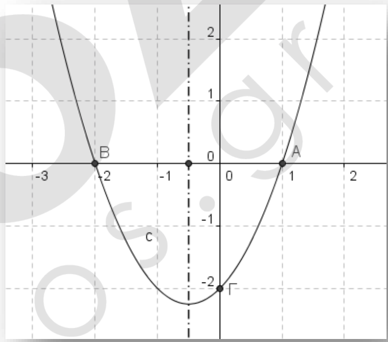
Κεφάλαιο 9ο

Ενότητα 3η



1. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(1,0), Β(-2,0) και Γ(0,-2) από τα δεδομένα αυτά έχουμε :

$$\begin{cases}0=\alpha+\beta+\gamma\\0=4\alpha-2\beta+\gamma\\\gamma=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=2\\2\alpha-\beta=1\\\gamma=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=1\\\gamma=-2\end{cases}$$
, άρα η συνάρτηση έχει τύπο

$$f(x)=x^2+x-2$$

Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K(-\frac{1}{2},-\frac{9}{4})$

Η ευθεία που ορίζεται από το σημείο Κ και το σημείο Α(1,0) είναι η $y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

2. Γνωρίζουμε ότι η κορυφή της συνάρτησης $f(x)=-2x^2-4\alpha x+\beta$ είναι το Μ(-2,7), άρα θα ισχύουν :

$$\begin{cases}7=-8+8\alpha+\beta\\-\frac{-4\alpha}{-4}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-1\\\alpha=2\end{cases}$$

Ενότητα 4η

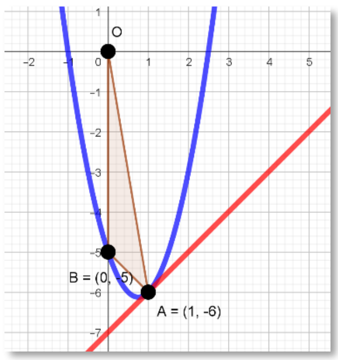
1. Επειδή η $f(x)=x^2-\alpha x+\beta$ τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α(-1,0) και Β(3,0) θα είναι

$$\begin{cases}0=1+\alpha+\beta\\0=9-3\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=2\\\beta=-3\end{cases}$$
οπότε ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=x^2-2x-3$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των διαγραμμάτων C_f ,C_g όπου $g(x)=2|x|$ λύνουμε την εξίσωση :

$$x^2-2x-3=|x|\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3=x & ,x\geq0\\x^2-2x-3=-x & ,x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x-3=0 & ,x\geq0\\x^2-x-3=0 & ,x<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2} & ,x\geq0\\x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} & ,x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3+\sqrt{21}}{2}\\x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\end{cases}$$



2. Το σύστημα της παραβολής $(C):y=2x^2-3x-5$ και της ευθείας $(\varepsilon):y=x-7$ έχει λύση την

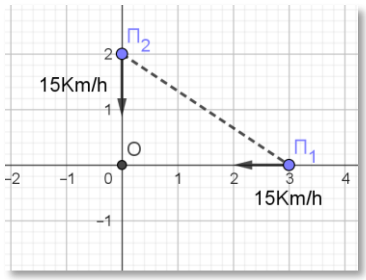
$2x^2-3x-5=x-7\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1$, άρα η ευθεία εφάπτεται της παραβολής στο σημείο Α(1,-6). Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται ευθεία και παραβολή και το εμβαδόν του ΟΑΒ είναι $E=\frac{OB\cdot x_A}{2}=\frac{5\cdot 1}{2}=\frac{5}{2}$

Ενότητα 6η

1. Σχηματίζουμε την συνάρτηση $f(x)=(8-2x)x=-2x^2+8x$ η οποία παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $x=-\frac{8}{-4}=2$, άρα για οποιαδήποτε άλλη τιμή της μεταβλητής x θα παίρνουμε μικρότερο αποτέλεσμα.

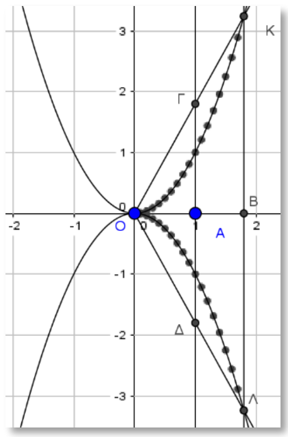
2. $E(x)=x\cdot 100(200-x)=-100x^2+20000x$, με $\begin{matrix} x>0 \\ 200-x>0 \end{matrix} \Leftrightarrow x\in(0,200)$

Η τιμή του x για την οποία μεγιστοποιούνται οι εισπράξεις είναι $x=-\frac{20000}{-200}=100$ λεπτά του ευρώ ή 1 ευρώ.



3. Η απόσταση ΟΠ1 είναι |30-15t| ενώ η απόσταση ΟΠ2 είναι |20-15t|, η απόσταση των δύο πλοίων είναι $d(t)=\sqrt{(30-15t)^2+(20-15t)^2}=\sqrt{450t^2-1500t+1300}$, t>0

Ελάχιστη απόσταση θα έχουμε για $t=\frac{1500}{900}=\frac{5}{3}=1,66$ ώρες μετά το μεσημέρι.



4. Είναι προφανές ότι Οι ευθείες ΟΓ και ΟΔ έχουν εξισώσεις : $y=mx$, $y=-mx$ αντίστοιχα.

Το σημείο Κ βρίσκεται ως σημείο τομής δύο ευθειών , άρα

$\begin{matrix} y=mx \\ x=m \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=m^2 \\ x=m \end{matrix} \Leftrightarrow K=(m,m^2)$, όμοια $\Lambda=(m,-m^2)$

Για το σημείο Κ έχουμε $\begin{matrix} y=m^2 \\ x=m \end{matrix} \Rightarrow y=x^2$ άρα κινείται σε παραβολή y=x^2 και το Λ δουλεύοντας παρόμοια έχουμε ότι κινείται στην παραβολή y=$-x^2$

Ενότητα 7η

1. Η εξίσωση $x^2=\lambda x+1+\lambda \Leftrightarrow x^2-\lambda x-1-\lambda=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\lambda^2-4(-1-\lambda)=\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2\geq 0$ άρα οι δύο συναρτήσεις πάντα τέμνονται. Για λ=-2 τότε εφάπτονται , η εξίσωση είναι $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, άρα το σημείο επαφής θα είναι το Α(-1,1)

Για $\lambda \neq -2$ τα σημεία τομής θα έχουν τετμημένες τις λύσεις της εξίσωσης $x^2-\lambda x-1-\lambda=0$ οπότε θα είναι

$x=\dfrac{\lambda\pm(\lambda+2)}{2}=\begin{matrix} x_1=\lambda+1 \\ x_2=-1 \end{matrix}$. Οπότε από την ισότητα $(x_1-x_2)^2=|x_1-x_2|+2$ θα έχουμε

$(\lambda+1+1)^2=|\lambda+2|+2 \Leftrightarrow |\lambda+2|^2-|\lambda+2|-2=0$ η εξίσωση αυτή έχει λύσεις τις

$|\lambda+2|=-1$ που είναι αδύνατη και $|\lambda+2|=2 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=-4$

2. Για α=1 έχουμε την εξίσωση $x^2+1=x+1 \Leftrightarrow x(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ και τα σημεία τομής είναι τα Α(0,1) και Β(1,2)

Για να τέμνονται οι δύο συναρτήσεις στην γενική τους μορφή θα πρέπει η εξίσωση $x^2+1=x+\alpha$ να έχει λύση

, άρα πρέπει $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 1-4(1-\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha\geq\dfrac{3}{4}$

Αν α>1 τότε υπάρχουν δύο λύσεις της εξίσωσης $x^2-x+1-\alpha=0$ και επειδή $P=x_1\cdot x_2=1-\alpha<0$ οι λύσεις και άρα οι τετμημένες των σημείων τομής είναι αριθμοί ετερόσημοι.

3. Το σημείο Α(0,2) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης διότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης δηλαδή $(\lambda+1)^2\cdot 0-(\lambda+1)\cdot 0+2=2$

Αν λ=-1 τότε πρόκειται για την ευθεία (ε): y=2 (παράλληλη του x'x που τέμνει τον y'y στο 2.

Αν το σημείο Β(2,0) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε θα είναι

$4(\lambda+1)-2(\lambda+1)+2=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$ τότε έχουμε $f(x)=-x^2+x+2$ η οποία τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία $-x^2+x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=2$, ά τα σημεία τομής είναι τα Α(-1,0) και Β(2,0)

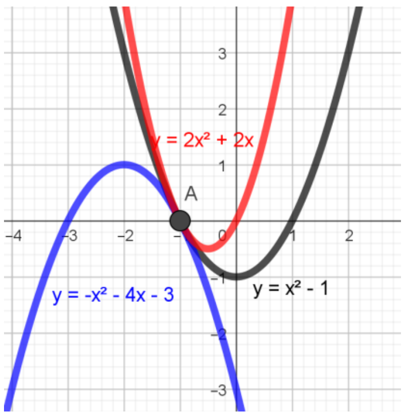
Όταν λ=1 έχουμε την συνάρτηση $f(x)=2x^2-2x+2>0$ για κάθε πραγματική τιμή της μεταβλητής x άρα η γραφική της παράσταση είναι πάντα πάνω από τον άξονα x'x.

4. Για την εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, $\lambda\neq 0$ έχουμε ότι

$\Delta=4(\lambda-1)^2-4\lambda(\lambda-2)=4>0$ και έχει λύσεις τις

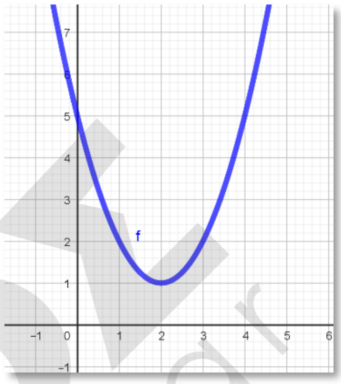
$x=\dfrac{-2(\lambda-1)\pm 2}{2\lambda}\Rightarrow \begin{matrix} x_2=\dfrac{2-\lambda}{\lambda}=-1+\dfrac{2}{\lambda} \\ x_1=-1 \end{matrix}$

$|x_1-x_2|>1 \Leftrightarrow \left|-1+1-\dfrac{2}{\lambda}\right|>1 \Leftrightarrow |\lambda|<2 \overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow} \lambda\in(-2,0)\cup(0,2)$



Έχουμε τις συναρτήσεις $f_1(x)=x^2-1$, $f_{-1}(x)=-x^2-4x-3$,

$f_2(x)=2x^2+2x$



5. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^2-4x+5=7$ είναι δύο. Πράγματι

   $x^2-4x+5=7 \Leftrightarrow x^2-4x-2=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{6}$

Αν λ<1 η εξίσωση είναι αδύνατη, άρα παραβολή και ευθεία δεν τέμνονται

Αν λ=1 η εξίσωση έχει μία λύση, άρα η εθεία εφάπτεται της παραβολής.

Αν λ>1 η εξίσωση έχει δύο λύσεις άρα ευθεία και παραβολή τέμνονται σε δύο σημεία.

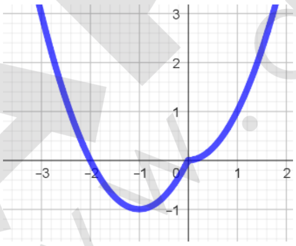
Αλγεβρικά έχουμε ότι $x^2-4x+5=\lambda \Leftrightarrow x^2-4x+(5-\lambda)=0$ με διακρίνουσα

$\Delta=16-4(5-\lambda)=4\lambda-4=4(\lambda-1)$ οπότε από το πρόσημο της διακρίνουσας παίρνουμε παρόμοια συμπεράσματα όπως πριν.

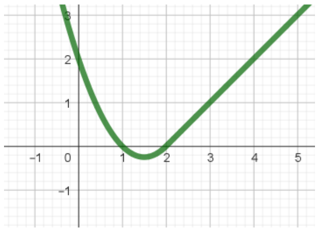
Αν τα σημεία τομής έχουν τετμημένες x_1, x_2 τότε θα είναι $x_1+x_2=S=-\frac{-4}{1}=4$

Ενότητα 8η

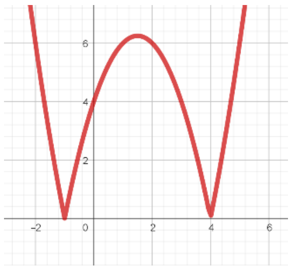
1. $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\geq 0 \\ x^2+2x & ,x<0 \end{cases}$



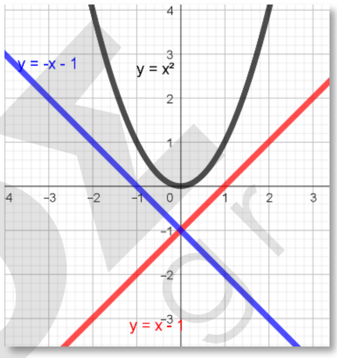
2. $g(x)=\begin{cases} x^2-3x+2 & ,x\leq 2 \\ x-2 & ,x>2 \end{cases}$



3. $h(x)=|x^2-3x-4|$



Επαναληπτικές ασκήσεις



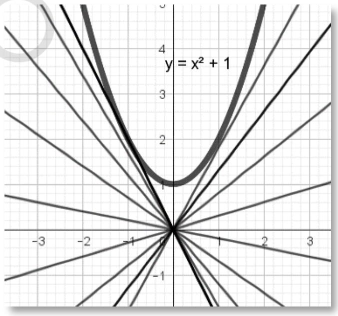
1. Η εξίσωση $x^2=-x-1 \Leftrightarrow x^2+x+1=0$ είναι αδύνατη

Η εξίσωση $x^2=x-1 \Leftrightarrow x^2-x+1=0$ είναι αδύνατη

Επειδή $x-1=-x-1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ οι ευθείες τέμνονται στο Α(0,1) και είναι κάθετες διότι $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1\cdot(-1)=-1$

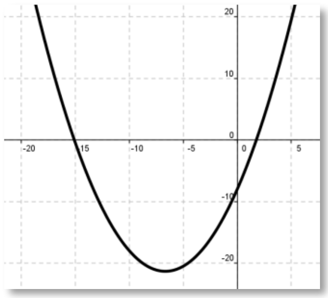
2. Η εξίσωση $x^2+1+kx=0$, $k \in R$ δεν έχει λύσεις αν

$\Delta=\kappa^2-4<0 \Leftrightarrow \kappa \in (-2,2)$



Όταν κ=2 ή κ=-2 οι ευθείες y=-2x και y=2x εφάπτονται της f. Τα παραπάνω συμπεράσματα αποδίδονται γεωμετρικά στο διπλανό σχήμα.

3. Έχουμε την εξίσωση $\alpha x^2=k \Leftrightarrow \alpha x^2-k=0$ με διακρίνουσα $\Delta=4\alpha\kappa$, οπότε αν α,κ ομόσημοι η ευθεία τέμνει την παραβολή, αν α, κ ετερόσημοι η ευθεία δεν τέμνει την παραβολή, αν κ=0 τότε η ευθεία παριστάνει τον άξονα x'x που εφάπτεται της παραβολής.



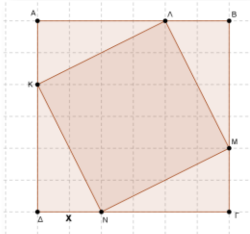
4. Με βάση την γραφική παράσταση έχουμε ότι :

Η διακρίνουσα είναι θετική αφού τέμνει τον άξονα x'x σε δύο σημεία

Ο συντελεστής α είναι θετικός αφού η Cf στρέφει τα κοίλα άνω.

Ο σταθερός όρος είναι αρνητικός αφού η Cf τέμνει τον y'y σε αρνητικό σημείο

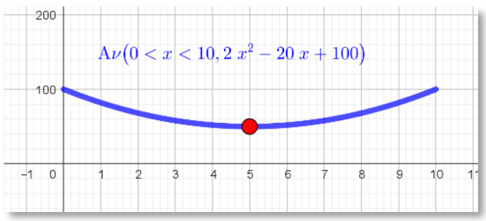
Από το σχήμα έχουμε ότι ο άξονας συμμετρίας είναι ευθεία στο 2ο και 3ο τεταρτημόριο άρα $-\dfrac{\beta}{2\alpha}<0 \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{2\alpha}>0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \beta>0$



5. Ισχύει ότι $y_1-y_2+f_{min}=6 \Leftrightarrow f(-2)-f(3)+f(1)=6 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha=2$

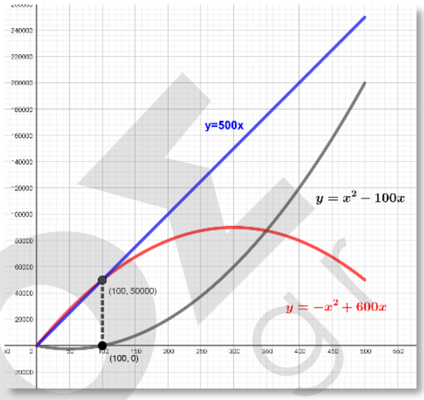
6. Τα τρίγωνα είναι ίσα (απλό) και το εμβαδόν του τετραγώνου ΚΛΜΝ είναι $E(x)=100-4\cdot\dfrac{x\cdot(10-x)}{2}=2x^2-20x+100$ με

$\begin{matrix} x\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{matrix} \Leftrightarrow 0\leq x\leq 10$. Το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x=5$ και Ε(5)=50



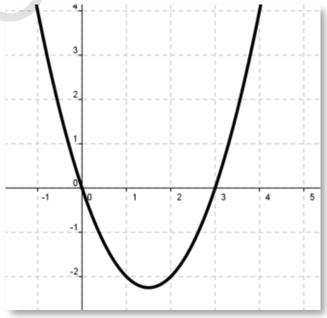
7. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι :

$P(x) = 500x - (-x^2 + 600x) = x^2 - 100x$ με $0 < x \leq 500$



Στο διπλανό σχήμα αποδίδονται οι συναρτήσεις :
Εισπράξεις y=I(x), Έξοδα y=C(x) και Κέρδος y=P(x). Το σημείο τομής των συναρτήσεων y=I(x) και y=C(x) είναι το (100,50000) είναι το σημείο όπου τα έσοδα και τα έξοδα είναι ίδια, συγχρόνως παρατηρείστε ότι το σημείο τομής της συνάρτησης y=P(x) με τον άξονα x'x είναι το (100,0) στο οποίο δηλώνεται ότι η παραγωγή 100 μονάδων προιόντος αποδίδει μηδενικό κέρδος.

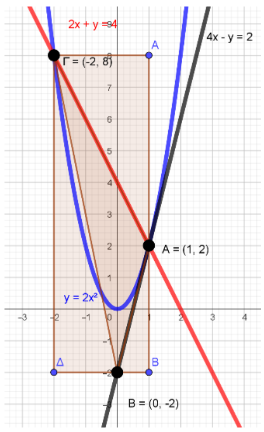
8. Η ελάχιστη τιμή της είναι $f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{9}{4}$.



Ο άξονας συμμετρίας της είναι η $x = -\frac{3}{2}$

Τα σημεία τομής με τους άξονες είναι O=(0,0) και A(3,0)
Ισχύει ότι $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0,3)$
Ισχύει ότι $\kappa = f(4) = 4$, άρα η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία O(0,0) και Γ(4,4) είναι η y=x.

9. $\Gamma \in C_f \Leftrightarrow 8 = 4\alpha \Leftrightarrow \alpha = 2$. Το κοινό σημείο της παραβολής και της ευθείας είναι $2x^2 = 4x - 2 \Leftrightarrow 2(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, άρα η ευθεία εφάπτεται της παραβολής στο σημείο Α(1,2)

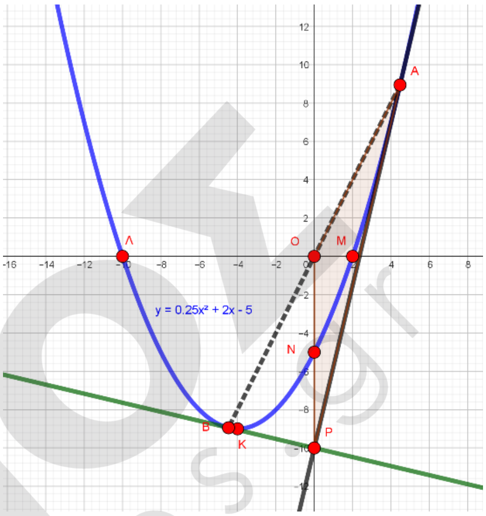


Η ευθεία ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{A\Gamma} = \frac{8-2}{-2-1} = -2$ άρα έχει εξίσωση $y = -2x + b$ και $A \in (\varepsilon) \Leftrightarrow 2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4$, άρα έχει εξίσωση y=-2x+4 . Για το εμβαδόν το ΑΒΓ θα βρεθεί αν από το ορθογώνο (που φαίνεται στο διπλανό σχήμα) αφαιρέσουμε τα τρία τρίγωνα. Έτσι έχουμε

$$E = 3 \cdot 10 - \frac{3 \cdot 6}{2} - \frac{2 \cdot 10}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} = 30 - 9 - 10 - 2 = 9$$

10. Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $K = (-4, -9)$ και τα σημεία τομής με τους άξονες τα M=(2,0) , Λ=(-10,0) , N=(0,-5)

Το συμμετρικό του A ως προς το O είναι το $B = (-2\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$ και το σημείο αυτό ανήκει στην παραβολή γιατί οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της συνάρτησης. Ο συντελεστής διεύθυνσης της PA είναι



$$\lambda_{PA} = \frac{4\sqrt{5}+10}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}} = \frac{10+5\sqrt{5}}{5} = 2+\sqrt{5}$$ και επιδή

$(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5}) = -1$ η ευθεία PA είναι κάθετη της

$y = (2-\sqrt{5})x - 10$

Επειδή το τρίγωνο ABP είναι ορθογώνιο και η EP διάμεσος θα ισχύει $(AOP) = \dfrac{(ABP)}{2} = \dfrac{AP \cdot PK}{4}$ με

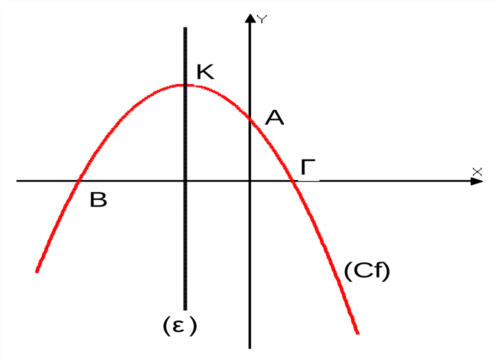
$$AP = \sqrt{(2\sqrt{5}-0)^2 + (4\sqrt{5}+10)^2} = \sqrt{200+80\sqrt{5}}$$ και

$$BP = \sqrt{(-2\sqrt{5}-0)^2 + (-4\sqrt{5}+10)^2} = \sqrt{200-80\sqrt{5}}$$ άρα $(AOP) = \dfrac{\sqrt{3600}}{4} = 15$

11. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι $y = a(x+4)(x-1)$ με $A \in C_f \Leftrightarrow -4a = 4 \Leftrightarrow a = -1$, άρα $f(x) = -x^2 - 3x + 4$

Οπότε η κορυφή της παραβολής θα είναι

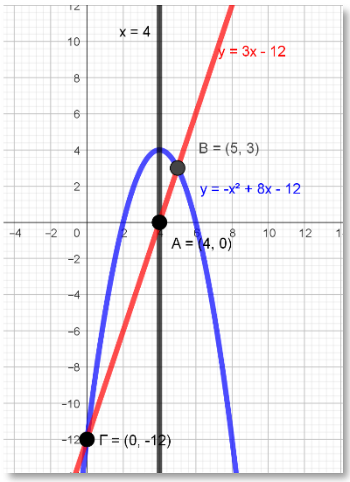
$$K = (-\frac{3}{2}, f(-\frac{3}{2})) = (-\frac{3}{2}, \frac{25}{4})$$ και ο άξονας συμμετρίας της η ευθεία $x = -\dfrac{3}{2}$.



12. Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε ότι γ=-12 και μ=-12. Επίσης θα είναι

$$0 = 3(-\frac{\beta}{-2}) - 12 \Leftrightarrow 3\beta = 24 \Leftrightarrow \beta = 8$$

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται η παραβολή η ευθεία (ε) ο άξονας συμμετρίας της παραβολής καθώς και τα σημεία τομής παραβολής – ευθείας που είναι τα Γ(0,-12) και B(5,3)



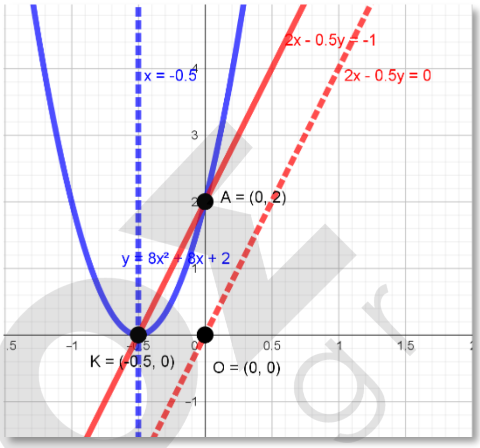
13. Θα πρέπει

$$\Delta = (3\lambda-1)^2 - 8(\lambda^2-1) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3$$

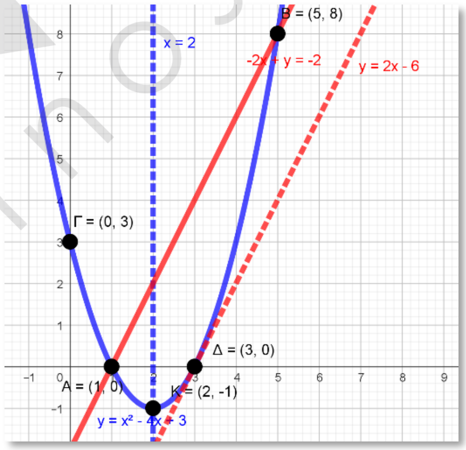
Τότε το τριώνυμο γράφεται $f(x) = 8x^2 + 8x + 2 = 2(2x+1)^2$,

οπότε η διπλή ρίζα είναι η $x = -\dfrac{1}{2}$

Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζονται η παραβολή και ο άξονας συμμετρίας της, η κορυφή της, η ευθεία ΑΚ και η ευθεία που διέρχεται από το Ο(0,0) και είναι παράλληλη της ΑΚ.

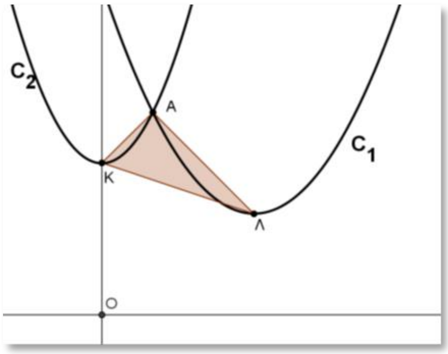


14. Στο διπλανό σχήμα παρουσιάζεται η παραβολή, ο άξονας συμμετρίας της, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες, η ευθεία ΑΒ:-2x+y=-2 η ευθεία y=λx-6 που είναι παράλληλη της ΑΒ η οποία έχει τελικά εξίσωση y=2x-6 και εφάπτεται της παραβολής στο Δ(3,0).



15. Είναι προφανές ότι η C2 αντιστοιχεί στην παραβολή $f(x) = x^2 + 3$

ενώ στην C1 η παραβολή $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{13}{2}$



Οι δύο παραβολές τέμνονται στα σημεία

$$\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{13}{2} = x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -7$$

Το σημείο Α προφανώς είναι το Α=(1,4)

Οι κορυφές των παραβολών είναι οι Κ(0,3) και Λ(3,2)

Οι πλευρές του ΑΚΛ είναι $AK = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{2}, KB = \sqrt{10}$ και το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την ΚΛ.

16. Επειδή $\Delta = (\lambda^2-1)^2 + 12\lambda^2 > 0$ η Cf τέμνει τον x'x σε δύο σημεία

Για να είναι η Cf συμμετρική του y'y αρκεί $\lambda = \pm 1$

Ισχύουν $\begin{matrix} x_1 + x_2 > -1 \\ x_1 \cdot x_2 < -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \dfrac{1-\lambda^2}{3} > -1 \\ \dfrac{-2\lambda^2}{3} < -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda^2 < 4 \\ \lambda^2 > 3 \end{matrix} \Leftrightarrow 3 < \lambda^2 < 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |\lambda| < 2 \Leftrightarrow \lambda \in (-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$

17. Πρέπει $\Delta=4(\lambda-5)^2+8(\lambda-5)=4(\lambda-5)(\lambda+3)>0 \Leftrightarrow \lambda\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$

$x_1{}^2+x_2{}^2=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=2 \Leftrightarrow (\lambda-5)^2+(\lambda-5)=2 \overset{\lambda\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)}{\Leftrightarrow} \lambda=6$

Για να είναι κάτω από τον άξονα x'x θα πρέπει Δ<0 και Α<0 (επειδή Α=-2<0) θα πρέπει $\lambda\in(-3,5)$

Επειδή $-3<\sqrt{17}<5$ το τριώνυμο είναι πάντα αρνητικό άρα $f(\sqrt[3]{2})<0$

18. Αν $\kappa\neq 1$ τότε είναι παραβολή με $\Delta=(\kappa-1)^2-4(\kappa-1)=(\kappa-1)(\kappa-5)$,

Οπότε αν $\kappa\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$ η Cf τέμνει τον x'x σε δύο σημεία

Αν $\kappa\in(1,5)$ δεν τέμνει η Cf τον άξονα x'x.

Αν κ=1 τότε η συνάρτηση είναι η y=1

Αν κ=5 τότε η Cf εφάπτεται του x'x.

$A(2,3)\in Cf \Leftrightarrow 3=4(k-1)-2(k-1)+1 \Leftrightarrow 2k-1=3 \Leftrightarrow k=2$

Τότε ο τύπος της συνάρτησης είναι $f(x)=x^2-x+1$, οπότε δεν τέμνει τον x'x ενώ τέμνει τον y'y στο Β(0,1)

Πρέπει $\begin{matrix} k-1>0 \\ \Delta<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k>1 \\ k\in(1,5) \end{matrix} \Leftrightarrow k\in(1,5)$

Πρέπει $\begin{matrix} \dfrac{-\beta}{2\alpha}>0 \\ -\dfrac{\Delta}{4\alpha}<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \dfrac{1}{2}>0 \\ \dfrac{-(\kappa-1)(\kappa-5)}{4(\kappa-1)}<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \kappa-5>0 \Leftrightarrow \kappa>5$

Ερωτήσεις κατανόησης

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ

11	12	13	14	15
Σ	Σ	Λ	Σ	Σ

Φύλλο αξιολόγησης στην ενότητα :

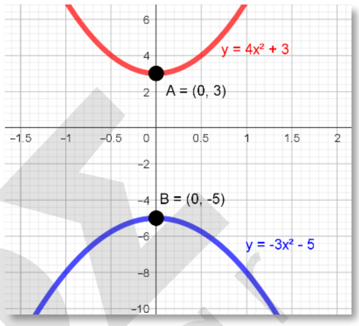
Παραβολή

ΘΕΜΑ 1ο

Ισχύουν $\begin{matrix} 2=16\alpha+4\beta+\gamma \\ 0=4\alpha+2\beta+\gamma \\ -\dfrac{\beta}{2\alpha}=4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 16\alpha+4\beta+\gamma=2 \\ 4\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 8\alpha+\beta=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 12\alpha+2\beta=2 \\ 8\alpha+\beta=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 4\alpha+2\beta+\gamma=0 \\ 6\alpha+\beta=1 \\ 8\alpha+\beta=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \gamma=-6 \\ \beta=4 \\ \alpha=-\dfrac{1}{2} \end{matrix}$

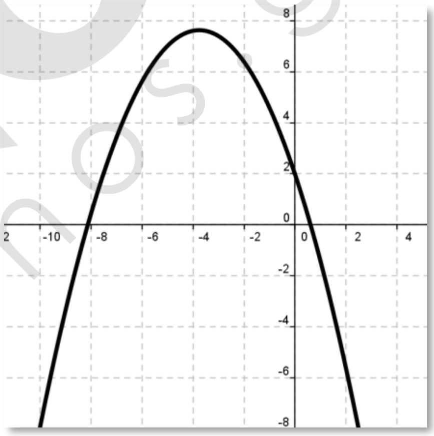
Άρα $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$

ΘΕΜΑ 2ο



Σχεδιάζοντας τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η ελάχιστη απόστασή τους είναι 8 μονάδες.

ΘΕΜΑ 3ο



Προφανώς είναι Δ>0 – τέμνει τον x’x σε δύο σημεία
α<0 στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω
γ>0 τέμνει τον y’y σε σημείο με θετική τεταγμένη

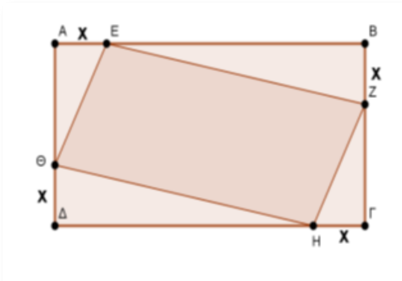
και επειδή $-\frac{\beta}{2\alpha}<0\overset{\alpha<0}{\Leftrightarrow}\beta<0$

Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=γ είναι προφανώς δύο.

Από το σχήμα έχουμε $x_1<x_2$ αλλά $|x_2|>|x_1|$, ενώ $\frac{x_1+x_2}{2}<0$

Άρα $\frac{x_1+x_2}{2}<0<|x_1|<|x_2|$

ΘΕΜΑ 4ο



Ισχύει ότι $E(x)=160-4\frac{x\cdot(10-x)}{2}=2x^2-20x+160$ με

$$\begin{aligned} x\geq 0 \\ 10-x\geq 0 \end{aligned}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 10.$$

Στο διπλανό σχήμα αποδίδεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και το σημείο στο οποίο παρουσιάζει ελάχιστο.