Κεφάλαιο 2ο

Ενότητα 1η

1. Το λάθος είναι ότι διαιρούμε με το 5-α που είναι αρνητικός αριθμός χωρίς όμως να έχουμε αλλάξει φορά της ανίσωσης.
2. Για να συγκρίνουμε αριθμούς $\sqrt{\frac{3}{5}}$ και $\sqrt{\frac{2}{3}}$ αρκεί να συγκρίνουμε τα τετράγωνά τους δηλαδή τους αριθμούς $\frac{3}{5}$ και $\frac{2}{3}$. Τους μετατρέπουμε σε ισοδύναμα ομώνυμα κλάσματα και έχουμε $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}>\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$
3. Τους αριθμούς τους γράφουμε $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{200}{400}$ και $\frac{3}{4}=\frac{300}{400}$ οπότε τώρα μπορούμε εύκολα να βρούμε δέκα αριθμούς μεταξύ τους.
4. $4\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\alpha+6\beta+10=0 \Leftrightarrow 4\alpha^2-4\alpha+1+\beta^2+6\beta+9+\gamma^2=0 \Leftrightarrow$
$(2\alpha-1)^2+(\beta+3)^2+\gamma^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\frac{1}{2}\ ,\ \beta=-3\ ,\ \gamma=0$

Ενότητα 2η

1. $(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta\geq-8\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+4\alpha\beta+8\beta^2\geq0 \Leftrightarrow \alpha^2+6\alpha\beta+9\beta^2\geq0 \Leftrightarrow$
$(\alpha+3\beta)^2\geq0$ που ισχύει . Η ισότητα ισχύει όταν α+3β=0

2. $\alpha^3+1\geq\alpha^2+\alpha \Leftrightarrow \alpha^3+1-\alpha^2-\alpha\geq0 \Leftrightarrow \alpha^2(\alpha-1)-(\alpha-1)\geq0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2-1)\geq0 \Leftrightarrow$
$(\alpha-1)^2(\alpha+1)\geq0$ που ισχύει ως γινόμενο θετικών αφού α>-1. Η ισότητα ισχύει όταν α=1.

3. Έχουμε ότι α+β=2 (1) οπότε $\alpha\cdot\beta\leq1 \overset{\alpha=2-\beta}{\Leftrightarrow} (2-\beta)\cdot\beta\leq1 \Leftrightarrow 0\leq\beta^2+1-2\beta \Leftrightarrow 0\leq(\beta-1)^2$ που ισχύει.
Η ισότητα ισχύει όταν β=1 , άρα και α=1
Αν θεωρήσουμε ότι οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι α,β τότε το γεγονός ότι η περίμετρος είναι 4 μας οδηγεί στην ισότητα α+β. Αποδείξαμε όμως ότι $\alpha\beta\leq1 \Leftrightarrow E\leq1$ δηλαδή ότι το εμβαδών τέτοιων ορθογωνίων είναι πάντα μικρότερο ή ίσο με 1 με το ίσο να ισχύει όταν α=β=1 δηλαδή όταν τον ορθογώνιο είναι τετράγωνο.
4. $4\alpha\beta\leq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq0$ που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν α=β. Αξίζει να ανοίξετε την εφαρμογή GeoGebra για να δείτε Γεωμετρικά την ανισότητα.
5. $\alpha\cdot\beta\leq10^6 \overset{\alpha=2000-\beta}{\Leftrightarrow} (2000-\beta)\cdot\beta\leq10^6 \Leftrightarrow 10^6+\beta^2-2\cdot\beta\cdot10^3\geq0 \Leftrightarrow (10^3-\beta)^2\geq0$ που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν β=α=1000
6. Ισχύει ότι $26^{400}<27^{400}=(3^3)^{400}=3^{1200}=(3^4)^{300}=81^{300}<82^{300}$
7. $\alpha+\frac{1}{\alpha}\geq2 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+1\geq2\alpha \Leftrightarrow (\alpha-1)^2\geq0$ που ισχύει με την ισότητα να ισχύει για α=1
$\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq-2 \overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+1\geq-2\alpha \Leftrightarrow (\alpha+1)^2\geq0$ που ισχύει με την ισότητα να ισχύει για α=-1
8. $\alpha^2\pm\alpha\beta+\beta^2\geq0 \Leftrightarrow 2\alpha^2\pm2\alpha\beta+2\beta^2\geq0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+(\alpha\pm\beta)^2\geq0$ που ισχύει . Η ισότητα ισχύει όταν α=β=0

9. $2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \ge 2\alpha(\beta+\gamma) \Leftrightarrow 2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2 \ge 0$
Που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν α=β=γ.

10. $\alpha^2-\beta^2 > (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)^2 > 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\alpha+\beta) > 0 \Leftrightarrow 2\beta(\alpha-\beta) > 0$
Που ισχύει διότι α>β>ο

11. $\alpha^2+\beta^2 \ge \frac{1}{2} \overset{\alpha=1-\beta}{\Leftrightarrow} 2(1-\beta)^2+2\beta^2 \ge 1 \Leftrightarrow 2-4\beta+2\beta^2+2\beta^2-1 \ge 0 \Leftrightarrow 4\beta^2-4\beta+1 \ge 0 \Leftrightarrow$
$(2\beta-1)^2 \ge 0$ που ισχύει. Η ισότητα ισχύει για $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$

12. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \ge 2 \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2 \ge 2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \ge 0$, που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν α=β

13. $\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2\gamma}+\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2\alpha}+\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2\beta} \ge \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta} \ge 3 \Leftrightarrow$

$\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}-1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}-1+\frac{\gamma}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}-1 \ge 3 \Leftrightarrow (\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha})+(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta})+(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}) \ge 6$
Που ισχύει αν εφαρμόσουμε την άσκηση 7 τρεις φορές .

14. $A=2x+y$ αν $1 \le x \le 2 \le y \le 5$ έχουμε διαδοχικά …
$\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2 \le 2x \le 4 \\ 2 \le y \le 5 \end{matrix} \Rightarrow 4 \le 2x+y \le 9 \Leftrightarrow 4 \le A \le 9$
$B=3x-2y$ αν $1 \le x \le 2 \le y \le 5$ έχουμε διαδοχικά …
$\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3 \le 3x \le 6 \\ -4 \ge -2y \ge -10 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3 \le 3x \le 6 \\ -10 \le -2y \le -4 \end{matrix} \Rightarrow -7 \le 3x-2y \le 2 \Leftrightarrow -7 \le B \le 2$
$G=\frac{2x}{y}$ αν $1 \le x \le 2 \le y \le 5$ έχουμε διαδοχικά …
$\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2 \le 2x \le 4 \\ \frac{1}{2} \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{5} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2 \le 2x \le 4 \\ \frac{1}{5} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \frac{2}{5} \le \frac{2x}{y} \le 2 \Leftrightarrow \frac{2}{5} \le G \le 2$
$D=2x^2+y^2$ αν $1 \le x \le 2 \le y \le 5$ έχουμε διαδοχικά …
$\begin{matrix} 1 \le x \le 2 \\ 2 \le y \le 5 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 1 \le x^2 \le 4 \\ 4 \le y^2 \le 25 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2 \le 2x^2 \le 8 \\ 4 \le y^2 \le 25 \end{matrix} \Rightarrow 6 \le 2x^2+y^2 \le 33 \Leftrightarrow 6 \le D \le 33$

15. $\alpha \cdot \beta \le 4 \overset{\alpha=4-\beta}{\Leftrightarrow} (4-\beta)\cdot\beta \le 4 \Leftrightarrow \beta^2+4-4\beta \ge 0 \Leftrightarrow (\beta-2)^2 \ge 0$ που ισχύει , με την ισότητα να ισχύει για α=β=2
$\alpha^2+\beta^2 \ge 8 \overset{\alpha=4-\beta}{\Leftrightarrow} (4-\beta)^2+\beta^2 \ge 8 \Leftrightarrow 16+\beta^2-8\beta+\beta^2-8 \ge 0 \Leftrightarrow 2\beta^2-8\beta+8 \ge 0 \Leftrightarrow$
$\beta^2-4\beta+4 \ge 0 \Leftrightarrow (\beta-2)^2 \ge 0$ που ισχύει με την ισότητα να ισχύει όταν α=β=2.

Επαναληπτικές ασκήσεις

1. $2\alpha^4+1\geq 2\alpha^3+\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^4+1-2\alpha^3-\alpha^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^3(\alpha-1)-(\alpha-1)(\alpha+1)\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-1)(2\alpha^3-\alpha-1)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^3-1+\alpha^3-\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-1)[(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)+\alpha(\alpha-1)(\alpha+1)]\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-1)^2[\alpha^2+\alpha+1+\alpha^2+\alpha]\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-1)^2[\alpha^2+(\alpha+1)^2]\geq 0$ που ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν α=1.
2. $\alpha^3+2\beta^3\geq 3\alpha\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^3+2\beta^3-\alpha\beta^2-2\alpha\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-\beta^2)-2\beta^2(\alpha-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-\beta)[\alpha(\alpha+\beta)-2\beta^2]\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta-\beta^2-\beta^2)\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-\beta)[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\beta(\alpha-\beta)]\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2(\alpha+2\beta)\geq 0$ που ισχύει διότι α,β>0. Η ισότητα ισχύει όταν α=β.
3. $\alpha^2(1+\beta^2)+\beta^2(1+\gamma^2)+\gamma^2(1+\alpha^2)\geq 6\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow \alpha^2+\alpha^2\beta^2+\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-6\alpha\beta\gamma\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha^2+\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma)+(\beta^2+\alpha^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma)+(\gamma^2+\alpha^2\beta^2-2\alpha\beta\gamma)\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-\beta\gamma)^2+(\beta-\alpha\gamma)^2+(\gamma-\alpha\beta)^2\geq 0$ ισχύει
4. $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) \Leftrightarrow (\alpha\beta)^2+(\beta\gamma)^2+(\gamma\alpha)^2\geq (\alpha\beta)(\beta\gamma)+(\beta\gamma)(\gamma\alpha)+(\alpha\beta)(\alpha\gamma)$
   Ισχύει βασική ανισότητα!
5. $(1+\alpha^{-1})(1+\beta^{-1})\geq 9 \Leftrightarrow (1+\frac{1}{\alpha})(1+\frac{1}{\beta})\geq 9 \overset{\alpha=1-\beta}{\Leftrightarrow} (1+\frac{1}{1-\beta})(1+\frac{1}{\beta})\geq 9 \Leftrightarrow$
   $1+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{1-\beta}+\frac{1}{\beta(1-\beta)}\geq 9 \overset{\alpha\beta>0}{\Leftrightarrow} \beta(1-\beta)+1-\beta+\beta+1\geq 9\beta(1-\beta) \Leftrightarrow$
   $\beta-\beta^2+1-\beta+\beta+1\geq 9\beta-9\beta^2 \Leftrightarrow 8\beta^2-8\beta+2\geq 0 \Leftrightarrow 2(4\beta-1)^2\geq 0$ ισχύει. Η ισότητα ισχύει όταν β=1/4 και α=3/4.
6. $(x+y-z)^2+(x-y+z)^2+(-x+y+z)^2\geq xy+yz+zx \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 3x^2+3y^2+3z^2\geq 3xy+3yz+3xz \Leftrightarrow$
   $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ ισχύει βασική ανισότητα.
7. $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$ που ισχύει.
   Άρα θα ισχύουν $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\geq\frac{\alpha+\beta}{2}$ (1) και $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}\geq\frac{\beta+\gamma}{2}$ (2) και $\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\geq\frac{\gamma+\alpha}{2}$ (3) προσθέτοντας τις (1) και (2) και (3) έχουμε ότι $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\gamma+\alpha}\geq \alpha+\beta+\gamma\ \ /\alpha,\beta,\gamma\in R^+$
8. $(\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+\psi^2)\geq(\alpha\chi+\beta\psi)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha^2\psi^2+\beta^2\chi^2\geq 2\alpha\chi\beta\psi \Leftrightarrow (\alpha\psi-\beta\chi)^2\geq 0$ που ισχύει
   $5(1+\alpha^4)\geq(1+2\alpha^2)^2$ εφαρμόζουμε το 1ο ερώτημα για α=1 , β=2 , χ=1 , ψ=α^2
9. $\alpha^\nu+\beta^\nu\geq\alpha^{\nu-1}\beta+\alpha\beta^{\nu-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha^{\nu-1}(\alpha-\beta)-\beta^{\nu-1}(\alpha-\beta)\geq 0 \Leftrightarrow$
   $(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}-\beta^{\nu-1})\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-3}\beta+\ldots+\alpha\beta^{\nu-3}+\beta^{\nu-2})\geq 0$ που ισχύει
10. Γνωρίζουμε ότι $\alpha<\beta+\gamma \Rightarrow \alpha^2<\alpha\beta+\alpha\gamma$ (1) όμοια θα ισχύουν και
   $\beta^2<\beta\alpha+\beta\gamma$ (2) και $\gamma^2<\gamma\alpha+\gamma\beta$ (3), προσθέτοντας τις (1), (2), και (3) κατά μέλη έχουμε
   $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$

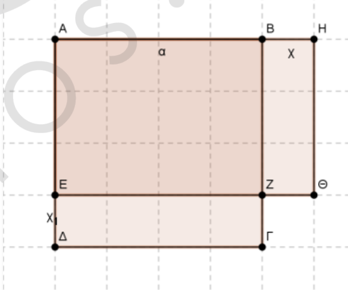
11. $\alpha\beta(\frac{\alpha+\beta}{2}-\gamma)+\beta\gamma(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha)+\gamma\alpha(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-2\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{\beta^2\gamma+\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{\gamma^2\alpha+\gamma\alpha^2-2\alpha\beta\gamma}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\alpha^2\beta+\gamma^2\beta-2\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma-2\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma-2\alpha\beta\gamma)}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta(\alpha-\gamma)^2+\gamma(\beta-\alpha)^2+\alpha(\gamma-\beta)^2}{2}=0 \Leftrightarrow \beta(\alpha-\gamma)^2=0 \ \ \text{και} \ \ \gamma(\beta-\alpha)^2=0 \ \ \text{και} \ \ \alpha(\gamma-\beta)^2=0$$

Και επειδή α,β,γ>0 θα πρέπει α=γ και β=γ και γ=β άρα α=β=γ.



12. Η περίμετρος του ΑΒΓΔ είναι 4α.
Η περίμετρος του ΑΗΘΕ είναι 2[(α+x)+(α-x)]=4α
Ισχύει ότι $\alpha^2>(\alpha-x)(\alpha+x) \Leftrightarrow \alpha^2>\alpha^2-x^2$
Άρα από όλα τα ορθογώνια με περίμετρο 4α το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

13. Θα δείξουμε ότι
$\alpha^3>\alpha^2+\alpha+1 \Leftrightarrow \alpha^3-\alpha^2-\alpha-1>0 \Leftrightarrow \alpha^3-1-\alpha^2-\alpha-1+1>0 \Leftrightarrow$
$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)-(\alpha^2+\alpha+1)+1>0 \Leftrightarrow (\alpha^2+\alpha+1)(\alpha-2)+1>0$ που ισχύει διότι α>2.

14. Ισχύει από βασική ανισότητα $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ καθώς επίσης όμοια και η $\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$, άρα τελικά ισχύει ότι :
$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 \geq \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 \geq \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ

31	32	33	34	35
Λ	Λ	Σ	Σ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Διάταξη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

ΘΕΜΑ 1ο : Σ – Σ – Σ – Σ – Λ

ΘΕΜΑ 2ο : $\chi^2+\psi^2+5\geq 2\chi+4\psi \Leftrightarrow \chi^2-2\chi+1+\psi^2+4-4\psi\geq 0 \Leftrightarrow (\chi-1)^2+(\psi-2)^2\geq 0$, άρα χ=α και ψ=2

ΘΕΜΑ 3ο : 1. $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}<\frac{1}{\alpha+\beta} \Leftrightarrow \alpha+\beta<\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow 0<\gamma$

2. Από το 1ο ερώτημα έχουμε : $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}<\frac{1}{\alpha+\beta}$ (1) όμοια θα είναι και $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}<\frac{1}{\beta+\gamma}$ (2) και $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}<\frac{1}{\gamma+\alpha}$ (3) προσθέτοντας κατά μέλη τις τρεις ισότητες έχουμε τελικά ότι :

$$\frac{3}{\alpha+\beta+\gamma}<\frac{1}{\alpha+\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}+\frac{1}{\gamma+\alpha}$$

ΘΕΜΑ 4ο : $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\leq -2 \overset{\alpha\beta<0}{\Leftrightarrow} \alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2\geq 0$ που ισχύει

ΘΕΜΑ 5ο : $K=2\alpha-3\beta+1$ αν $2<\alpha<3<\beta<4$ έχουμε διαδοχικά …

$$\begin{matrix}2<\alpha<3\\3<\beta<4\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}4<2\alpha<6\\-9>-3\beta>-12\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}4<2\alpha<6\\-12<-3\beta<-9\end{matrix} \Rightarrow -8<2\alpha-3\beta<-3 \Leftrightarrow -7<2\alpha-3\beta+1<-2 \Leftrightarrow -7<K<-2$$

$\Lambda=\alpha\beta-\alpha^2$ αν $2<\alpha<3<\beta<4$ έχουμε διαδοχικά …

$$\begin{matrix}2<\alpha<3\\3<\beta<4\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-2>-\alpha>-3\\3<\beta<4\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}-3<-\alpha<-2\\3<\beta<4\end{matrix} \Rightarrow 0<\beta-\alpha<2$$, Επίσης θα είναι

$$\begin{matrix}0<\beta-\alpha<2\\2<\alpha<3\end{matrix} \Leftrightarrow 0<\alpha(\beta-\alpha)<6 \Leftrightarrow 0<\alpha\beta-\alpha^2<6 \Leftrightarrow 0<\Lambda<6$$

$M=\frac{\alpha}{\beta}-1$ αν $2<\alpha<3<\beta<4$ έχουμε διαδοχικά …

$$\begin{matrix}2<\alpha<3\\3<\beta<4\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2<\alpha<3\\ \frac{1}{3}>\frac{1}{\beta}>\frac{1}{4}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}2<\alpha<3\\ \frac{1}{4}<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{3}\end{matrix} \Rightarrow \frac{2}{4}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{3}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<\frac{\alpha}{\beta}<1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<\frac{\alpha}{\beta}-1<0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<M<0$$