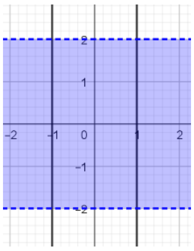
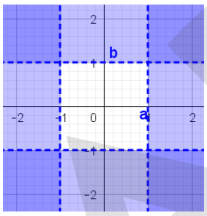
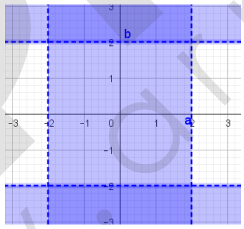
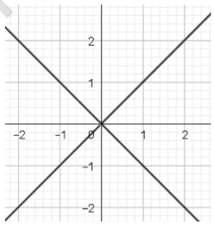
Κεφάλαιο 7ο

Ενότητα 1η

1. Τα σημεία Α(α+β,α+2β) και Β(β-α+2,β-α+1) είναι συμμετρικά ως προς την y=x , άρα θα είναι
$\begin{matrix} \alpha+\beta=\beta-\alpha+1 \\ \alpha+2\beta=\beta-\alpha+2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha=\frac{1}{2} \\ 2\alpha+\beta=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \alpha=\frac{1}{2} \\ \beta=1 \end{matrix}$, άρα βρίσκονται στο 1ο τεταρτημόριο.

2. $|x|=1$ και $|y|<2$, $|x|>1$ και $|y|>1$, $|x|<2$ και $|y|>2$, $|x|=|y|$

3. Για να είναι τα σημεία $A(2,k^2+k+2)$ και $B(2,-2)$ συμμετρικά ως προς τον άξονα x'x πρέπει
$k^2+k+2=2 \Leftrightarrow k(k+1)=0 \Leftrightarrow k=0$ ή $k=-1$

Ενότητα 2η

1. Για την $f(x)=\frac{x^2}{x^3-x}$ πρέπει $x^3-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq \pm 1$

Για την $g(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$ πρέπει $x^2-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

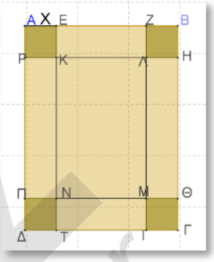
Για την $h(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+2}$ πρέπει $\begin{matrix} 2-x\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\leq 2 \\ x\geq -2 \end{matrix} \Leftrightarrow x\in[-2,2]$

Για την $k(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$ πρέπει $\begin{matrix} x\geq 0 \\ x-1\neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\geq 0 \\ x\neq 1 \end{matrix} \Leftrightarrow x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$

Για την $t(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x}$ πρέπει $\begin{matrix} x^2\geq 0 \\ x\neq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow x\in R-\{0\}$ και ο τύπος της απλοποιείται και γίνεται

$$f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} \frac{x}{x}=1 & ,x>0 \\ \frac{-x}{x}=-1 & ,x<0 \end{cases}$$

2. Οι διαστάσεις του κουτιού είναι x, 20-2x , 30-2x , άρα ο τύπος της συνάρτησης είναι $V(x) = x(30-2x)(20-2x)$, και ενώ δεν έχει αλγεβρικούς περιορισμούς έχουμε περιορισμούς λόγω της φύσης της μεταβλητής, έτσι πρέπει



$$\begin{array}{lll} x>0 & & x>0 \\ 30-2x>0 & \Leftrightarrow & x<15 \Leftrightarrow x\in(0,10) \\ 20-2x>0 & & x<10 \end{array}$$

Ενότητα 3η

1. f(-3)=2 , f(-2)=0 , f(-1)=-1 , f(0)=-1 , f(1)=0 , f(2)=2

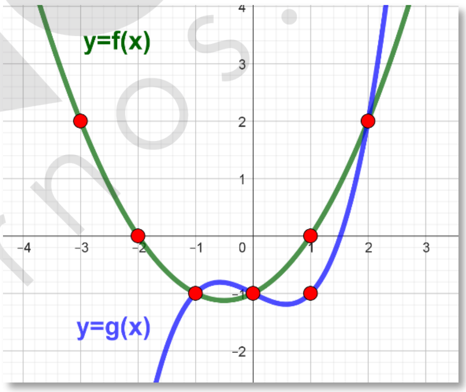
$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=1$

$f(x)=2 \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=2$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=0$ ή $x=2$

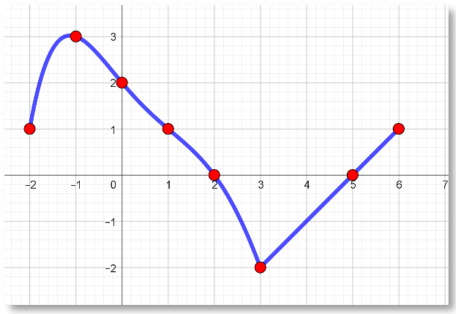
$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

$f(x)>g(x) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)$



2.

x	-2	3	2	-1	0	6
f(x)	1	-2	0	3	2	1



$f(x)=1 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$ ή $x=6$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=5$

$f(x)=3 \Leftrightarrow x=-1$

$f(x)=-2 \Leftrightarrow x=3$

$0\le f(x)\le 1 \Leftrightarrow x\in[1,2]\cup[5,6]\cup\{-2\}$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(2,5)$

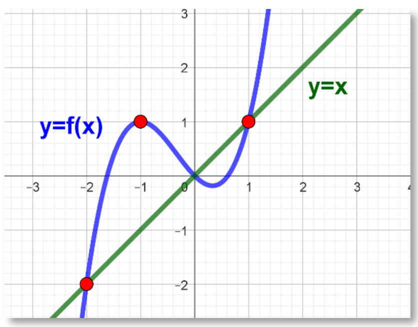
$f(x)>1 \Leftrightarrow x\in(-2,1)$

3. $f(x)=1 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$

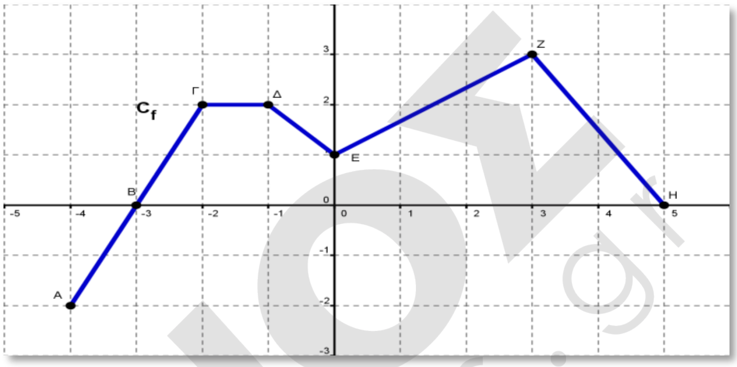
$f(x)=x \Leftrightarrow x=-2$ ή $x=0$ ή $x=1$

$f(x)<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)$

$f(x)\ge x \Leftrightarrow x\in[-2,0]\cup[1,+\infty)$



4. $Df = [-4,5]$, $Rf = [-2,3]$,
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ή $x = 5$
$f(x) = x \Leftrightarrow x = 3$,
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3,5)$, 3 λύσεις ,
$f^2(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x)[f(x)-1] = 0 \Leftrightarrow$
$f(x) = 0$ ή $f(x) = 1$
Άρα 2+3 = 5 λύσεις



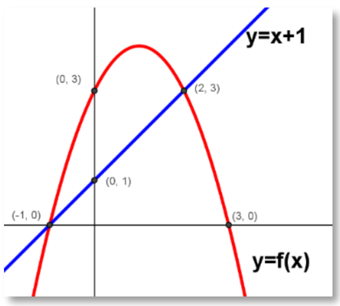
$f^2(x) - f(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow (f(x)+2)(f(x)-3) = 0 \Leftrightarrow$
$f(x) = -2$ ή $f(x) = 3$
Η 1η εξίσωση δίνει λύσεις την x=-4 ενώ η 2η την x=3
$|f(x)+1| < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x)+1 < 1 \Leftrightarrow -2 < f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-4,-3)$
Για να έχει άπειρες λύσεις πρέπει κ=2
Για να είναι αδύνατη πρέπει κ>3 ή κ<-2
$|f(x)| = |x| \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -2$

5. Το σημείο Μ(-1,6) ανήκει στην γραφική παράσταση της $f(x) = x^2 - (\alpha+1)x + \alpha$, άρα
$f(-1) = 6 \Leftrightarrow 1 + \alpha + 1 + \alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = 2$, άρα $f(x) = x^2 - 3x + 2$, οπότε $f(2) = 0$ και
$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 3$, οπότε τα σημεία είναι τα Α(0,2) και Β(3,2)

6. $|x| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$, $2|x| - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$.
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|-1} - \sqrt{2|x|-4}$ είναι $x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x|-1} = \sqrt{2|x|-4} \Leftrightarrow |x| - 1 = 2|x| - 4 \Leftrightarrow |x| = 3 \overset{x \in (-\infty,-2] \cup [2,+\infty)}{\Leftrightarrow} x = 3$ ή $x = -3$,άρα τα σημεία είναι τα Α(-3,0) και Β(3,0). Τον άξονα y'y δεν τον τέμνει γιατί το 0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

7. Η συνάρτηση $f(x) = |x-1| - 1$ διέρχεται από το Ο(0,0) διότι f(0)=0. Η γραφική παράσταση είναι κάτω από τον άξονα x'x όταν $f(x) < 0 \Leftrightarrow |x-1| - 1 < 0 \Leftrightarrow |x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2$. Τα σημεία τομή της συνάρτησης με την y=2 είναι $|x-1| - 1 = 2 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -2$, άρα τα σημεία είναι τα Α(4,2) και Β(-2,2). Για να βρίσκεται η Cf πάνω από την y=2 πρέπει
$|x-1| - 1 > 2 \Leftrightarrow |x-1| > 3 \Leftrightarrow x - 1 > 3$ ή $x - 1 < -3 \Leftrightarrow x > 4$ ή $x < -2$

8.
$f(-1) = 0$, $f(2) = 3$, $f(x) - x = 1 \Leftrightarrow f(x) = x + 1 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$
$f(x) > x + 1 \Leftrightarrow x \in (-1,2)$



$f(x)\cdot(f(x)-x-1)\geq 0$ σχηματίζουμε το πινακάκι

x	$-\infty$		-1		2		3		$+\infty$
f(x)		-	0	+		+	0	-	
f(x)-x-1		-	0	+	0	-		-	
Γινόμενο		+	0	+	0	-	0	+	

Άρα η ανίσωση ισχύει για $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$

9. $f(x)=0\Leftrightarrow -(x-3)^2\cdot(x+3)=0\Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$

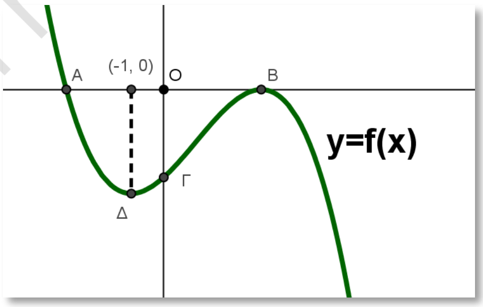
άρα Α(-3,0) και Β(3,0)

$f(0)=-27$, άρα Γ(0,-27)

Και $f(-1)=-32$, άρα Δ(-1,-32)

$B\Delta=\sqrt{(x_B-x_\Delta)^2+(y_B-y_\Delta)^2}=\sqrt{(3+1)^2+(0+32)^2}=\ldots$

$(A\Delta B)=\dfrac{6\cdot 32}{2}=96$



Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ

21	22	23	24	25
Λ	Λ	Λ	Λ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Γενικά περί συναρτήσεων

ΘΕΜΑ 1ο

Το σημείο Α(2,3) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases} 2x+k & ,x\in[0,3] \\ x^2+x & ,x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)\end{cases}$ άρα

$f(2)=3 \Leftrightarrow 4+k=3 \Leftrightarrow k=-1$, οπότε έχουμε $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & ,x\in[0,3] \\ x^2+x & ,x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)\end{cases}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2x-1=0 & ,x\in[0,3] \\ x^2+x=0 & ,x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty)\end{matrix}$ η εξίσωση δίνει λύση $x=\frac{1}{2}$ δεκτή και η 2η εξίσωση δίνει λύσεις x=0 που απορρίπτεται και x=-1 που είναι δεκτή. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α(1/2,0) και Β(-1,0)

Επειδή f(0)=-1 η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ(0,-1)

ΘΕΜΑ 2ο

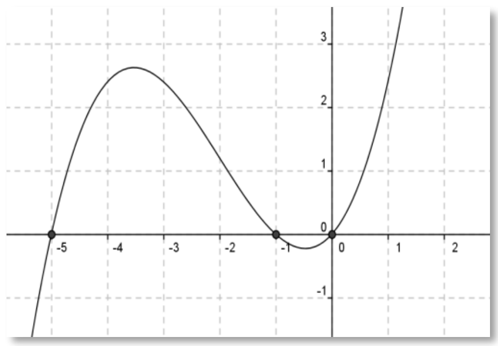
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{\sqrt{1-|x|}}{x^2+1}$ είναι $1-|x|\geq 0 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$

Για x=0 έχουμε ότι η f τέμνει τον y'y στο Α(0,1) ,

λύνοντας την εξίσωση $\frac{\sqrt{1-|x|}}{x^2+1}=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-|x|}=0 \Leftrightarrow 1-|x|=0 \Leftrightarrow |x|=1 \Leftrightarrow x=1 \;\; ή \;\; x=-1$ έχουμε ότι τα σημεία τομής της f με τον άξονα x'x είναι Β(1,0) και Γ(-1,0)

Επειδή $f(x)\geq 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της έχουμε ότι η γραφική της παράσταση δεν είναι κάτω από τον άξονα x'x.

ΘΕΜΑ 3ο



$f(x)=0 \Leftrightarrow x=-5 \;\; ή \;\; x=-1 \;\; ή \;\; x=0$

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(-1,0)$

Η εξίσωση f(x)=2 έχει τρεις λύσεις

$f(x)+x=0 \Leftrightarrow f(x)=-x \Leftrightarrow x=0$

$f(x)<-x \Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$

$f(x)\cdot(f(x)-1)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \;\; ή \;\; f(x)=1$ η 1η εξίσωση έχει 3 λύσεις και η 2η άλλες 3.

Αν $\kappa\in(-\infty,-0,25)$ μία λύση

Αν $\kappa=-0,25$ δύο λύσεις

Αν $\kappa \in (-0,25, 2,5)$ τρεις λύσεις

Αν $\kappa = 2,5$ δύο λύσεις

Αν $\kappa \in (2,5, +\infty)$ μία λύση.

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

Γενικά περί συναρτήσεων

ΘΕΜΑ 1ο

Επειδή $|x-3| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x-3 \le 1 \Leftrightarrow 2 \le x \le 4$ και $|x-3| > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$ το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το R.

Έχουμε ότι : $f(x) = \{\begin{matrix} x^2+x+1 & , x \in [2,4] \\ x^2-1 & , x \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty) \end{matrix}$, οπότε $f(4) = 21$, $f(2) = 7$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x^2+x+1=0 & \alpha\nu\ x \in [2,4] \\ x^2-1=0 & \alpha\nu\ x \in (-\infty,2) \cup (4,+\infty) \end{matrix}$ η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη ενώ η δεύτερη δίνει λύσεις 1 και -1 και οι δύο δεκτές. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α(-1,0) και Β(1,0)

Επειδή f(0)=-1 η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ(0,-1)

ΘΕΜΑ 2ο

Τα σημεία $A = (2, k^2+k+2)$ και $B = (m, -2)$ είναι συμμετρικά του άξονα x'x οπότε

$\begin{matrix} m=2 \\ k^2+k+2=2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} m=2 \\ k=0\ \acute{\eta}\ k=-1 \end{matrix}$ οπότε τα σημεία είναι τα Α(2,2) και Β(2,-2) ή τα σημεία Α(2,2) και Β(2,-2) και στις δύο περιπτώσεις.

Β) Τα σημεία $A = (2, k^2+3k)$ και $B = (4, m)$ είναι συμμετρικά της διχοτόμου της 1ης – 3ης γωνίας των αξόνων άρα

$\begin{matrix} 2=m \\ k^2+3k=4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} m=2 \\ k=1\ \acute{\eta}\ k=-4 \end{matrix}$ οπότε τα σημεία είναι τα Α(2,4) και Β(4,2) ή τα Α(2,4) και Β(4,2) και στις δύο περιπτώσεις

Γ) Για τα σημεία Α(m,1) και Β(5,4) ισχύει (ΑΒ)=d(Α,Β)=5 άρα

$$5 = \sqrt{(m-5)^2+(1-4)^2} \Leftrightarrow 25 = m^2-10m+25+9 \Leftrightarrow m^2-10m+9=0 \Leftrightarrow m=1\ \acute{\eta}\ m=9$$

ΘΕΜΑ 3ο

Από τα δεδομένα της άσκησης καταλήγουμε στον τύπο …

$$f(x) = \begin{matrix} 3 & x \in [0,500] \\ 3+\dfrac{x-500}{100}\cdot 0.2 & x \in (500,5000] \\ 12+\dfrac{x-5000}{500}\cdot 0.1 & x > 5000 \end{matrix}$$