Κεφάλαιο 5ο

Ενότητα 2η

1. Η εξίσωση γράφεται $\lambda^2\cdot(1-x)+9x=\lambda^2-4\lambda+12 \Leftrightarrow (9-\lambda^2)x=12-4\lambda \Leftrightarrow (3-\lambda)(3+\lambda)x=4(3-\lambda)$

Για $\lambda\neq\pm3$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{4}{3+\lambda}$

Για λ=3 η εξίσωση είναι ταυτότητα

Για λ=-3 η εξίσωση είναι αδύνατη

Για να έχει μοναδική λύση την x=1 πρέπει $\lambda\neq\pm3$ και $\dfrac{4}{\lambda+3}=1\Leftrightarrow\lambda=1$

Για να έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{2}{3}$ πρέπει $\lambda\neq\pm3$ και $\dfrac{4}{\lambda+3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\lambda=3$ αδύνατο

Για να έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{2}{3}$ πρέπει $\lambda\neq\pm3$ και $\dfrac{4}{\lambda+3}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\lambda=3$ αδύνατο

Για να έχει λύση την $x=\dfrac{2}{3}$ πρέπει $\lambda=3$ όπου η εξίσωση είναι ταυτότητα – αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό άρα έχει άπειρες λύσεις μία από τις οποίες είναι και η $x=\dfrac{2}{3}$

2. Για να έχει λύση την x=0 αρκεί $3\cdot0\cdot(4\lambda-1)-2\lambda(0+3)=5(\lambda-1)\Leftrightarrow-6\lambda=5\lambda-5\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{5}{11}$

3. Για να έχει άπειρες λύσεις η εξίσωση :
$\kappa(x-\lambda+1)=2x+\lambda-1\Leftrightarrow\kappa x-\kappa\lambda+\kappa=2x+\lambda-1\Leftrightarrow(\kappa-2)x=(\kappa\lambda-\kappa+\lambda-1)$ θα πρέπει να είναι :

$$\begin{matrix}\kappa-2=0\\ \kappa\lambda-\kappa+\lambda-1=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\kappa=2\\ 2\lambda-2+\lambda-1=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\kappa=2\\ \lambda=1\end{matrix}$$

4. $\mu^2(x-1)-9x=4\mu-12-\mu^2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow(\mu^2-9)x=4(\mu-3)\Leftrightarrow(\mu-3)(\mu+3)x=4(\mu-3)$

Αν $\mu\neq\pm3$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{4}{\mu+3}$

Αν μ=3 η εξίσωση είναι ταυτότητα

Αν μ=-3 η εξίσωση είναι αδύνατη.

5. $\lambda x+2(x-\lambda)=(\lambda-1)^2+4 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow (\lambda+2)x=\lambda^2+5$

Άρα αν $\lambda \neq -2$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\lambda^2+5}{\lambda+2}$

Αν λ=-2 η εξίσωση είναι αδύνατη.

Για να έχει λύση την x=0 θα πρέπει $(\lambda+2)\cdot 0=\lambda^2+5 \Leftrightarrow \lambda^2+5=0$ αδύνατο.

Μοναδική λύση την x=2 την έχει αν

$$\begin{matrix}\lambda \neq -2 \\ 2=\dfrac{\lambda^2+5}{\lambda+2}\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda \neq -2 \\ \lambda^2-2\lambda+1=0\end{matrix} \Leftrightarrow \lambda=1$$

6. $x-\dfrac{2}{\lambda^3}=\dfrac{4x+1}{\lambda^2} \Leftrightarrow \lambda^3x-2=\lambda(4x+1) \Leftrightarrow (\lambda^3-4\lambda)x=\lambda+2 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-2)(\lambda+2)x=\lambda+2$

Γνωρίζουμε ότι $\lambda \neq 0$ και έχουμε :

Αν $\lambda \neq \pm 2$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\lambda+2}{\lambda(\lambda-2)(\lambda+2)}=\dfrac{1}{\lambda(\lambda-2)}$

Αν λ=2 η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν λ=-2 η εξίσωση είναι αόριστη – ταυτότητα.

7. $\dfrac{(\lambda-1)x}{3}+\dfrac{\mu}{6}=\dfrac{2(x+1)}{3}+\dfrac{\mu-1}{5} \Leftrightarrow 10(\lambda-1)x+5\mu=20(x+1)+6(\mu-1) \Leftrightarrow$

$10\lambda x-10x+5\mu=20x+20+6\mu-6 \Leftrightarrow 10(\lambda-3)x=(14+\mu)$ οπότε για να είναι ταυτότητα θα πρέπει

λ=3 και μ=-14.

Ενότητα 3η

1. $\sqrt{(2x-1)^2}=\sqrt{(1-x)^2} \Leftrightarrow |2x-1|=|1-x| \Leftrightarrow 2x-1=1-x$ ή $2x-1=x-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$ ή $x=0$

$\sqrt{x^2-14x+49}=3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-7)^2}=3 \Leftrightarrow |x-7|=3 \Leftrightarrow x-7=3$ ή $x-7=-3 \Leftrightarrow x=10$ ή $x=4$

2. $\dfrac{|x-2|+1}{|x|-x}=1 \overset{|x|\neq x \Leftrightarrow x<0}{\Leftrightarrow} |x-2|+1=-2x \Leftrightarrow |x-2|=-2x-1 \underset{-2x-1>0 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}}{\overset{x<0}{\Leftrightarrow}} (x-2)^2=(-2x-1)^2 \overset{x<-\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}$

$x^2-4x+4=4x^2+4x+1 \Leftrightarrow 3x^2+8x-3=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=\dfrac{1}{3}$ απορρίπτεται

3. $|x-\alpha|=2\alpha-1$, αν $2\alpha-1\leq 0 \Leftrightarrow \alpha\leq\dfrac{1}{2}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αν $\alpha>\dfrac{1}{2}$ έχουμε $x-\alpha=2\alpha-1$ ή $x-\alpha=1-2\alpha \Leftrightarrow x=3\alpha-1$ ή $x=1-\alpha$

Θα πρέπει $3\alpha-1>1-\alpha$ ή $3\alpha-1<1-\alpha \Leftrightarrow \alpha>\dfrac{1}{2}$ ή $\alpha<\dfrac{1}{2}$ που απορρίπτεται από τον αρχικό περιορισμό. Για $\alpha>\dfrac{1}{2}$ έχουμε $3\alpha>\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow 3\alpha-1>1$ και $-\alpha<-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\alpha<\dfrac{1}{2}$

Οπότε για $\alpha>\dfrac{1}{2}$ η εξίσωση έχει δύο λύσεις άνισες με την πρώτη $x_1=3\alpha-1>1$ και την δεύτερη $x_2=1-\alpha<\dfrac{1}{2}$ άρα για να είναι και ομόσημες θα πρέπει $1-\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<1$. Άρα πρέπει $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$.

4. $\sqrt{x^2-4x+4}=x-2 \Leftrightarrow |x-2|=x-2 \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$

$\sqrt{x^2-4x+4}+|x^2-4|=0 \Leftrightarrow |x-2|+|x^2-4|=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x-2=0 \\ x^2=4 \end{matrix} \Rightarrow x=2$

$\sqrt{x^2-4x+4}=2x-1 \Leftrightarrow |x-2|=2x-1 \overset{2x-1>0}{\Leftrightarrow} x-2=2x-1$ ή $x-2=1-2x \Leftrightarrow$

$\overset{x>\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} x=-1$ ή $x=1$ άρα x=1

$|x-|x-2||=2 \Leftrightarrow x-|x-2|=2$ ή $x-|x-2|=-2 \Leftrightarrow |x-2|=x-2$ ή $|x-2|=x+2$

Για την 1η εξίσωση έχουμε : $|x-2|=x-2 \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$

Για την 2η εξίσωση έχουμε : $|x-2|=x+2 \overset{\text{Πρέπει } x+2>0}{\Leftrightarrow} x-2 \overset{\text{αδύνατο}}{=} x+2$ ή $x-2=-x-2 \Leftrightarrow x=0$

Άρα $x\in[2,+\infty)\cup\{0\}$

Ενότητα 5η

1. $f(x)=x^3-x^2-4x+4=x^2(x-1)-4(x-1)=(x-1)(x^2-4)$ άρα οι ρίζες της παράσταση είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ ή $x=-2$

2. $x^2-2\kappa\cdot x+\kappa^2-\lambda^2=0 \Leftrightarrow (x-\kappa)^2-\lambda^2=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=\kappa+\lambda$ ή $x=\kappa-\lambda$

$(4-x^2)^2=(2x^2+x-6)^2 \Leftrightarrow 4-x^2=2x^2+x-6$ ή $4-x^2=-2x^2-x+6 \Leftrightarrow$

$3x^2+x-10=0$ ή $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=-\dfrac{5}{3}$ ή $x=-2$ ή $x=1$

$$\frac{x^3-4x^2+3x}{x^3-3x^2}=0 \Leftrightarrow \begin{array}{c} x^2(x-3)\neq 0 \\ x(x^2-4x+3)=0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x\neq 0 \text{ και } x\neq 3 \\ x=0 \text{ ή } x=1 \text{ ή } x=3 \end{array} \Leftrightarrow x=1$$

3. $$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{x^2-3x+2} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x^2-5x+6\neq 0 \text{ και } x^2-3x+2\neq 0 \\ x^2-3x+2=x^2-5x+6 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x\neq 1 \text{ και } x\neq 2 \text{ και } x\neq 3 \\ x=2 \end{array}$$

Η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$(x^2-3x)(x+3)=0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-3$$

$$3x^2-2x-(3x+1)^0=1 \overset{3x+1\neq 0}{\Leftrightarrow} 3x^2-2x-1=0 \overset{x\neq -\frac{1}{3}}{\Leftrightarrow} x=1 \text{ ή } x=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=1$$

$$x^2(x-4)-2x(4-x)+x-4=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=4 \text{ η } x=-1$$

$$x^3=9x \Leftrightarrow x(x^2-9)=0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-3$$

$$x^2+2x=9999 \Leftrightarrow x^2+2x+1=10000 \Leftrightarrow (x+1)^2=100^2 \Leftrightarrow x+1=100 \text{ ή } x+1=-100 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^4-2x^2+1}=0 \Leftrightarrow |x-1|+|x^2-1|=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x=1$$

$$\sqrt{(x-1)^2}-\sqrt{x^4-2x^2+1}=0 \Leftrightarrow |x-1|=|x^2-1| \Leftrightarrow |x-1|(1-|x+1|)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } |x+1|=1 \Leftrightarrow$$

$$x=1 \text{ ή } x=0 \text{ ή } x=-2$$

4. $$(x+2)^2-|x+2|+\frac{1}{4}=0 \overset{y=|x+2|}{\Leftrightarrow} y^2-y+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow (y-\frac{1}{2})^2=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |x+2|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$x=-\frac{3}{2} \text{ ή } x=-\frac{5}{2}$$

$$|x|^3-3x^2+3|x|-1=0 \overset{y=|x|}{\Leftrightarrow} y^3-3y^2+3y-1=0 \Leftrightarrow (y-1)^3=0 \Leftrightarrow y=1 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

$$\frac{|x+1|-|1-x|}{x}=\frac{x}{2} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} 2|x+1|-2|1-x|=x^2$$

Σύμφωνα με το πινακάκι πρέπει να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
1-x	+		+	0	-	
x+1	-	0	+		+	

Αν x<-1 η εξίσωση γίνεται $2(-x-1)-2(1-x)=x^2 \Leftrightarrow x^2=-4$ αδύνατη

Αν $-1\leq x\leq 1$ η εξίσωση γίνεται $2(x+1)-2(1-x)=x^2 \Leftrightarrow x^2=4x \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=4 \overset{-1\leq x\leq 1}{\Leftrightarrow} x=0$

Αν x>1 η εξίσωση γίνεται $2(x+1)-2(x-1)=x^2 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2 \overset{x>1}{\Leftrightarrow} x=2$

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ

11	12	13	14	15
Λ	Σ	Σ	Σ	Λ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Επίλυση εξισώσεων 1ου – 2ου βαθμού

ΘΕΜΑ 1ο

$$\lambda^2 x-5\lambda=\lambda^2+25x \Leftrightarrow (\lambda^2-25)x=\lambda^2+5\lambda \Leftrightarrow (\lambda-5)(\lambda+5)x=\lambda(\lambda+5)$$

Αν $\lambda\neq\pm5$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\lambda}{\lambda-5}$

Αν λ=5 η εξίσωση είναι αδύνατη

Αν λ=-5 η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Για να έχει μοναδική λύση το 0 πρέπει $\begin{matrix}\lambda\neq\pm5\\ \dfrac{\lambda}{\lambda-5}=0\end{matrix} \Leftrightarrow \lambda=0$

Για να έχει τουλάχιστον δύο λύσεις πρέπει να είναι ταυτότητα άρα λ=-5

Για να έχει μοναδική λύση την x=1 θα πρέπει $\begin{matrix}\lambda\neq\pm5\\ \dfrac{\lambda}{\lambda-5}=1\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda\neq\pm5\\ \lambda=\lambda-5\end{matrix}$ αδύνατο

Για να έχει λύση την x=1 θα πρέπει η εξίσωση να είναι ταυτότητα δηλαδή όταν λ=-5 διότι τότε η x=1 είναι μία από τις άπειρες λύσεις της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 2ο

$$x^4(x-4)+2x^2(4-x)+x-4=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^4-2x^2+1)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$x=4$ ή $x=1$ ή $x=-1$

$$x\cdot(x-1)\cdot(x-2)+\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{(x-1)} \overset{x\neq1}{\Leftrightarrow} x(x-1)(x-2)=0 \overset{x\neq1}{\Leftrightarrow} x=0 \text{ ή } x=2$$

$$(x^2-3x)(x+3)=0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=3 \text{ ή } x=-3$$

ΘΕΜΑ 3ο

$$\frac{\alpha x^3}{\beta}+x^2=\frac{\alpha^3 x}{\beta}+\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha x^3+\beta x^2-\alpha^3 x-\alpha^2\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x(x^2-\alpha^2)+\beta(x^2-\alpha^2)=0 \Leftrightarrow (x^2-\alpha^2)(\alpha x+\beta)=0$$

Άρα ή $x=\pm\alpha$ ή $\alpha x=-\beta$ όπου αν $\alpha\neq 0$ έχει μοναδική λύση την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$, αν α=0 επειδή $\beta\neq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Επίλυση εξισώσεων 1ου – 2ου βαθμού

ΘΕΜΑ 1ο

$$\lambda x-\lambda(\lambda-3)=x+2 \Leftrightarrow (\lambda-1)x=\lambda^2-3\lambda+2$$

Αν $\lambda\neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\frac{\lambda^2-3\lambda+2}{\lambda-1}=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{\lambda-1}=\lambda-2$

Αν λ=1 η εξίσωση είναι ταυτότητα

Για να έχει μοναδική λύση την x=1 πρέπει $\begin{matrix}\lambda\neq 1\\ \lambda-2=1\end{matrix} \Leftrightarrow \lambda=3$

Για να έχει λύση την x=1 τότε λ=3 (μοναδική λύση) αλλά και λ=1 όπου η εξίσωση είναι ταυτότητα άρα η λύση x=1 θα είναι μία από τις άπειρες λύσεις.

Για να έχει λύση την x=-1 πρέπει $\begin{matrix}\lambda\neq 1\\ \lambda-2=-1\end{matrix}$ αδύνατο

Για να έχει λύση την x=-1 πρέπει λ=1 όταν η εξίσωση είναι ταυτότητα.

ΘΕΜΑ 2ο

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0 \overset{y=x+\frac{1}{x}}{\Leftrightarrow} 2y^2-7y+5=0 \Leftrightarrow y=1 \text{ ή } y=\frac{5}{2}$$

Άρα $x+\frac{1}{x}=1 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2-x+1=0$ αδύνατη

$$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}$$

$$\frac{3x-1}{x-1}-\frac{2}{x}=\frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \overset{x\neq 0 \text{ και } x\neq 1}{\Leftrightarrow} x(3x-1)-2(x-1)=2x^2+x-1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \overset{x\neq 0 \text{ και } x\neq 1}{\Leftrightarrow} x=3$$

$$(x^2+1)^2-4(x^2+1)+4=0 \Leftrightarrow (x^2+1-2)^2=0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

ΘΕΜΑ 3ο

Από τα δεδομένα της άσκησης, αν θεωρήσουμε χ τον αριθμό των μαθητών της πλευράς του αρχικού τετραγώνου θα καταλήξουμε στην εξίσωση $x^2+39=(x+1)^2-50 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2x=88 \Leftrightarrow x=44$

Άρα οι μαθητές είναι $44^2+39=1975$

Ενότητα 6η

1. Για την εξίσωση : $x^2-4x+2=0$ έχουμε $S=x_1+x_2=4$ και $P=x_1\cdot x_2=2$, άρα
   $A=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P=16-4=12$
   $B=x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3}=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS=64-24=40$
2. Για την εξίσωση : $x^2-2x-6=0$ έχουμε $S=x_1+x_2=2$ και $P=x_1\cdot x_2=-6$, άρα
   $A=x_1^{\ 3}-4x_1^{\ 2}x_2+x_2^{\ 3}+2x_1-4x_1x_2^{\ 2}+2x_2=(x_1^{\ 3}+x_2^{\ 3})-4x_1x_2(x_1+x_2)+2(x_1+x_2)=$
   $=S^3-3PS-4PS+2S=8+36+24+4=72$
3. Για την εξίσωση : $x^2-2x+(\lambda-3)=0$ έχουμε $S=x_1+x_2=2$ και $P=x_1\cdot x_2=\lambda-3$, άρα
   $x_1^{\ 2}+x_2+x_2^{\ 2}+x_1=15-\lambda^2+x_1\cdot x_2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow S^2-2P+S=15-\lambda^2+P \Leftrightarrow$
   $4-2(\lambda-3)+2=15-\lambda^2+\lambda-3 \Leftrightarrow \lambda^2-3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=3$
4. Για το τριώνυμο : $f(x)=4x^2-4(k+1)x+2k+5=0$ έχουμε $S=x_1+x_2=k+1$ και $P=x_1\cdot x_2=\dfrac{2k+5}{4}$,
   οπότε $x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=1 \Leftrightarrow S^2-2P=1 \Leftrightarrow (k+1)^2-2\dfrac{2k+5}{4}=1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2k^2+2k-10=0$ κ.τ.λ.
5. Αν $1, x_1$ οι λύσεις της εξίσωσης $x^2-ax+b=0$ άρα $S=1+x_1=a \Leftrightarrow x_1=a-1$ και $P=x_1=b$
   Αν $1, x_2$ οι λύσεις της εξίσωσης $x^2+ax+c=0$ θα είναι $S=1+x_2=-a \Leftrightarrow x_2=-1-a$ και $P=x_2=c$
   Επίσης επειδή ο 1 είναι λύση των δύο εξισώσεων θα ισχύει $\begin{matrix}1-a+b=0\\1+a+c=0\end{matrix} \Leftrightarrow 2+b+c=0 \Leftrightarrow b+c=-2$
   Οπότε $x_1+x_2=b+c=-2$ και $x_1x_2=(a-1)(-a-1)=1-a^2$, οπότε η εξίσωση που θα έχει ως λύσεις τους αριθμούς x_1, x_2 θα είναι $x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-a^2=0$
6. Έχουμε ότι : $(1+x)(1+y)=12$ και $xy(x+y)=30$, άρα
   $\begin{matrix}xy(x+y)=30\\1+(x+y)+xy=12\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}xy(x+y)=30\\(x+y)+xy=11\end{matrix} \underset{S=(x+y)+(xy)}{\overset{P=(xy)(x+y)}{\Leftrightarrow}} w^2-Sw+P=0 \Leftrightarrow w^2-11w+30=0$
   Από όπου έχουμε ότι $\begin{matrix}w_1=5\\w_2=6\end{matrix} \Rightarrow \{\begin{matrix}xy=5\\x+y=6\end{matrix}$ ή $\begin{matrix}xy=6\\x+y=5\end{matrix}\} \Leftrightarrow \{\begin{matrix}x=1\\y=5\end{matrix}$ ή $\begin{matrix}x=5\\y=1\end{matrix}\}$ ή $\{\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}$ ή $\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\}$

Ενότητα 7η

1. Για να είναι τέλειο τετράγωνο το $f(x)=x^2-(k-6)x+2k+9$ πρέπει Δ=0 άρα
$\Delta=(k-6)^2-4(2k+9)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow k^2-20k=0 \Leftrightarrow k=0$ ή $k=20$
Πράγματι για k=0 έχουμε $f(x)=x^2-6x+9=(x-3)^2$, ενώ για k=20 έχουμε
$f(x)=x^2-14x+49=(x-7)^2$

2. Για να έχει η εξίσωση $(E):(\kappa-2)\cdot x^2-2x+\kappa-\lambda-1=0$ διπλή ρίζα το $\frac{1}{2}$ πρέπει
$$\begin{matrix}\Delta=4-4(\kappa-2)(\kappa-\lambda-1)=0\\(\kappa-2)\cdot 1^2-2\cdot 1+\kappa-\lambda-1=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}1-(\kappa-2)(\kappa-\lambda-1)=0\\2\kappa-\lambda-5=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}1=(\kappa-2)(4-\kappa)\\\lambda=2\kappa-5\end{matrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{matrix}\kappa^2-6\kappa+9=0\\\lambda=2\kappa-5\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\kappa=3\\\lambda=1\end{matrix}$$

3. Για την εξίσωση $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\beta=0$ με α,β πραγματικοί αριθμοί έχουμε διαδοχικά…
Αν α=0 η εξίσωση είναι 1ου βαθμού και γράφεται $\beta\chi+\beta=0$, αν $\beta=0$ είναι αόριστη, ενώ αν $\beta\neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-1$.
Αν $\alpha\neq 0$ η εξίσωση είναι 2ου βαθμού οπότε $\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$. Άρα αν $\alpha\neq\beta\neq 0$ η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις , ενώ αν $\alpha=\beta\neq 0$ η εξίσωση γράφεται
$\alpha x^2+2\alpha x+\alpha=0 \overset{\alpha\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, άρα έχει διπλή λύση την χ=-1.

4. Οι εξισώσεις $x^2-(2\lambda-1)\cdot x-3=0$ (1) και $x^2-(\lambda-2)\cdot x+3\lambda=0$ (2) έχουν κοινή λύση άρα
Αν x_o η κοινή λύση θα ισχύουν :
$$\begin{matrix}{x_o}^2-(2\lambda-1)x_o-3=0\\{x_o}^2-(\lambda-2)x_o+3\lambda=0\end{matrix} \overset{(-)^2}{\Rightarrow} -(2\lambda-1)x_o-3+(\lambda-2)x_o-3\lambda=0 \Leftrightarrow -(\lambda+1)x_o=3(\lambda+1) \Leftrightarrow$$
$\overset{\lambda\neq -1}{\Leftrightarrow} x_o=-3$, οπότε $9-(2\lambda-1)(-3)-3=0 \Leftrightarrow 2\lambda-1=2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{3}{2}$

5. Για την εξίσωση $x^2-4x+|\lambda-1|=0$ (1) , $\lambda\neq 1$ έχουμε $\Delta=16-4|\lambda-1|$, οπότε για να έχει δύο άνισες λύσεις θα πρέπει $16-4|\lambda-1|>0 \Leftrightarrow |\lambda-1|<4 \Leftrightarrow -4<\lambda-1<4 \Leftrightarrow -3<\lambda<5$ με $\lambda\neq 1$
Η εξίσωση $x_1\cdot y^2-|x_1-x_2|\cdot y+x_2=0$ (2) για να έχει δύο λύσεις άνισες θα πρέπει
$\Delta'=|x_1-x_2|^2-4x_1x_2=S^2-4P=16-4|\lambda-1|>0$ άρα θα πρέπει $\lambda\in(-3,1)\cup(1,5)$
Τότε επειδή $\begin{matrix}x_1+x_2=4>0\\x_1x_2=|\lambda-1|>0\end{matrix}$ οι x_1 και x_2 είναι θετικοί αριθμοί και για τις λύσεις της2ης εξίσωσης θα ισχύουν $\begin{matrix}y_1+y_2=\dfrac{|x_1-x_2|}{x_1}>0\\y_1y_2=\dfrac{x_2}{x_1}>0\end{matrix}$ άρα θα είναι θετικοί αριθμοί.

Ασκήσεις επανάληψης

1. Από τα δεδομένα της άσκησης ισχύει ότι :

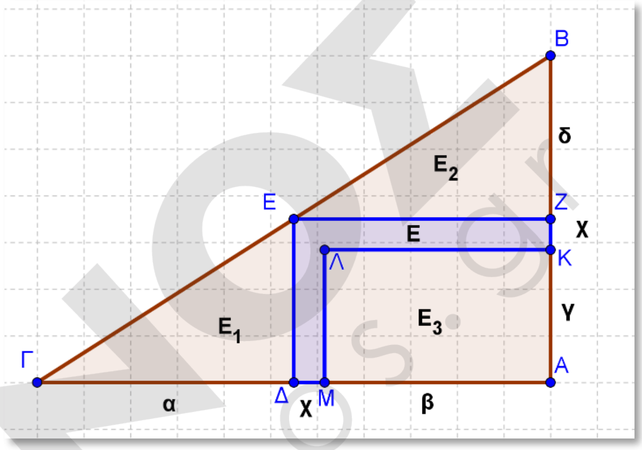
$$E_1 = E_2 = \frac{E + E_3}{2} = \frac{(EZA\Delta)}{2} \quad (1)$$

Οπότε θα έχουμε :

$$\frac{\alpha\cdot(\gamma+x)}{2} = \frac{(\beta+x)\cdot(\gamma+x)}{2}, \text{ άρα}$$

α=β+x οπότε το Δ είναι μέσο της ΑΓ όμοια θα έχουμε και ότι Ζ μέσο ΑΒ.

Επειδή $E = E_3 = \frac{(EZA\Delta)}{2}$ καταλήγουμε στην εξίσωση :



$$55x + 48x - x^2 = \frac{55\cdot 48}{2} \Leftrightarrow x^2 - 103x + 1320 = 0$$

, από όπου έχουμε ότι x=15 ή x=88 , δεκτή προφανώς η λύση x=15.

2. $$\frac{\frac{1}{x}+1}{x+1} = 0 \overset{x\neq -1 \text{ και } x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x}+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$(x+1)^3 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+1)[(x+1)^2 + x - 1] = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+1)(x^2+3x) = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = -3$$

3. Αν ονομάσουμε x το πόσο μέσα θα μπει το οικόπεδο, από τα δεδομένα της άσκησης καταλήγουμε στην εξίσωση $40x + 50x - x^2 = \frac{1}{5}\cdot 40\cdot 50 \Leftrightarrow x^2 - 90x + 400 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x = 45 \pm 5\sqrt{65}$ δεκτή λόγω των περιορισμών του προβλήματος είναι η τιμή $x = 45 - 5\sqrt{65} \approx 4{,}69\text{m}$

4. $$\frac{-2}{2-x} - \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{x^2-4} = 1 \overset{x\neq\pm 2}{\Leftrightarrow} \frac{2}{x-2} - \frac{x}{x+2} - \frac{4x}{(x-2)(x+2)} = 1 \Leftrightarrow 2(x+2) - x(x-2) - 4x = x^2 - 4 \Leftrightarrow$$

$2x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$(x^2-4)^2 = (2x^2+x-6)^2 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+2)^2 - (x+2)^2(2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2)^2[(x-2)^2 - (2x-3)^2] = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(3x-5)(-x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = \frac{5}{3} \text{ ή } x = 1$$

5. $$\lambda^2(x-1) - 5\lambda = 4(4x+1) \Leftrightarrow (\lambda^2-16)x = \lambda^2 + 5\lambda + 4 \Leftrightarrow (\lambda-4)(\lambda+4)x = (\lambda+1)(\lambda+4)$$

Αν $\lambda \neq \pm 4$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\lambda+1}{\lambda-4}$

Αν λ=4 η εξίσωση είναι αδύνατη
Αν λ=-4 η εξίσωση είναι αόριστη.

$$\mu^2 x + 3 = \mu(x+1) + \lambda \Leftrightarrow \mu(\mu-1)x = \lambda + \mu - 3$$

Αν $\mu \neq 0,1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{\lambda+\mu-3}{\mu(\mu-1)}$

Αν μ=0 η εξίσωση γράφεται $0x = \lambda - 3$, οπότε αν λ=3 είναι αόριστη ενώ αν $\lambda \neq 3$ είναι αδύνατη

Αν μ=1 η εξίσωση γράφεται $0x = \lambda - 2$, οπότε αν λ=2 είναι αόριστη ενώ αν $\lambda \neq 2$ είναι αδύνατη.

$\lambda^2(3x-1)+\lambda(6x-1)=-2 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda+2)x=\lambda^2+\lambda-2 \Leftrightarrow 3\lambda(\lambda+2)x=(\lambda-1)(\lambda+2)$

Αν $\lambda \neq 0,-2$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\lambda-1}{3\lambda}$

Αν λ=0 η εξίσωση είναι αδύνατη, ενώ αν λ=-2 η εξίσωση είναι αόριστη.

6. $\lambda(\lambda x-1)+\mu=x-3 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)x=\lambda-\mu-3$. Αν $\lambda \neq \pm 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση. Αν λ=1 η εξίσωση γράφεται $0x=-\mu-2$, οπότε για να είναι αόριστη η εξίσωση θα πρέπει να είναι και μ=-2
Αν λ=-1 η εξίσωση γράφεται $0x=-\mu-4$, οπότε για να είναι αόριστη η εξίσωση θα πρέπει να είναι και μ=-4.

7. $(\lambda+3)x-2\lambda-3=4(x-\lambda)+\lambda(\lambda-2) \Leftrightarrow (\lambda-1)x=\lambda^2-4\lambda+3 \Leftrightarrow (\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda-3)$
Η εξίσωση για $\lambda \neq 1$ έχει μοναδική λύση την $x=\lambda-3$, οπότε για να είναι λύση η 0 θα πρέπει λ=3.

8. $\lambda(x-3)+2\mu=3x+5 \Leftrightarrow (\lambda-3)x=3\lambda-2\mu+5$ για να είναι ταυτότητα θα πρέπει
$\begin{matrix}\lambda-3=0\\ 3\lambda-2\mu+5=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=3\\ \mu=7\end{matrix}$ τότε η εξίσωση $(\lambda+\mu)x-\mu=10x-\lambda^2 \underset{\mu=7}{\overset{\lambda=3}{\Leftrightarrow}} 10x-7=10x-9$ που προφανώς είναι αδύνατη.

9. $\lambda x-\lambda(\lambda-3)=x+2 \Leftrightarrow (\lambda-1)x=\lambda^2-3\lambda+2 \Leftrightarrow (\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda-2)$
Αν $\lambda \neq 1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\chi=\lambda-2$
Αν λ=1 η εξίσωση είναι ταυτότητα
Για να έχει μοναδική λύση την x=-1 θα πρέπει $\lambda-2=-1 \Leftrightarrow \lambda=1$ άτοπο διότι πρέπει $\lambda \neq 1$
Οπότε λύση την -1 την έχει η εξίσωση όταν είναι ταυτότητα.

10. Η εξίσωση $x^2-(k-3)x+\lambda+6=0$ για να έχει διπλή ρίζα το -5 πρέπει :
$$\begin{matrix}(k-3)^2=4(\lambda+6)\\ 25+5(k-3)+\lambda+6=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}(k-3)^2=4(\lambda+6)\\ 25+5(k-3)+\dfrac{(k-3)^2}{4}=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}(k-3)^2=4(\lambda+6)\\ (k-3)^2+20(k-3)+100=0\end{matrix} \Leftrightarrow$$
$$\begin{matrix}(k-3)^2=4(\lambda+6)\\ [(k-3)+10]^2=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}100=4(\lambda+7)\\ k=-7\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=18\\ k=-7\end{matrix}$$
Η εξίσωση $x^2-(k-3)x+\lambda+6=0$ όταν έχει ρίζα το $2-\sqrt{3}$ θα πρέπει
$$(2-\sqrt{3})^2-(\kappa-3)(2-\sqrt{3})+\lambda+6=0 \Leftrightarrow (7-2\kappa+6+\lambda+6)+(-4+\kappa-3)\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow$$
$(19-2\kappa+\lambda)+(\kappa-7)\sqrt{3}=0$ άρα πρέπει $\begin{matrix}2\kappa-\lambda=19\\ \kappa-7=0\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix}\lambda=-5\\ \kappa=7\end{matrix}$

11. Η εξίσωση $\beta^2x^2+(\gamma^2+\beta^2-\alpha^2)x+\gamma^2=0$ έχει διακρίνουσα ...
$(\gamma^2+\beta^2-\alpha^2)^2-4\beta^2\gamma^2=(\gamma^2+\beta^2-\alpha^2-2\beta\gamma)(\gamma^2+\beta^2-\alpha^2+2\beta\gamma)=[(\beta-\gamma)^2-\alpha^2][(\beta+\gamma)^2-\alpha^2]=$
$(\beta-\gamma-\alpha)(\beta-\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\gamma+\alpha)$, αλλά $\gamma+\alpha>\beta$, $\beta+\alpha>\gamma$, $\beta+\gamma>\alpha$ και α,β,γ>0
Άρα Δ<0 οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

12. Η εξίσωση $3x^2+2(a+b+c)x+(ab+bc+ca)=0$ έχει διακρίνουσα Δ ίση με :
$\Delta=4(a+b+c)^2-12(ab+bc+ca)=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 0$, οπότε για να έχει μία διπλή λύση θα πρέπει Η a=b=c=0.

13. Η εξίσωση $x^2+bx+c=0$ έχει δύο λύσεις όπου η μία είναι διπλάσια της άλλης, άρα ...

Αν $x_1=2x_2$ τότε $x_1+x_2=-b \Leftrightarrow 3x_2=-b \Leftrightarrow x_2=-\frac{b}{3}$ και

$$x_1\cdot x_2=c \Leftrightarrow 2{x_2}^2=c \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\frac{b^2}{9}=c \Leftrightarrow 2b^2=9c$$

Αν έχουμε την εξίσωση $x^2-2x+c=0$ και $x_1={x_2}^2$ τότε $x_1\cdot x_2=c \Leftrightarrow {x_2}^2=c$ και

$x_1+x_2=2 \Leftrightarrow {x_2}^2+x_2=2 \Leftrightarrow x_2=1$ ή $x_2=-2$, οπότε $c=1$ ή $c=4$

Αν η εξίσωση $x^2+bx+c=0$ έχει δύο ρίζες άνισες τότε θα είναι $b^2-4c>0$ τότε $x_1+x_2=-b$ και $x_1\cdot x_2=c$. Οπότε θα ισχύουν ${x_1}^2\cdot {x_2}^2=c^2$ και ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=b^2-2c$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2-(b^2-2c)x+c^2=0$

14. Αν x_1,x_2 οι ρίζες τις εξίσωσης $x^2+(a+c)x+ac-b^2=0$ τότε $x_1+x_2=a+c$ και $x_1\cdot x_2=ac-b^2$

Οπότε η εξίσωση $y^2-(x_1+x_2)y+x_1x_2+b^2=0$ θα γράφεται $y^2-(a+c)y+ac=0$ η οποία είναι εύκολο να δείξουμε παραγοντοποιώντας την ότι έχει λύσεις τους αριθμούς a και c.

15. Για το τριώνυμο $f(x)=-2x^2-4ax+b$ ισχύει $f(x)\le f(-2)-7 \Leftrightarrow -2x^2-4ax+b\le -8+8a+b \Leftrightarrow$

$2x^2+4ax+8a-8\ge 0 \Leftrightarrow x^2+2ax+4a-4\ge 0$ οπότε θα ισχύει ότι

$\Delta=4a^2-16a^2+16\le 0 \Leftrightarrow 16-12a^2\ge 0 \Leftrightarrow 4-3a^2\ge 0 \Leftrightarrow a\in[-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}]$ και $b\in R$.

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ

21	22	23	24	25
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού

ΘΕΜΑ 1ο

Θεωρία …

ΘΕΜΑ 2ο

Το τριώνυμο $f(x)=x^2-(\lambda+2)x+4\lambda-8$ έχει διακρίνουσα $\Delta=(\lambda+2)^2-4(4\lambda-8)=\lambda^2-12\lambda+36=(\lambda-6)^2\geq 0$ άρα η εξίσωση έχει πάντα λύση.

Όταν λ=6 η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x^2-8x+16=0\Leftrightarrow(x-4)^2=0\Leftrightarrow x=4$

Για να έχει δύο λύσεις αντίθετες πρέπει : $\begin{matrix}\Delta>0\\ S=0\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\neq 6\\ \lambda+2=0\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda=-2$

Για να έχει δύο λύσεις αντίστροφες πρέπει : $\begin{matrix}\Delta>0\\ P=1\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\neq 6\\ 4\lambda-8=1\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda=\dfrac{9}{4}$

Για να έχει λύση την x=1 πρέπει $1-(\lambda+2)+4\lambda-8=0\Leftrightarrow 3\lambda=9\Leftrightarrow\lambda=3$

Για να έχει δύο ρίζες με άθροισμα 8 πρέπει $\begin{matrix}\Delta>0\\ S=8\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\neq 6\\ \lambda+2=8\end{matrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda\neq 6\\ \lambda=6\end{matrix}$ αδύνατο

Αν x_1,x_2 οι λύσεις της αρχικής εξίσωσης τότε η εξίσωση που έχει λύσεις τις $-x_1,\ -x_2$ θα είναι

$S'=-x_1-x_2=-(\lambda+2)$ και $P=(-x_1)\cdot(-x_2)=4\lambda-8$ οπότε η ζητούμενη εξίσωση είναι η $x^2+(\lambda+2)x+4\lambda-8=0$

Ενότητα 8η

1. $x^2=8\Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}$, $x^2=-8$ αδύνατη, $x^3=8\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{8}=2$,
   $x^3=-8\Leftrightarrow x=-2$, $x^4=8\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[4]{8}$, $x^4=-8$ αδύνατη
   $x^5=8\Leftrightarrow x=\sqrt[5]{8}$, $x^5=-8\Leftrightarrow x=-\sqrt[5]{8}$
2. $(|2-x|-3)^3=-8\Leftrightarrow|2-x|-3=-2\Leftrightarrow|2-x|=1\Leftrightarrow 2-x=\pm 1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$
3. Η εξίσωση $x^\nu=3-|2-\alpha|$, $\alpha\in R,\nu\in N^*$ έχει μία μόνο λύση αρνητική άρα ν περιττός και
   $3-|2-\alpha|<0\Leftrightarrow|2-\alpha|>3\Leftrightarrow 2-\alpha>3$ ή $2-\alpha<-3\Leftrightarrow\alpha<-1$ ή $\alpha>5$
   Οπότε η εξίσωση $x^{\nu+1}=|\alpha|-1$ έχει ν+1 άρτιος και αν α<-1 η εξίσωση γίνεται
   $x^{\nu+1}=-\alpha-1>0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[\nu+1]{-\alpha-1}$, αν α>5 η εξίσωση γίνεται $x^{\nu+1}=\alpha-1\Leftrightarrow x=\pm\sqrt[\nu+1]{\alpha-1}$