Κεφάλαιο 10ο

Ενότητα 2η

1. Είναι $\begin{matrix} \alpha_5 = 14 \\ \alpha_{12} = 42 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 7\omega = 28 \\ \alpha_1 + 4\omega = 14 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \omega = 4 \\ \alpha_1 = -2 \end{matrix}$
2. $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow -97 = 80 + (\nu-1)(-3) \Leftrightarrow 3(\nu-1) = 177 \Leftrightarrow \nu - 1 = 59 \Leftrightarrow \nu = 60$
3. $2(3x-2) = 5x + 1 + 11 \Leftrightarrow x = 16$
4. $\Sigma_\nu = \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu \Leftrightarrow 180 = \dfrac{10+5(\nu-1)}{2}\nu \Leftrightarrow 10\nu + 5\nu^2 - 5\nu = 360 \Leftrightarrow$

   $5\nu^2 + 5\nu - 360 = 0 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 72 = 0 \Leftrightarrow \nu = 8$ ή $\nu = -9$ απορ.
5. $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 12 - 4(\nu+1) - 12 + 4\nu = -4$, άρα ω=-4 και α_1=28
6. $\Sigma_{200} = \dfrac{2\cdot 1 + (200-1)2}{2}200 = 40000$

   Ο πρώτος περιττός είναι ο 17 και ο τελευταίος 379 και επειδή υπάρχουν 190-5=185 τέτοιοι αριθμοί το άθροισμα θα είναι ίσο με $\Sigma = \dfrac{17+379}{2}185 = ...$

   Ο 1ος τέτοιος αριθμός θα είναι ο 12 και ο τελευταίος ο 198 και υπάρχουν 66-3=63 αριθμοί άρα $\Sigma = \dfrac{12+198}{2}63 = ...$
7. Το άθροισμα των φυσικών από το 1 ως το 200 είναι $\Sigma = \dfrac{1+200}{2}200 = 20100$

   Το άθροισμα των πολλαπλασίων του 4 είναι $\Sigma_4 = \dfrac{4+200}{2}50 = 102\cdot 50 = 5100$

   Το άθροισμα των πολλαπλασίων του 9 είναι $\Sigma_9 = \dfrac{9+198}{2}22 = 207\cdot 11 = 2277$

   Το άθροισμα των πολλαπλασίων του 36 είναι $\Sigma' = \dfrac{36+180}{2}50 = 108\cdot 50 = 5400$

   Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι $S = 20100 - 5100 - 2277 + 5400 = ...$
8. $\begin{matrix} \alpha_1 + \alpha_4 = 22 \\ \alpha_4 + \alpha_5 = 30 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2\alpha_1 + 3\omega = 22 \\ 2\alpha_1 + 7\omega = 30 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4\omega = 8 \\ 2\alpha_1 + 3\omega = 22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \omega = 2 \\ \alpha_1 = 8 \end{matrix}$
9. $\alpha_{15} = \alpha_1 + 14\omega \Leftrightarrow 38 = \alpha_1 + 3\cdot 14 \Leftrightarrow \alpha_1 = -4$ οπότε $\Sigma_{15} = \dfrac{2(-4) + 14\cdot 3}{2}14 = ...$
10. Έστω οι αριθμοί α-2ω , α-ω , α , α+ω , α+2ω με άθροισμα ίσο 15 άρα $5\alpha = 15 \Leftrightarrow \alpha = 3$ και επειδή

    $(\alpha-2\omega)(\alpha-\omega)\alpha(\alpha+\omega)(\alpha-2\omega) = 120 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-\omega^2)(\alpha^2-4\omega^2) = 120 \Leftrightarrow$

    $3(9-\omega^2)(9-4\omega^2) = 120 \Leftrightarrow 81 - 36\omega^2 - 9\omega^2 + 4\omega^4 = 40 \Leftrightarrow 4\omega^4 - 45\omega^2 + 41 = 0 \Leftrightarrow$

    $\omega^2 = 1$ ή $\omega^2 = \dfrac{41}{4} \Leftrightarrow \omega = \pm 1$ ή $\omega = \pm\dfrac{\sqrt{41}}{2}$

11. Υπάρχουν 13 όροι αριθμητικής προόδου με 1ο όρο το 9 και 13ο το 34 άρα έχουμε
$\alpha_{13}=\alpha_1+12\omega \Leftrightarrow 34=9+12\omega \Leftrightarrow 12\omega=25 \Leftrightarrow \omega=\frac{25}{12}$, άρα οι αριθμοί θα είναι ...

12. $\begin{cases}\alpha_{12}=25\\ \Sigma_{12}=\frac{\alpha_1+\alpha_{12}}{2}12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_{12}=25\\ 168=(\alpha_1+25)6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+11\omega=25\\ \alpha_1=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=2\\ \alpha_1=3\end{cases}$

13. $\begin{cases}\Sigma_{12}=222\\ \Sigma_{20}=610\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2\alpha_1+11\omega}{2}12=222\\ \frac{2\alpha_1+19\omega}{2}20=610\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12\alpha_1+66\omega=222\\ 20\alpha_1+190\omega=610\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha_1+11\omega=37\\ 2\alpha_1+19\omega=61\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}8\omega=24\\ 2\alpha_1+11\omega=37\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=3\\ \alpha_1=2\end{cases}$

14. $\alpha_5=-6 \Leftrightarrow 2+4\omega=-6 \Leftrightarrow \omega=-2$, άρα
$\Sigma_\nu=\frac{2\alpha_1+(\nu-1)\omega}{2}\nu \Leftrightarrow -108=\frac{4+(\nu-1)\cdot(-2)}{2}\nu \Leftrightarrow -108=-\nu^2+3\nu \Leftrightarrow \nu^2-3\nu-108=0$ από όπου έχουμε ν=12 δεκτή ή ν=-9 απορρίπτεται.

15. Έχουμε μία αριθμητική πρόοδο με 1ο όρο 1 και διαφορά ω=6 και ζητάμε να βρούμε μέχρι ποιων όρο πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα ίσο με 280, άρα θα έχουμε :
$\frac{2\alpha_1+(\nu-1)\omega}{2}\nu=280 \Leftrightarrow \frac{2+6\nu-6}{2}\nu=280 \Leftrightarrow 3\nu^2-2\nu-280=0 \overset{\nu\in N}{\Leftrightarrow} \nu=10$, άρα
$x=\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega=1+9\cdot 6=55$

16. $\begin{cases}\alpha_{12}=3\alpha_6\\ \Sigma_8=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+11\omega=3(\alpha_1+5\omega)\\ \frac{2\alpha_1+7\omega}{2}8=24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha_1+4\omega=0\\ 2\alpha_1+7\omega=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=3\\ \alpha_1=-6\end{cases}$

17. $\Sigma_5=\frac{1}{4}(\Sigma_{10}-\Sigma_5) \Leftrightarrow 5\Sigma_5=\Sigma_{10} \Leftrightarrow 5\frac{2\alpha_1+4\omega}{2}5=\frac{2\alpha_1+9\omega}{2}10 \Leftrightarrow 10+20\omega=4+18\omega \Leftrightarrow \omega=-3$

18. $\begin{cases}|\alpha_2-\alpha_8|=24\\ \alpha_4+\alpha_{12}=70\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\alpha_1+\omega-\alpha_1-7\omega|=24\\ \alpha_1+3\omega+\alpha_1+11\omega=70\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\omega|=4\\ \alpha_1+7\omega=35\end{cases}$, οπότε $(\omega,\alpha_1)=(4,7)$ ή $(\omega,\alpha_1)=(-4,63)$

19. Έχουμε μία αριθμητική πρόοδο με 1ο όρο 120 και διαφορά 100,

άρα $\alpha_{10}=\alpha_1+9\omega=120+900=1020$
$\alpha_{12}=\alpha_1+11\omega=120+1100=1220$, οπότε θα πωλείται $82\cdot 1220=...$
$E=200\cdot\Sigma_{12}=200\frac{2\alpha_1+11\omega}{2}12=1200(240+1100)=...$

20. Ισχύει ότι 620<T<640
    Οι δόσεις αποτελούν αριθμητική πρόοδο με 4ο όρο 48 οπότε
    $\alpha_4 = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 48 \Leftrightarrow \alpha_1 = 48 - 3\omega$
    Η τιμή αγοράς θα είναι $120 + \Sigma_{10} = 120 + \frac{2\alpha_1 + 9\omega}{2}10 = 120 + \frac{96 - 6\omega + 9\omega}{2}10 = 15\omega + 600$
    Ισχύει $620 < 15\omega + 600 < 640 \Leftrightarrow 20 < 15\omega < 40 \Leftrightarrow \frac{20}{15} < \omega < \frac{40}{15} \overset{\omega \in N}{\Leftrightarrow} \omega = 2$
    Άρα $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 48 + 6\omega = 48 + 12 = 60$ και T=630 ευρώ

Ενότητα 3η

1. $\begin{aligned}\alpha_3 &= 12\\ \alpha_6 &= 96\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha_1\lambda^2 &= 12\\ \alpha_1\lambda^5 &= 96\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\lambda^3 &= 8\\ \alpha_1\lambda^2 &= 12\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\lambda &= 2\\ \alpha_1 &= 3\end{aligned}$
2. $\alpha_\nu = 768 \Leftrightarrow \alpha_1\lambda^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{\nu-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 256 \Leftrightarrow \nu - 1 = 8 \Leftrightarrow \nu = 9$
3. $(x+1)^2 = (x-4)(x-19) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 23x + 76 \Leftrightarrow 25x = 75 \Leftrightarrow x = 3$
4. $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1} \Leftrightarrow 8192 = 24^{\nu-1} \Leftrightarrow 4^{\nu-1} = 4096 \Leftrightarrow \nu - 1 = 6 \Leftrightarrow \nu = 7$
5. $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \frac{\frac{2^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}}{\frac{2^\nu}{3^{\nu+1}}} = \frac{2}{3}$ σταθερός αριθμός ο οποίος θα είναι ο λόγος της προόδου.
6. $\begin{aligned}\alpha_4 &= 24\\ \Sigma_3 &= 21\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha_1\lambda^3 &= 24\\ \alpha_1\frac{\lambda^3 - 1}{\lambda - 1} &= 21\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha_1\lambda^3 &= 24\\ \alpha_1(\lambda^2 + \lambda + 1) &= 21\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} &= \frac{24}{21}\\ \alpha_1\lambda^3 &= 24\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}7\lambda^3 - 8\lambda^2 - 8\lambda - 8 &= 0\\ \alpha_1\lambda^3 &= 24\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\lambda &= 2\\ \alpha_1 &= 3\end{aligned}$
7. $\begin{aligned}\alpha_6 + \alpha_2 &= 34\\ \alpha_3 + \alpha_7 &= 68\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha_1\lambda^5 + \alpha_1\lambda &= 34\\ \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^6 &= 68\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\alpha_1\lambda(\lambda^4 + 1) &= 34\\ \alpha_1\lambda^2(\lambda^4 + 1) &= 68\end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned}\lambda &= 2\\ \alpha_1 &= 1\end{aligned}$
8. Ας συμβολίσουμε τον αρχικό πληθυσμό $\alpha_o = 10$, μετά ο αριθμός των βακτηριδίων αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με 1ο όρο 30 και λόγο 3, οπότε $\alpha_6 = \alpha_1\lambda^5 = 30 \cdot 3^5 = 10 \cdot 3^6$
   Ονομάζουμε τον αριθμό των βακτηριδίων της 6ης ώρα ως $\beta_o = 10 \cdot 3^6$, μετά το πλήθος των βακτηριδίων αποτελεί αριθμητική πρόοδο με $\beta_1 = 10 \cdot 3^6 - 10 \cdot 3^3 = 10 \cdot 3^3(3^3 - 1) = 260 \cdot 3^3$ και $\omega = -10 \cdot 3^3$ οπότε
   $\beta_{20} = \beta_1 + 19\omega = 260 \cdot 3^3 - 190 \cdot 3^3 = 70 \cdot 3^3$. Αναζητούμε τον βν ώστε
   $\beta_\nu = 0 \Leftrightarrow \beta_1 + (\nu - 1)\omega = 0 \Leftrightarrow 260 \cdot 3^3 - (\nu - 1)10 \cdot 3^3 = 0 \Leftrightarrow \nu = 27$

Ενότητα 4η

1. Έχουμε αριθμητική πρόοδο με 1ο όρο 3 και διαφορά 2 άρα $\alpha_{51} = \alpha_1 + 50\omega = 3 + 50 \cdot 2 = 103$

   $\Sigma_\nu = 9999 \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2}\nu = 9999 \Leftrightarrow \dfrac{6 + 2(\nu-1)}{2}\nu = 9999 \Leftrightarrow \nu^2 + 2\nu = 9999 \overset{\nu\in N}{\Leftrightarrow} \nu = 99$

   Έχουμε μία νέα αριθμητική πρόοδο με 1ο όρο 100 και διαφορά 20, άρα

   $\beta_{31} = \beta_1 + 30\omega' = 100 + 30 \cdot 20 = 700$ λεπτά

2. Έχουμε δύο αριθμητικές προόδους για την πρώτη έχουμε ότι ο πρώτος όρος είναι η αξία του 1ου διαμαντιού και η διαφορά είναι 10, ενώ η δεύτερη έχει πρώτο όρο την αξία του 17ου διαμαντιού και η διαφορά είναι -10.

   Άρα $\Sigma_1 = \dfrac{2\alpha_1 + 160}{2}17$ και $\Sigma_2 = \dfrac{2\alpha_{17} - 160}{2}17 = \dfrac{2(\alpha_1 + 160) - 160}{2}17 = \dfrac{2\alpha_1 + 160}{2}17$

   Συγχρόνως ισχύει ότι $17000 = (2\alpha_1 + 160) \cdot 17 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 160 = 1000 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = 840 \Leftrightarrow \alpha_1 = 420$

   $\Sigma_{o\lambda} = \Sigma_1 + \Sigma_2 = (2\alpha_1 + 160) \cdot 17$, άρα

   $17000 = (2\alpha_1 + 160) \cdot 17 \Leftrightarrow 2\alpha_1 + 160 = 1000 \Leftrightarrow 2\alpha_1 = 840 \Leftrightarrow \alpha_1 = 420$

   Με βάση αυτά έχουμε ότι $\alpha_{17} = \alpha_1 + 160 \Leftrightarrow \alpha_{17} = 580$.

3. $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow 250 = 70 + (\nu-1)\omega \Leftrightarrow 180 = (\nu-1)\omega$

   $\alpha_{\nu-1} = \alpha_2 + 140 \Leftrightarrow \alpha_1 + (\nu-2)\omega = \alpha_1 + \omega + 140 \Leftrightarrow (\nu-3)\omega = 140$ από τις δύο σχέσεις που καταλήξαμε έχουμε $\dfrac{\nu-3}{\nu-1} = \dfrac{140}{180} \Leftrightarrow \dfrac{\nu-3}{\nu-1} = \dfrac{7}{9} \Leftrightarrow 9\nu - 27 = 7\nu - 7 \Leftrightarrow 2\nu = 20 \Leftrightarrow \nu = 10$ και

   $180 = (\nu-1)\omega \overset{\nu=10}{\Leftrightarrow} \omega = 20$

   Η συνολική χωρητικότητα του θεάτρου είναι $\Sigma = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_{10}}{2}10 = \dfrac{70 + 250}{2}10 = 1600$

   Στην αρχή έχουμε 100 θεατές και κάθε φορά ο αριθμός διπλασιάζεται, άρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με λόγο 2 οπότε, $\beta_\nu = \beta_1 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 1600 = 100 \cdot 2^{\nu-1} \Leftrightarrow 2^{\nu-1} = 16 \Leftrightarrow \nu - 1 = 4 \Leftrightarrow \nu = 5$

4. Με βάση το κείμενο ο εργάτης

   για τον 1ο σηματοδότη έκανε $10(\nu-1)$ μέτρα ,

   μετά επιστρέφει στον 2ο σηματοδότη τον παίρνει και τον πηγαίνει δίπλα στον τελευταίο κάνοντας μία διαδρομή μήκους $2 \cdot 10 \cdot (\nu-2)$ μέτρα

   μετά επιστρέφει στον 3ο σηματοδότη τον παίρνει και τον πηγαίνει δίπλα στον τελευταίο κάνοντας μία διαδρομή μήκους $2 \cdot 10 \cdot (\nu-3)$ μέτρα

   Την διαδικασία αυτή την συνεχίζει …

   Τελικά για τον προτελευταίο σηματοδότη θα κάνει μία διαδρομή μήκους $2 \cdot 10$ μέτρα.

   Άρα η συνολική διαδρομή θα είναι

   $10(\nu-1) + 20(\nu-2) + 20(\nu-3) + \ldots + 20 = 10(\nu-1) + 20[(\nu-2) + (\nu-3) + \ldots + 1] =$

   $10(\nu-1) + 20\dfrac{\nu-2+1}{2}(\nu-2) = 10(\nu-1) + 10(\nu-1)(\nu-2) = 10(\nu-1)(1 + \nu - 2) = 10(\nu-1)^2$

   Άρα θα είναι $10(\nu-1)^2 = 1440 \Leftrightarrow (\nu-1)^2 = 144 \Leftrightarrow \nu - 1 = 12 \Leftrightarrow \nu = 13$ δηλαδή υπάρχουν συνολικά 13 σηματοδότες.

5. Για τον 1ο πληθυσμό έχουμε ότι είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = \alpha_o - \frac{1}{100}\alpha_0 = \frac{99}{100}\alpha_o$ και $\omega = -\frac{\alpha_o}{100}$, για τον δεύτερο πληθυσμό έχουμε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = \lambda\beta_o$ και λόγο λ

   Θα ισχύει ότι $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = \frac{99}{100}\alpha_o - \frac{9}{100}\alpha_o = \frac{90}{100}\alpha_o$ και $\beta_{10} = \beta_1\lambda^9 = \beta_o\lambda^{10} \overset{\beta_o = \frac{9\alpha_o}{10^{11}}}{=} \frac{9\alpha_o}{10^{11}}\lambda^{10}$

   Άρα $\frac{90\alpha_o}{10^2} = \frac{9\alpha_o\lambda^{10}}{10^{11}} \Leftrightarrow \lambda^{10} = 10^{10} \Leftrightarrow \lambda = 10$

   $\beta_5 = \beta_1\lambda^4 \Leftrightarrow 9\cdot 10^{10} = 10\beta_o 10^4 \Leftrightarrow \beta_o = 9\cdot 10^5$

   Άρα $9\alpha_o = 10^{11}\cdot 9\cdot 10^5 \Leftrightarrow \alpha_o = 10^{16}$ και άρα $\alpha_{99} = \alpha_1 + 98\omega = \frac{99}{100}\alpha_o - 98\frac{\alpha_o}{100} = \frac{\alpha_o}{100} = \frac{10^{16}}{10^2} = 10^{14}$

6. Με την 1η δόση ο ασθενής έχει 10 mg

   Με την 2η δόση ο ασθενής έχει $\frac{3}{4}10 + 10$ mg

   Με την 3η δόση ο ασθενής έχει $(\frac{3}{4})^2 10 + \frac{3}{4}10 + 10$ mg

   Κ.ο.κ

   Άρα στην νιοστή δόση ο ασθενής έχει

   $$(\frac{3}{4})^{\nu-1}10 + (\frac{3}{4})^{\nu-2}10 + \ldots + \frac{3}{4}10 + 10 = 10[(\frac{3}{4})^{\nu-1} + (\frac{3}{4})^{\nu-2} + \ldots + \frac{3}{4} + 1] = 10\cdot 1\cdot \frac{(\frac{3}{4})^{\nu} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 40[1 - (\frac{3}{4})^{\nu}]\text{ mg}$$

   Για $\nu \to +\infty$ έχουμε συγκέντρωση φαρμάκου στο αίμα ίση με 40mg

   Αν όμως αντί της δόσης των 10mg είχαμε δόση δ τότε η συγκέντρωση θα ήταν

   $\delta\cdot 1\cdot \frac{(\frac{3}{4})^{\nu} - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 4\cdot\delta\cdot[1 - (\frac{3}{4})^{\nu}]$ και θα ήταν επικίνδυνη αν

   $4\cdot\delta\cdot[1 - (\frac{3}{4})^{\nu}] = 50 \Leftrightarrow \delta = \frac{50}{4[1 - (\frac{3}{4})^{\nu}]} \overset{\nu\to+\infty}{\to} \frac{50}{4} = 12,5$ mg.

7. $1 + 2 + 3 + \ldots + \nu = 45 \Leftrightarrow \frac{1+\nu}{2}\nu = 45 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 90 = 0 \overset{\nu\in N}{\Leftrightarrow} \nu = 9$

   Οπότε για να σπάσει το ρεκόρ θα χρειαστούν άλλοι 10 ακόμα.

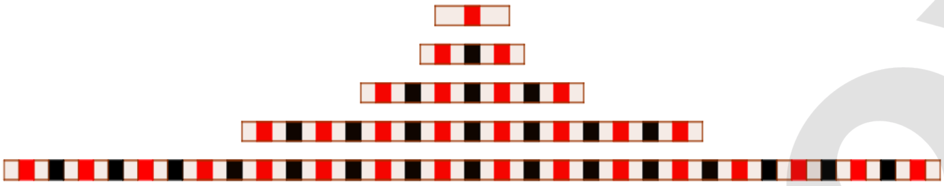
   Το νέο ρεκόρ έγινε με $1 + 2 + \ldots + 9 + 10 + 11 + 12 = \frac{1+12}{2}12 = 78$ μαθητές.

   Αν οι μαθητές δεν ξεπερνούν τους 210 τότε έχουμε

   $1 + 2 + \ldots + \nu \le 210 \Leftrightarrow \frac{1+\nu}{2}\nu \le 210 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 410 \le 0$ από όπου έχουμε ν=19 γιατί για ν=20 δεν επαληθεύεται για 10 μαθητές.

8. Ας δούμε με ένα σχήμα τα στάδια εξέλιξης του φιδιού …

ν=0
ν=1
ν=2
ν=3
ν=4



Κόκκινα	Μαύρα
1	0
2	1
4	3
8	7
16	15

Όταν γεννιέται έχει 1 κόκκινη και 0 μαύρη λωρίδα

Μετά τον 1ο χρόνο έχει 2 κόκκινες και 1 μαύρη λωρίδα

Μετά από τον 2ο χρόνο έχει 4 κόκκινες και 3 μαύρες λωρίδες

Μετά από τον 4ο χρόνο έχει 8 κόκκινες και 7 μαύρες

Μετά από τον 5ο χρόνο έχει 16 κόκκινες και 15 μαύρες , κ.ο.κ.

Παρατηρείστε ότι ο αριθμός των κόκκινων λωρίδων είναι μία ακολουθία δυνάμεων του 2 ενώ ο αντίστοιχος αριθμός των μαύρων είναι μία ακολουθία αριθμών κατά 1 λιγότερο.

Άρα αν συμβολίσουμε με K_ν και M_ν τις δύο ακολουθίες θα είναι …

$K_\nu = 2^\nu$ και $M_\nu = 2^\nu - 1$ για $\nu \in N$

Οπότε ο αριθμός των μαύρων λωρίδων είναι πάντα κατά 1 λιγότερες από τις κόκκινες.

Τον 6ο χρόνο θα υπάρχουν $K_6 = 2^6 = 64$ κόκκινες και $M_6 = 2^6 - 1 = 63$ μαύρες λωρίδες.

Όταν θα έχουν εμφανιστεί 255 λωρίδες θα πρέπει $2^\nu + 2^\nu - 1 = 255 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^\nu = 256 \Leftrightarrow 2^\nu = 128 \Leftrightarrow \nu = 7$

Γενικά $2^\nu + 2^\nu - 1 = 2^\nu + 1 \Leftrightarrow 2^\nu = 2 \Leftrightarrow \nu = 1$

Τον 9ο χρόνο ανάπτυξης του φιδιού ο συνολικός αριθμός των λωρίδων θα είναι :
$\Sigma = K_9 + M_9 = 2^9 + 2^9 - 1 = 1024 - 1 = 1023$ και αν υποθέσουμε ότι η κάθε λωρίδα έχει πλάτος 10cm το μήκος του φιδιού θα είναι $1023 \cdot 10 = 10230\,cm = 10{,}23\ m$

9. Η ακολουθία των κύβων είναι η εξής $1,\ 3^2, 5^2, \ldots$ άρα αν έχει φτιάξει πυραμίδα με 5 πατώματα τότε η βάση της θα έχει $9^2 = 81$ κύβους και θα έχει χρησιμοποιήσει $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 = 1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$ κύβους. Το επόμενο πάτωμα θα θέλει $11^2 = 121$ κύβους οπότε αν έχει 220 κύβους δεν θα μπορέσει να φτιάξει το 6ο βήμα.

10. Ένα δοκάρι τύπου 1 έχει 3 ράβδους
Ένα δοκάρι τύπου 2 έχει $2 \cdot 3 + 1 = 7$ ράβδους
Ένα δοκάρι τύπου 3 έχει $3 \cdot 3 + 2 = 11$ ράβδους
Ένα δοκάρι τύπου 4 έχει $4 \cdot 3 + 3 = 15$ ράβδους
Άρα γενικά ένα δοκάρι τύπου κ θα έχει $\kappa \cdot 3 + (\kappa - 1) = 4\kappa - 1$ ράβδους
Άρα $(4\kappa - 1) - (4(\kappa - 1) - 1) = 4$ ράβδους θα διαφέρουν δύο δοκάρια κ και κ-1 τύπου.

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	**Σ**	**Σ**	**Σ**	**Λ**	**Σ**	**Λ**	**Σ**	**Σ**	**Σ**

11	12	13	14	15	16	17
Σ	**Σ**	**Σ**	**Σ**	**Λ**	**Σ**	**Σ**

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Αριθμητική – Γεωμετρική πρόοδος

ΘΕΜΑ 1ο

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega \Leftrightarrow 31 = 4 + 9\omega \Leftrightarrow \omega = 3$$
$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\cdot\omega \Leftrightarrow 61 = 4 + (\nu-1)\cdot 3 \Leftrightarrow \nu = 20$$
$$\Sigma_{20} = \frac{\alpha_1 + \alpha_{20}}{2}\cdot 20 = \frac{4+61}{2}\cdot 20 = 650$$
$$\alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{50} = \Sigma_{50} - \Sigma_{20} = \frac{2\alpha_1 + 49\omega}{2}\cdot 50 - 650 = \ldots = 3225$$

ΘΕΜΑ 2ο

$$\begin{matrix} a_4 = 32 \\ a_7 = 256 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1\lambda^3 = 32 \\ a_1\lambda^6 = 256 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda^3 = 8 \\ a_1\lambda^3 = 32 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda = 2 \\ a_1 = 4 \end{matrix}$$
$$2a_\nu - S_\nu = 2a_1\lambda^{\nu-1} - a_1\cdot\frac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 8\cdot 2^{\nu-1} - 4\cdot\frac{2^\nu - 1}{2-1} = 2^{\nu+2} - 2^{\nu+2} + 4 = 4$$

$$S_3\cdot(x^4-2) = (4-2a_3)x^2 \Leftrightarrow a_1\frac{\lambda^3-1}{\lambda-1}(x^4-2) = (4-2a_1\lambda^2)x^2 \Leftrightarrow 28(x^4-2) = -28x^2 \Leftrightarrow$$
$$x^4 + x^2 - 2 = 0 \overset{x^2\geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Η πυραμίδα του νιοστού βήματος αποτελείται από $\Sigma = 1+2+3+\ldots+\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ πλακάκια.

Άρα στο 4ο βήμα θα χρειαστούμε 10 πλακάκια που καλύπτουν επιφάνεια 90cm^2
Η πυραμίδα του 30ου βήματος αποτελείται από 465 πλακάκια
Από τα δεδομένα της άσκησης καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\Sigma\cdot 0,05 = 8,55 \Leftrightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 171 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 342 = 0 \overset{\nu\in N}{\Leftrightarrow} \nu = 18$$

Η πυραμίδα έχει βάση 60cm άρα η βάση αποτελείται από 10 πλακάκια άρα αποτελείται από (ν=10) 55 πλακάκια.
Χρωματίζουμε τα πλακάκια περιττού πλήθους βημάτων άρα χρωματιστά πλακάκια θα είναι 1+3+5+7+9=25 πλακάκια.