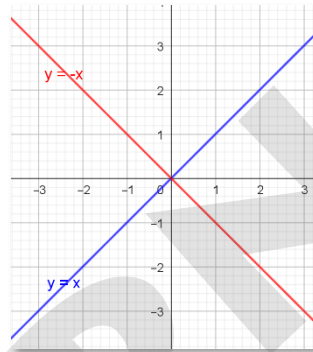
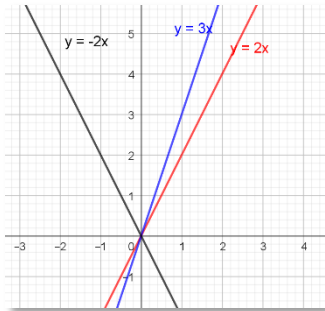


Κεφάλαιο 8^ο

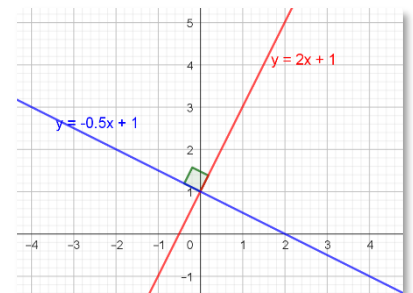
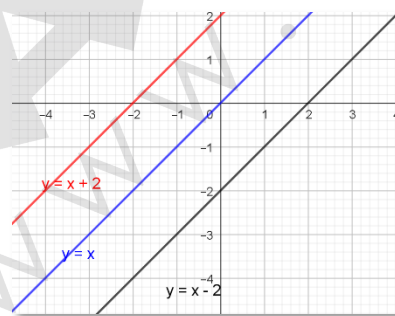
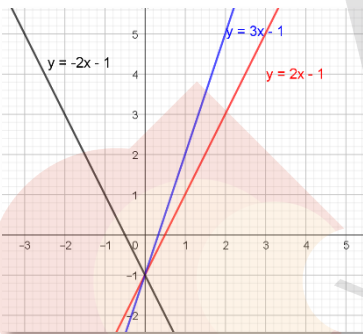
Ενότητα 1^η

- 1.
- 2.
- 3.



Ενότητα 2^η

- 1.
- 2.
- 3.



Ενότητα 3^η

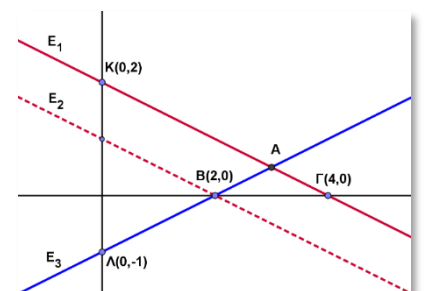
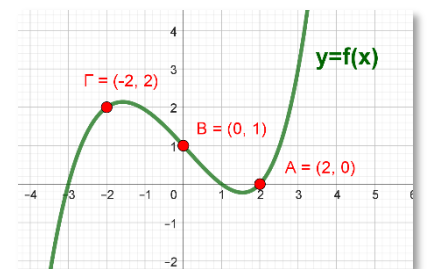
1. Έχουμε ότι $\lambda_{AB} = \frac{1-0}{0-2} = -\frac{1}{2}$, άρα η ευθεία θα έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{2}x + b$ όπου b η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας με

τον άξονα γ'γ άρα 1. Οπότε $\varepsilon_{AB} : y = -\frac{1}{2}x + 1$

Το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία γιατί οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

$$f(x) > -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$$

2. Δουλεύοντας όμοια με πριν έχουμε ότι $\varepsilon_1 : y = -\frac{1}{2}x + 2$ η ευθεία ε_2 είναι παράλληλη της ε_1 άρα θα έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης οπότε θα είναι της μορφής $\varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + b$, αλλά το σημείο B(2,0)



ανήκει στην ευθεία άρα οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, οπότε θα είναι

$$0 = -1 + b \Leftrightarrow b = 1, \text{ άρα } \varepsilon_2 : y = -\frac{1}{2}x + 1. \text{ Τέλος η } \varepsilon_3 \text{ είναι συμμετρική της } \varepsilon_2 \text{ ως προς τον άξονα } x'x \text{ άρα}$$

$$\text{θα έχει εξίσωση } \varepsilon_3 : y = \frac{1}{2}x - 1$$

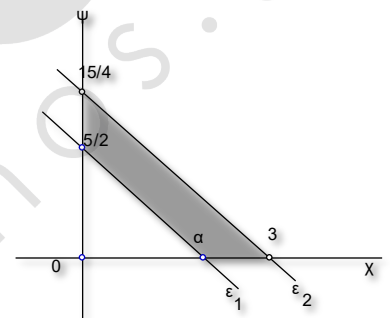
Για να βρούμε το σημείο Α λύνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}x + 2 & \quad y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2 & \quad \Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \text{ άρα } A(3, 1/2) \\ y = \frac{1}{2}x - 1 & \quad \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2 \\ x = 3 & \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$(AB\Gamma) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$3. \text{ Ισχύει ότι } \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} = -\frac{15}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{2\alpha} = \frac{15}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

$$E = \frac{3 \cdot \frac{15}{4} - 2 \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{15}{8}$$



$$4. \text{ Είναι } 2y = x - 8 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - 4 \text{ περνά από το } \Delta \text{ και τέμνει τον } \gamma\gamma \text{ στο } (0, -4) \text{ άρα } \varepsilon_{\Delta\text{N}} : 2y = x - 8$$

$$\text{Είναι } 2y + x = 8 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \text{ περνά από το } \Delta \text{ και τέμνει}$$

$$\text{τον } \gamma\gamma \text{ στο } (0, 4) \text{ άρα } \varepsilon_{\Delta\text{M}} : 2y + x = 8$$

$$\text{Είναι } 4y = 3x - 16 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - 4, \text{ περνά από το } \text{N} \text{ άρα θα}$$

$$\text{είναι η } \text{BN}, \text{ δηλαδή } \varepsilon_{\text{BN}} : 4y = 3x - 16$$

$$\text{Και τέλος } \varepsilon_{\text{MB}} : 4y + 3x = 16$$

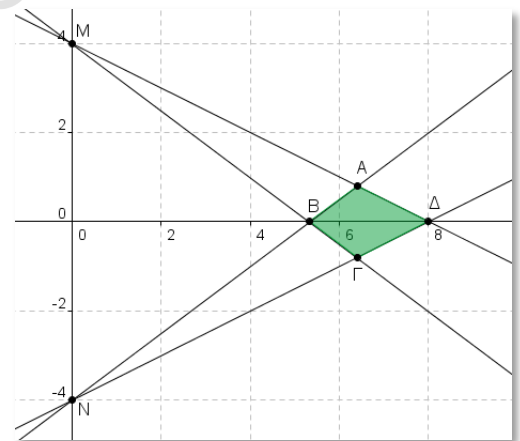
Η MB τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B το οποίο είναι (θέτω στην εξίσωσή της όπου y το 0) $B(16/3, 0)$

Το σημείο A θα βρεθεί λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των BN και MΔ και έχουμε :

$$\begin{aligned} 4y = 3x - 16 & \quad 4y = 3(-2y + 8) - 16 \quad \Leftrightarrow 10y = 8 \quad \Leftrightarrow y = \frac{4}{5} \\ 2y + x = 8 & \quad x = -2y + 8 \quad \Leftrightarrow x = -2y + 8 \quad \Leftrightarrow x = \frac{32}{5} \end{aligned} \text{ , άρα } A(32/5, 4/5) \text{ όμοια βρίσκουμε ότι}$$

$$\Gamma(32/5, -4/5). \text{ Οπότε } E = 2(AB\Delta) = 2 \cdot \frac{B\Delta \cdot y_A}{2} = (8 - \frac{32}{5}) \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{25}$$

$$5. \text{ Τα σημεία } A(5, 2\alpha - 2) \text{ και } B(3\alpha + 1, 4\alpha - 10) \text{ βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα } x'x \text{ άρα } 2\alpha - 2 = 4\alpha - 10 \Leftrightarrow 2\alpha = 8 \Leftrightarrow \alpha = 4 \text{ και τα σημεία είναι τα } A(5, 6) \text{ και } B(13, 6) \text{ και η ευθεία } AB \text{ έχει εξίσωση } y = 6. \text{ Προφανώς η απόσταση } AB \text{ είναι ίση με } 13 - 5 = 8$$



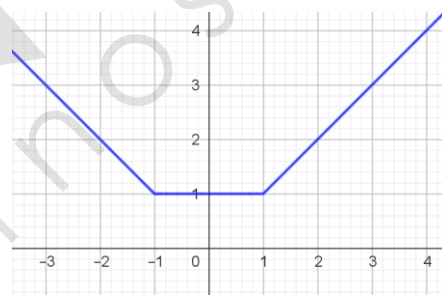
Ενότητα 4^η

1. Για την συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1|+|x+1|}{2}$ σχηματίζουμε το πινακάκι ...

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x-1	-	-	o	+
x+1	-	o	+	+

Οπότε ο τύπος της θα είναι $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$

Η γραφική της παράσταση παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα :



$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

$$f(x) > 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

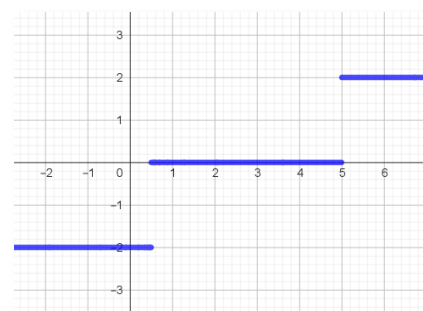
$$d(\alpha, 1) + d(\alpha, -1) = 4 \Leftrightarrow |\alpha - 1| + |\alpha + 1| = 4 \Leftrightarrow \frac{|\alpha - 1| + |\alpha + 1|}{2} = 2 \Leftrightarrow f(\alpha) = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = -2$$

2. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 25}}{x - 5} + \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2x - 1} = \frac{|x - 5|}{x - 5} + \frac{|2x - 1|}{2x - 1}$, σχηματίζουμε το πινακάκι

x	$-\infty$	1/2	5	$+\infty$
x-5	-	-	o	+
2x-1	-	o	+	+

Οπότε ο τύπος της συνάρτησης θα είναι $f(x) = \begin{cases} -2 & , x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \frac{1}{2} < x < 5 \\ 2 & , x \geq 5 \end{cases}$

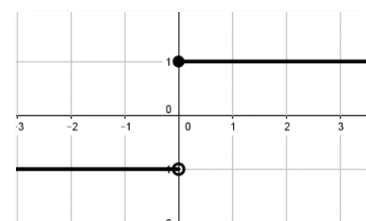
η γραφική παράσταση της συνάρτησης παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα και το σύνολο τιμών της είναι $Rf = \{-2, 0, 2\}$



3. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $Df = \mathbb{R}$

Το σύνολο τιμών της είναι το $Rf = \{-1, 1\}$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$



Ενότητα 5^η

Ποσότητα πετρελαίου σε λίτρα	Τιμή ανά λίτρο σε λεπτά του ευρώ	Κόστος εξυπηρέτησης σε λεπτά του ευρώ
$x \in (0, 200]$	110 λεπτά	1800 λεπτά
$x > 200$	100 λεπτά	2800 λεπτά

1. Από τον παραπάνω πίνακα καταλήγουμε στην συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 18 + 1.1x & , x \in (0, 200] \\ 28 + x & , x > 200 \end{cases}$

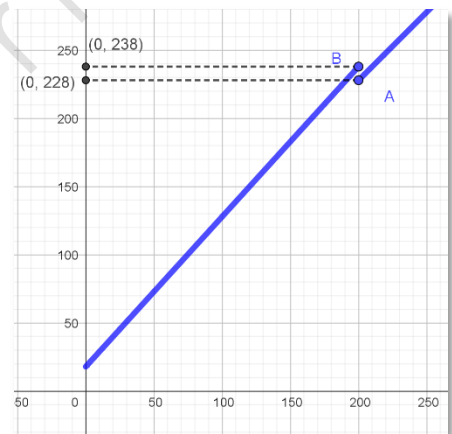
Άρα μια παραγγελία 300 λίτρων θα κοστίσει $f(300) = 328$ ευρώ

Με 128 ευρώ αγοράζουμε : $18 + 1.1 \cdot x = 128$, αν $0 < x \leq 200$
 $28 + x = 128$, αν $x > 200$

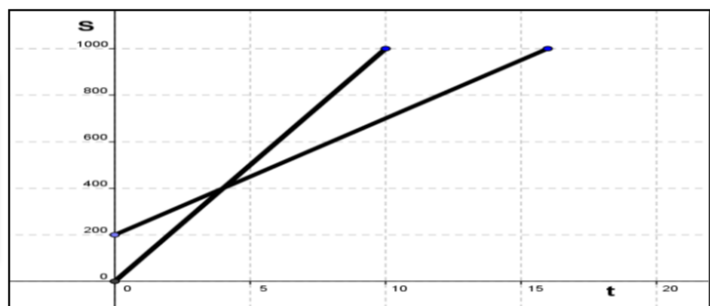
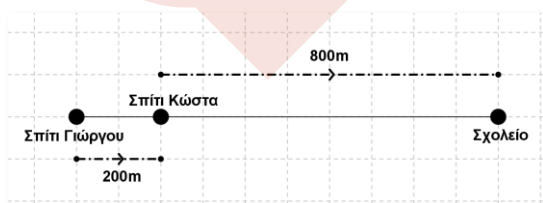
η πρώτη εξίσωση δίνει λύση $x=100$ λίτρα

που είναι δεκτή ενώ η 2^η εξίσωση δίνει λύση $x=100$ που απορρίπτεται λόγω του περιορισμού της εξίσωσης.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρήστε ότι παρουσιάζει μια μορφή ασυνέχειας γύρω από την τιμή 200. Ο 1^{ος} τύπος δίνει τιμή 238 και ο 2^{ος} 228. Αυτό σημαίνει ότι η προσφορά όπως έχει γίνει παρουσιάζει ένα πρόβλημα αφού υπάρχει η δυνατότητα να παραγγείλει κάποιος περισσότερα λίτρα και να πληρώσει λιγότερα από ότι θα πλήρωνε για παράδειγμα 200 λίτρων. Αυτό το σημείο εξετάζεται στο 4^ο ερώτημα η παραγγελία 191 λίτρων δίνει κόστος 228,1 ευρώ ενώ η παραγγελία των 210 λίτρων 228 ευρώ.



- 2.

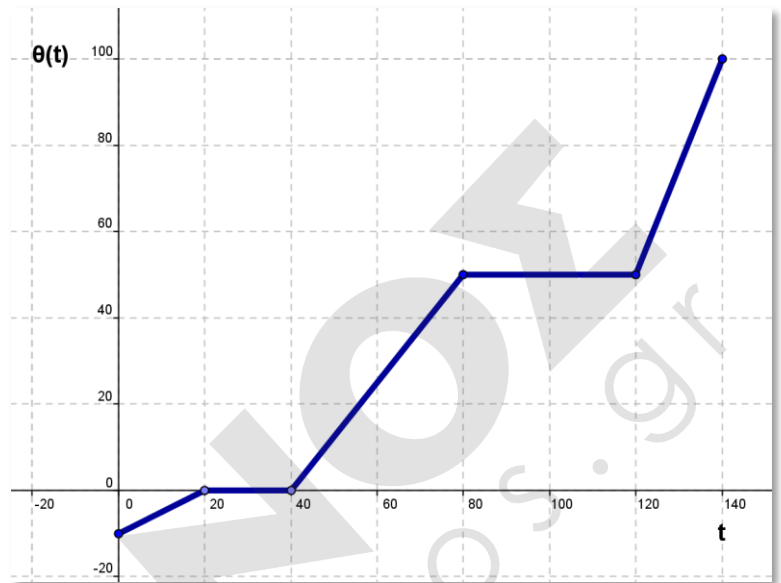


Από τα παραπάνω διαγράμματα έχουμε ότι : Η γραμμή που ξεκινά από την αρχή των αξόνων αντιστοιχεί στο διάγραμμα κίνησης του Γιώργου και η άλλη του Κώστα. Πιο γρήγορα βαδίζει ο Γιώργος έχει μεγαλύτερη κλίση. Οι εξισώσεις των δύο κινήσεων είναι $y_G = 100t$ και $y_K = 200 + 50t$, οπότε θα συναντηθούν $100t = 200 + 50t \Leftrightarrow 50t = 200 \Leftrightarrow t = 4$ στο 4^ο λεπτό από τη στιγμή που ξεκίνησε ο Γιώργος και σε μία απόσταση $y=400$ μέτρων από το σπίτι του Γιώργου ή 200 μέτρων από το σπίτι του Κώστα. Πιο γρήγορα φθάνει ο Γιώργος σε 10 λεπτά ενώ ο Κώστας κάνει 16 λεπτά. Οι ταχύτητες είναι οι συντελεστές του t , δηλαδή ο Γιώργος κινείται με ταχύτητα 100μέτρα/λεπτό και ο Κώστας 50μέτρα/λεπτό

3.

Η συνάρτηση έχει τύπο :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t - 10 & , t \in [0, 20) \\ 0 & , t \in [20, 40) \\ \frac{5}{4}t - 50 & , t \in [40, 80) \\ 50 & , t \in [80, 120) \\ \frac{5}{2}t - 250 & , t \in [120, 140] \end{cases}$$



Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Η συνάρτηση $y=ax+\beta$

ΘΕΜΑ 1^ο

Η συνάρτηση $y = f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -6$ δηλαδή $A=(-6,0)$

Οι ευθείες $(\epsilon_1): x + y = -3$ και $(\epsilon_2): y = \lambda x - 3$ είναι παράλληλες όταν $\lambda = -1$

Η ευθεία $(\epsilon): (m+1)x + (m-1)y = 4$ είναι παράλληλη του άξονα $y'y$ όταν $m=1$, οπότε έχει εξίσωση $x=2$

Το σημείο $A(\alpha,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = 2x + 4$ άρα $2\alpha + 4 = 3 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$

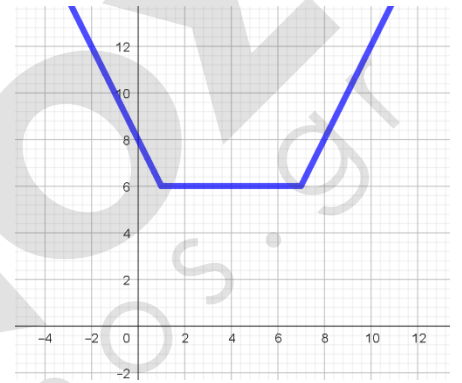
Το σημείο τομής των ευθειών $x + y = 0$ και $x - y = 2$ είναι το $-x = x - 2 \Leftrightarrow x = 1$, άρα $A=(1,-1)$

ΘΕΜΑ 2^ο

Για την συνάρτηση $y = f(x) = |1 - x| + |7 - x|$, $x \in \mathbb{R}$ σχηματίζουμε το πινακάκι ...

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
1-x	+	o	-	-
7-x	+	+	o	-

Οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x) = \begin{cases} -2x + 8 & x \leq 1 \\ 6 & 1 < x < 7 \text{ και η} \\ 2x - 8 & x \geq 7 \end{cases}$
 γραφική της παράσταση παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα



Αν $\beta < 6$ η εξίσωση $f(x) = \beta$ είναι αδύνατη

Αν $\beta = 6$ η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις

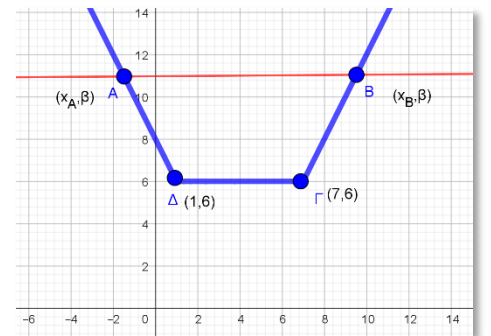
Αν $\beta > 6$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις.

Αν το τραπέζιο έχει εμβαδόν 32 τ.μ. τότε θα ισχύει :

$$E = 32 \Leftrightarrow \frac{|x_B - x_A| + 6}{2} \cdot (\beta - 6) = 32$$

$$\begin{aligned} \beta = 2x_B - 8 & \quad \frac{|\beta + 8 - 8 - \beta|}{2} + 6 \\ \Leftrightarrow \beta = -2x_A + 8 & \quad \frac{|\beta + 8 - 8 - \beta|}{2} + 6 \\ & \quad \cdot (\beta - 6) = 32 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - 36 = 64 \Leftrightarrow \beta^2 = 100 \Leftrightarrow \beta = 10 \quad (\beta > 0)$$



Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

ΘΕΜΑ 1^ο

Τα σημεία τομής της ευθείας $y=2x-3$ με τους άξονες είναι τα $A(3/2,0)$ και $B(0,-3)$

Οι ευθείες $(\epsilon_1): X + y = 5$, $(\epsilon_2): y = \lambda x + 3$ είναι παράλληλες άρα $\lambda=-1$ οπότε αν τις σχεδιάσουμε το αποτέλεσμα παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα και άρα το

$$\text{ζητούμενο εμβαδόν θα είναι : } E = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{3 \cdot 3}{2} = 8$$

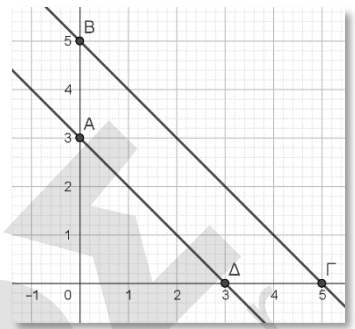
Η ευθεία $(\epsilon): (m+1)x + (m-1)y = 4$ είναι παράλληλη του άξονα x' άρα πρέπει $m=-1$ οπότε έχει εξίσωση $y=-2$. Το σημείο της που θα απέχει από το $O(0,0)$

απόσταση ίση με $2\sqrt{2}$ θα είναι το $A(\alpha,-2)$ με

$$\sqrt{(0-\alpha)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow \alpha = \pm 2, \text{ άρα είναι } A(2,-2) \text{ ή το } B(-2,-2)$$

Το σημείο $A(\alpha,3)$ ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=x-1$, άρα $3=\alpha-1$ οπότε $\alpha=4$

Το σημείο τομής των ευθειών $y=x-1$ και $y=-2x+1$ είναι $x-1=-2x+1$ από όπου έχουμε $x=2/3$ και $y=-1/3$



ΘΕΜΑ 2^ο

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-2x+x^2} - \sqrt{x^2+4x+4} = |x-1| - |x+2|$ χωρίς
 3 , $x \leq -2$

απόλυτα γράφεται $f(x) = \begin{cases} -2x-1 & , -2 < x < 1 \\ -3 & , x \geq 1 \end{cases}$ και η γραφική της

παράσταση είναι :

Αν $k > 3$ ή $k < -3$ η εξίσωση $f(x)=k$ είναι αδύνατη

Αν $-3 < k < 3$ η εξίσωση $f(x)=k$ έχει μία λύση

Αν $k=3$ ή $k=-3$ η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

