

11° Κεφάλαιο–Γεωμετρικά Μοτίβα**11.1. Μοτίβο Συμβόλων – Ευκλείδεια Διαίρεση**

4. 8



6. 10 τρίγωνα

7. Α

8. Γ

9. Β

10. Γ

11.2. Σύνθετα Μοτίβα

11. 7 αστέρια



12. Από 25 τετράγωνα

13. α)



β) 28 κουκκίδες

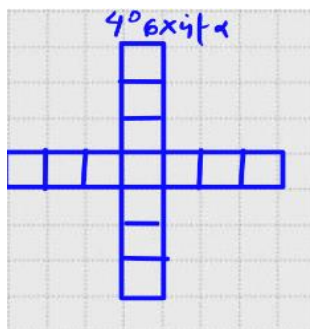
γ) 190 κουκκίδες

Έξυπνα και Εύκολα!

- 14. Β
- 15. Γ
- 16. Β
- 17. Γ
- 18. Γ
- 19. Δ
- 20. Β

11.3.Συνδυαστικά Θέματα Εμβάθυνσης

- 21. Δ
- 22. Γ
- 23. Γ
- 24. Γ
- 25. 144 λευκά και 25 μαύρα
- 26. Γ
- 27. Β
- 28. Γ
- 29. Γ
- 30. Α)



Β) Σε κάθε επόμενο σχήμα προσθέτουμε 4 παραπάνω τετράγωνα, ένα σε κάθε άκρη του σταυρού.

Έξυπνα και Εύκολα!

Γ) Στη 2018^η θέση θα έχει 8.069 τετράγωνα και στη 2011^η θέση θα έχει 8.041 τετράγωνα.

31. Δ

32. 1^η περίπτωση: 12 τετράγωνα

2^η περίπτωση: 9 τετράγωνα και 2 ορθογώνια

3^η περίπτωση: 6 τετράγωνα και 4 ορθογώνια

4^η περίπτωση: 3 τετράγωνα και 6 ορθογώνια

5^η περίπτωση: 8 ορθογώνια

33. Γ

34. Α) 4 ,6 ,8 αντίστοιχα

Β) Κάθε επιπλέον τραπέζι που προσθέτουμε, προστίθενται επιπλέον 2 καρέκλες

Γ) $2x + 2$

Δ) 48 καλεσμένους το πολύ μπορούν να καλέσουν

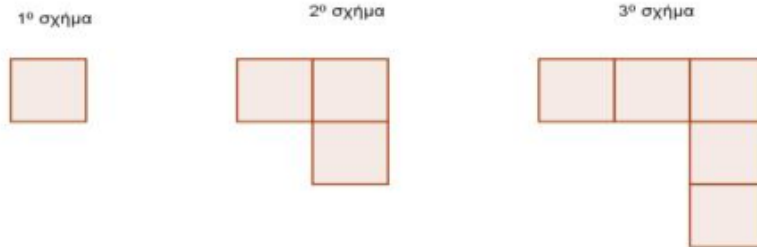
Ε) 17 τραπέζια

<p>Ασύγχρονο Μάθημα - Course</p> <p>Μαθηματικά Πρότυπα</p> <p>Βοήθημα για Διδασκαλία & Μελέτη</p> <ul style="list-style-type: none">● Διδασκαλία σε video● Επαυξημένο βιβλίο● Quizzes● Προσομοιώσεις εξετάσεων <p><small>Επιμέλεια: Γιάννης Κράκος</small></p>	<p>Ασύγχρονο Μάθημα – Video Διδασκαλία</p> <p>Συνδυάζουμε το παραδοσιακό – έντυπο και έγχρωμο βιβλίο με το μοντέρνο -ασύγχρονο μάθημα. Το Ασύγχρονο μάθημα περιλαμβάνει:</p> <ul style="list-style-type: none">• 727 Θέματα-Ασκήσεις σε Video διδασκαλία• Επαυξημένο βιβλίο: eBook ανά κεφάλαιο με θεωρία, ασκήσεις, διαγωνίσματα• Quizzes: ερωτήσεις κλειστού τύπου με απάντηση και αιτιολόγηση• Προσομοιώσεις: 14 στοχευμένα διαγωνίσματα για κάθε κεφάλαιο <p>Τιμή: 49€</p>
--	---

Έξυπνα και Εύκολα!

Προσομοιωτικό Διαγώνισμα 11^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ
Θέμα 1

Παρατήρησε τα επόμενα σχήματα. Το 11^ο σχήμα θα αποτελείται από:



- A. 21 τετράγωνα B. 19 τετράγωνα Γ. 20 τετράγωνα Δ. 23 τετράγωνα

ΛΥΣΗ.

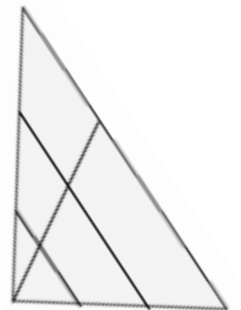
Σωστό το Α.

Κάθε φορά προσθέτουμε 2 τετράγωνα. Στο 11^ο σχήμα θα έχουμε προσθέσει $10 \cdot 2 = 20$ τετράγωνα. Άρα θα έχει 21 τετράγωνα.

Θέμα 2

Πόσα διαφορετικά τρίγωνα μπορείς να διακρίνεις συνολικά στο διπλανό σχήμα;

- A. 6 B. 7 Γ. 5 Δ. κανένα από τα προηγούμενα



ΛΥΣΗ.

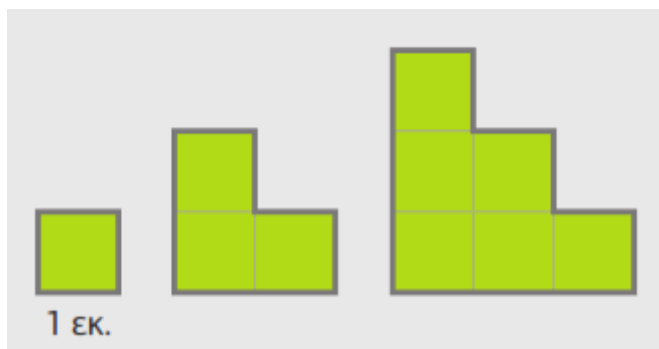
Σωστό το Δ.

Έχουμε 3 τρίγωνα πάνω και 3 κάτω. Είναι και 3 τα ολόκληρα. Άρα είναι περισσότερα από 7.

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 3

Παρακάτω βλέπετε τα τρία πρώτα σχήματα, από μία σειρά σχημάτων που κατασκευάζονται με παρόμοιο τρόπο. Η περίμετρος του 7^{ου} στη σειρά σχήματος είναι ;



- A. 20 B. 24 Γ. 28 Δ. 32

ΛΥΣΗ.

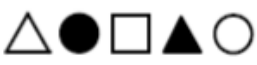
Σωστό το Γ

Παρατηρούμε ότι το δεύτερο έχει περίμετρο όσο ένα τετράγωνο με πλευρά 2εκ,δηλαδή 8εκ.






Το τρίτο έχει περίμετρο όσο ένα τετράγωνο με πλευρά 3εκ,δηλαδή 12εκ.

Αρα το έβδομο θα έχει περίμετρο όσο ένα τετράγωνο με πλευρά 7εκ,δηλαδή 28εκ.

Θέμα 4

Το μοτίβο  επαναλαμβάνεται, όπως φαίνεται παρακάτω. Ποιο σχήμα θα είναι στη 2013^η θέση;



- A.  B.  Γ.  Δ.  Ε. 

Έξυπνα και Εύκολα!

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Δ.

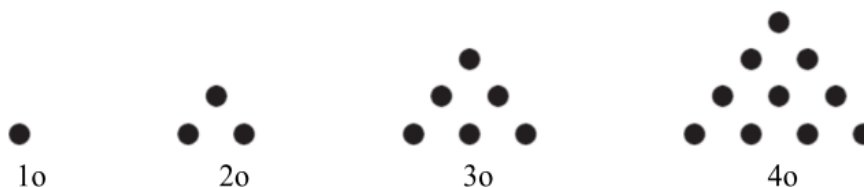
Το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 5.

Επειδή το 5 διαιρεί το 2010 μετά θα ξεκινάει από την αρχή.

Άρα θα είναι στην 2013 θέση το τρίτο, δηλαδή το τετράγωνο.

Θέμα 5

Ποιο κατά σειρά σχήμα του παρακάτω μοτίβου θα αποτελείται από 55 κουκκίδες;



A. Το 11^ο

B. Το 10^ο Γ. Το 12^ο

Δ. Το 9^ο

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Β.

Το πρώτο έχει 1 κουκίδα. Το δεύτερο 1+2. Το τρίτο έχει 1+2+3 κουκίδες.

Θέλουμε να βρούμε έναν αριθμό που το άθροισμα όλων των φυσικών μέχρι και αυτόν να είναι 55.

Αλλά είναι γνωστό ότι

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Πρέπει να βρούμε τον n ώστε

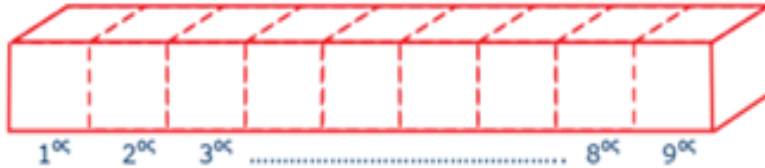
$$55 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Άμεσα βλέπουμε ότι $n = 10$

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 6

Το παρακάτω στερεό αποτελείται από 9 ίδιους μικρούς ξύλινους κύβους, οι οποίοι είναι τοποθετημένοι ο ένας δίπλα στον άλλον. Κάθε μικρός κύβος έχει επιφάνεια 9 τετραγωνικά εκατοστά. Πόσα τετραγωνικά εκατοστά είναι η συνολική επιφάνεια του στερεού;



- A. 60 τ.εκ. B. 45 τ.εκ. Γ. 57 τ.εκ. Δ. 54 τ.εκ.

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Γ.

Η κάθε έδρα του κύβου έχει επιφάνεια $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Το στερεό που έχουμε έχει επιφάνεια $4 \cdot 9 + 2 = 38$

έδρες του κύβου. Άρα το εμβαδό της επιφάνειας του είναι $38 \cdot \frac{3}{2} = 19 \cdot 3 = 57$ τ.εκ.

Θέμα 7

Στην ακόλουθη εικόνα φαίνεται η κατασκευή κανονικών πενταγώνων με τη χρήση κουκκίδων. Πόσες κουκκίδες θα χρειαστούμε, για να κατασκευάσουμε το μεθεπόμενο κανονικό πεντάγωνο ;



- A. 21 κουκκίδες B. 25 κουκκίδες Γ. 20 κουκκίδες Δ. 16 κουκκίδες

Έξυπνα και Εύκολα!

ΛΥΣΗ.

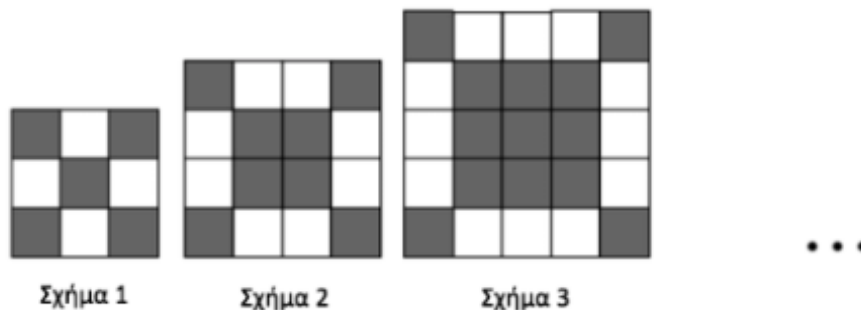
Σωστό το Β.

Το κάθε επόμενο πεντάγωνο έχει επιπλέον 5 κουκίδες από το προηγούμενο .

Το τρίτο έχει 15 κουκίδες οπότε το μεθεπόμενο θα έχει $15+10=25$ κουκίδες.

Θέμα 8

Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα μοτίβο. Ποιος αριθμός από τους πιο κάτω δεν είναι δυνατόν να εκφράζει τον αριθμό των σκιασμένων τετραγώνων σε κάποιο επόμενο σχήμα του μοτίβου;



- A. 68 B. 40 Γ. 33 Δ. 13

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Γ.

Τα σκιασμένα τετράγωνα είναι 4 στις άκρες και $1, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ στη μέση.

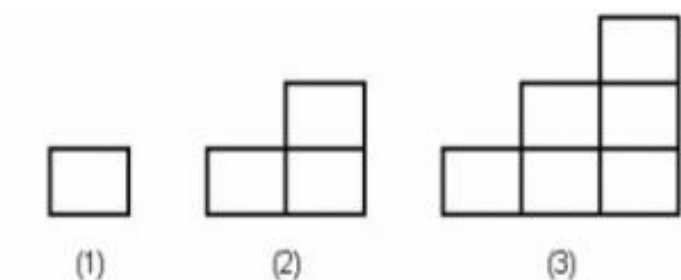
Ετσι αν από τον ολικό αριθμό των σκιασμένων τετραγώνων αφαιρέσουμε 4 ο αριθμός που μένει πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο.

Είναι $41-4=37$ που δεν είναι τέλειο τετράγωνο.

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 9

Για να κατασκευάσω το 1^ο σχήμα, όπως φαίνεται πιο κάτω, χρειάζομαι 4 ξυλάκια. Για να κατασκευάσω το 2^ο στη σειρά σχήμα, χρειάζομαι 10 ξυλάκια, το 3^ο 18 κ.ο.κ. Πόσα ξυλάκια θα χρειαστώ, για να κατασκευάσω το 9^ο στη σειρά σχήμα;



A. 74 B. 180 Γ. 108 Δ. 130

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Γ.

Για το πρώτο χρειαζόμαστε 4 ξυλάκια.

Για το δεύτερο χρειαζόμαστε $10=4+6$

Για το τρίτο χρειαζόμαστε $18=10+8=4+6+8$.

Δηλαδή για τα τρία πρώτα είναι $2 \cdot 2$, $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3$, $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

Άρα για το 9 θα χρειαστώ $2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + 2 \cdot 10$

Θα υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα βασιζόμενοι στην Έξυπνη Πρόσθεση Gauss

$$\begin{array}{r}
 4+6+8+10+12+14+16+18 \\
 20+18+16+14+12+10+8+6+4
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} +20$$

(προσθέτουμε)

Έξυπνα και Εύκολα!

Έχουμε

$$(4+20)+(6+18)+(8+16)+\dots+(16+8)+(18+6)+(20+4)$$

$$=24+24+24+\dots+24$$

$$= 9 \cdot 24$$

$$= 216$$

Όμως, εμείς ψάχνουμε το ένα από τα δύο αθροίσματα, που υπολογίσαμε, άρα $216:2=108$

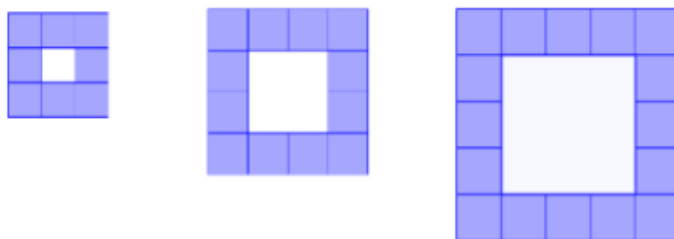
Σχόλιο:

Τα ζεύγη των αθροισμάτων που κάνουν 24 είναι 9, διότι από το 2 έως και το 10 είναι $10-2+1=9$ αριθμοί.

Θέμα 10

Γύρω από ένα τετράγωνο συντριβάνι ο κυρ Αλέκος τοποθετεί τετράγωνα πλακάκια όπως στα παρακάτω σχήματα.

- Γύρω από τετράγωνο συντριβάνι με πλευρά 1μ τοποθετεί 8 τετράγωνα πλακάκια πλευράς 1μ
- Γύρω από τετράγωνο συντριβάνι με πλευρά 2μ τοποθετεί 12 τετράγωνα πλακάκια πλευράς 1μ
- Γύρω από τετράγωνο συντριβάνι με πλευρά 3μ τοποθετεί 16 τετράγωνα πλακάκια πλευράς 1μ



Πόσα τετράγωνα πλακάκια πλευράς 1μ. θα τοποθετήσει γύρω από τετράγωνο συντριβάνι με πλευρά 20μ. ;

A. 90 B. 80 Γ. 72 Δ. 84

Έξυπνα και Εύκολα!

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Δ.

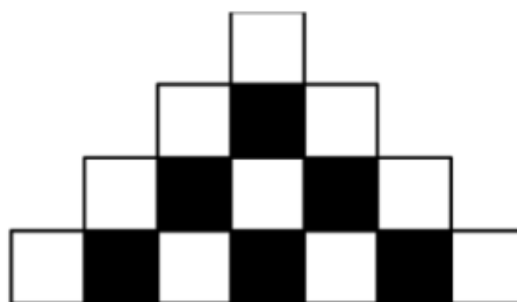
Στις γωνίες θα τοποθετηθούν 4 πλακάκια.

Στην κάθε πλευρά 20.

Σύνολο $4 + 20 \cdot 4 = 84$

Θέμα 11

Σε κάθε σειρά του παρακάτω σχήματος υπάρχουν διαδοχικά τετράγωνα διαφορετικού χρώματος. Κάθε σειρά έχει 2 τετράγωνα παραπάνω από την προηγούμενη και ξεκινάει και τελειώνει με άσπρο τετράγωνο. Πόσα άσπρα υπάρχουν στην 35^η σειρά;



A. 33 B. 34 Γ. 35 Δ. 36

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Γ.

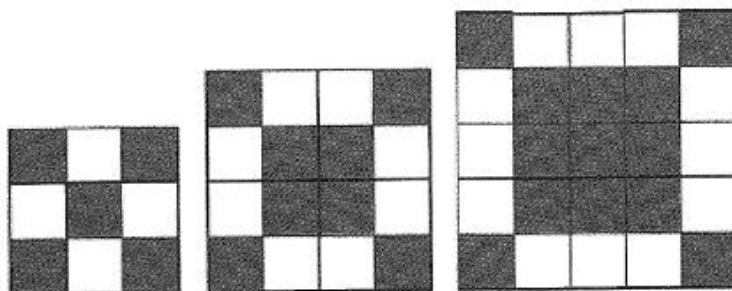
Η πρώτη έχει 1 η δεύτερη 2 η τρίτη 3 κλπ.

Άρα η 35^η σειρά έχει 35.

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 12

Παρακάτω παρουσιάζονται τα τρία πρώτα βήματα ενός μοτίβου. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δεν μπορεί να δείχνει τα άσπρα τετράγωνα που υπάρχουν σε κάποιο σχήμα του μοτίβου;



Α. 1024

Β. 880

Γ. 2012

Δ. 4014

ΛΥΣΗ

Σωστό το Δ.

Παρατηρούμε ότι σε κάθε σχήμα του μοτίβου τα άσπρα τετράγωνα είναι αριθμός που διαιρείται με το 4.

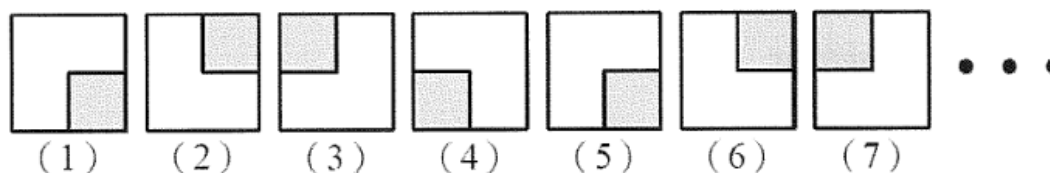
Γνωρίζουμε ότι ένας αριθμός διαιρείται με το 4 όταν διαιρείται με το 4 ο αριθμός που σχηματίζεται από τα δύο τελευταία ψηφία.

Τα 24,80,12 διαιρούνται με το 4, ενώ ο 14 δεν διαιρείται.

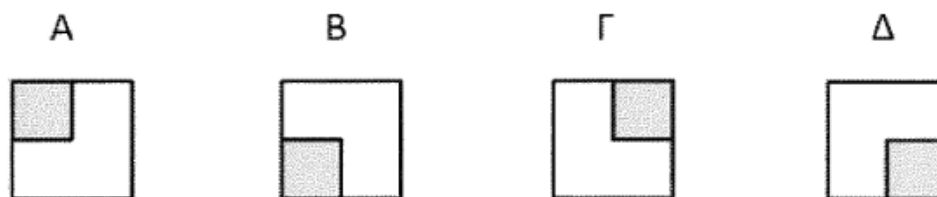
Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 13

Πιο κάτω παρουσιάζεται ένα μοτίβο:



Ποιο από τα παρακάτω θα βρίσκεται στη 2013^η θέση;



ΛΥΣΗ.

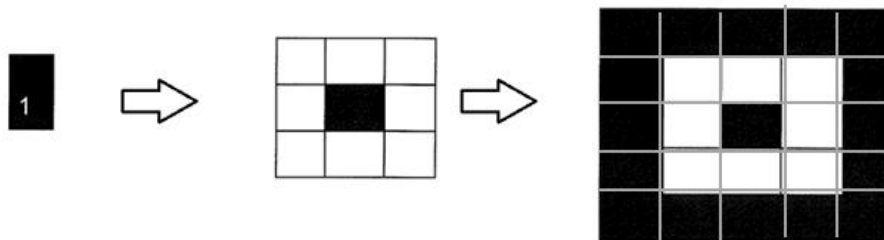
Σωστό το Δ.

Βλέπουμε ότι το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 4.

Το 2012 διαιρείται με το 4. Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του 2013 με το 4 είναι ίσο με 1. Άρα στην 2013 θέση θα είναι το σχήμα (1) της εκφώνησης.

Θέμα 14

Ο Νικόλας φτιάχνει ένα σχέδιο με άσπρα και μαύρα τουβλάκια. Σε ποιο σχήμα θα προσθέσει 32 τουβλάκια και τι χρώματος θα είναι;



Α. 4^ο σχήμα, λευκά Β. 4^ο σχήμα, μαύρα Γ. 5^ο σχήμα, λευκά Δ. 5^ο σχήμα, μαύρα

Έξυπνα και Εύκολα!

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Δ.

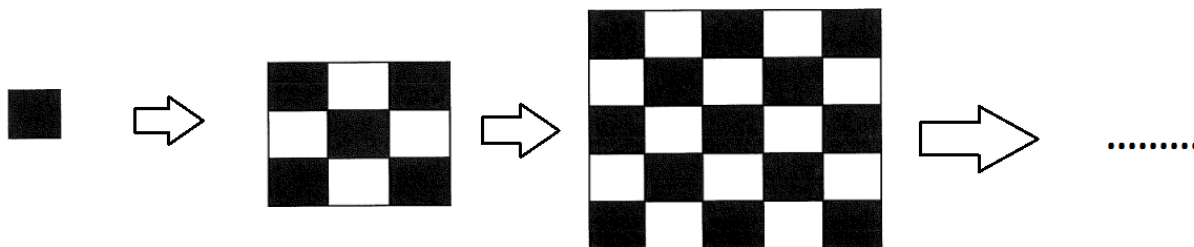
Παρατηρούμε ότι σε κάθε σχήμα προσθέτουμε εξωτερικά τα τουβλάκια, ως εξής:

Στο 2^ο σχήμα προσθέτουμε 8, στο 3^ο προσθέτουμε 16, στο 4^ο προσθέτουμε 24, στο 5^ο προσθέτουμε 32 και εναλλάξ τα χρώματα αρχίζοντας με τα λευκά.

Άρα, έχουμε 32 μαύρα τουβλάκια στο 5^ο σχήμα.

Θέμα 15

Δίνεται το παρακάτω μοτίβο με τετραγωνάκια. Στο 5^ο βήμα του τα άσπρα τετράγωνα είναι;



A. 40

B. 41

Γ. 50

Δ. 51

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Α.

Το πρώτο έχει 1 τετραγωνάκι το δεύτερο 9 το τρίτο 25 .

Βλέπουμε ότι είναι τα τετράγωνα των περιττών ($1=1^2$, $9=3^2$, $25=5^2$).

Έτσι στο τέταρτο θα έχει $7^2=49$ και στο πέμπτο που μας ενδιαφέρει $9^2=81$.

Παρατηρούμε ότι τα μαύρα τετραγωνάκια είναι κατά 1 περισσότερα από τα άσπρα.

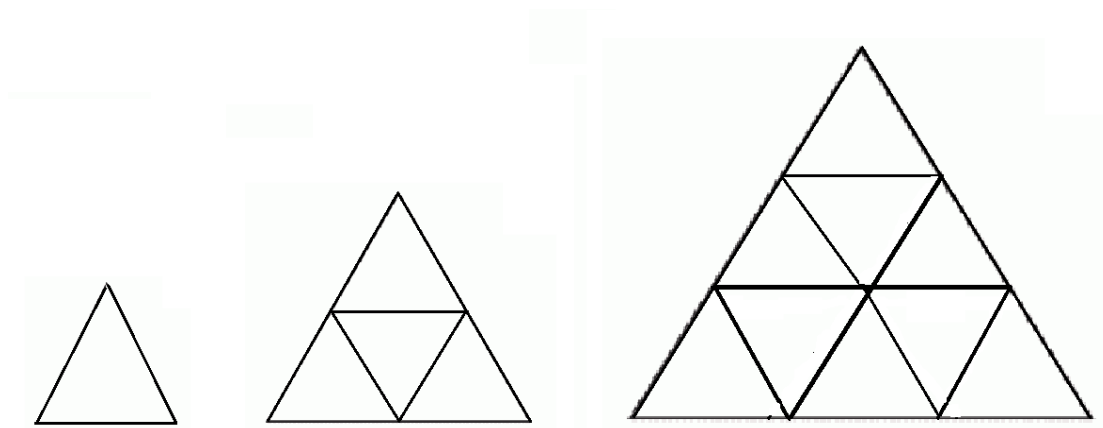
Αφού έχουμε 81 τετραγωνάκια τα άσπρα θα είναι 40.

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 16

Το παρακάτω μοτίβο αποτελείται από ισόπλευρα τρίγωνα που έχουν χωρισθεί σε μικρότερα ισόπλευρα. Πόσα μικρά ισόπλευρα υπάρχουν στο 11^ο βήμα ;

...



- A. 100 B. 121 Γ. 101 Δ. 90

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Β.

Το πρώτο έχει 1, το δεύτερο έχει 4 και το τρίτο 9.

Παρατηρούμε ότι

$$1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9.$$

Αν φτιάξουμε το τέταρτο θα έχει $4^2 = 16$.

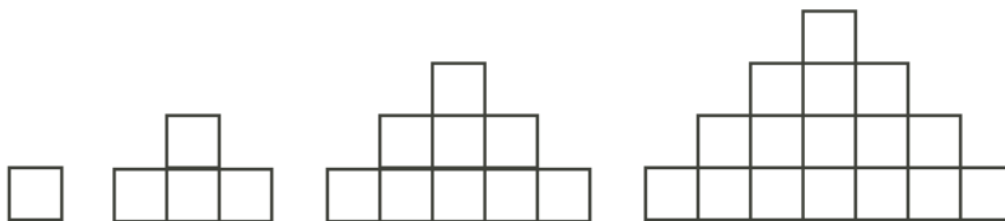
Συμπεραίνουμε ότι τα μικρά ισόπλευρα σε κάθε βήμα είναι το τετράγωνο του βήματος. Άρα στο ενδέκατο θα είναι

$$11^2 = 121$$

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 17

Στο ακόλουθο μοτίβο, πόσα τετράγωνα έχει η 10η πυραμίδα στη σειρά;



Α. 210

Β. 180

Γ. 100

Δ. 140

ΛΥΣΗ.

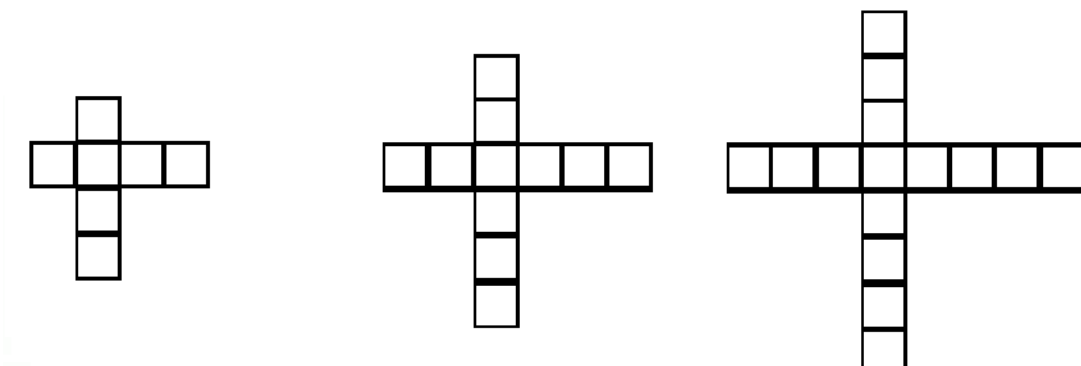
Σωστό το Γ.

- Στο 1° σχήμα έχουμε: 1 τετραγωνάκι
- Στο 2° σχήμα έχουμε: $2^2 = 4$ τετραγωνάκια
- Στο 3° σχήμα έχουμε: $3^2 = 9$ τετραγωνάκια
- Στο 4° σχήμα έχουμε: $4^2 = 16$ τετραγωνάκια
- Άρα, στο 10° σχήμα θα έχουμε: $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$ τετραγωνάκια

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 18

Το παρακάτω μοτίβο αποτελείται από σχήματα που δημιουργούνται από τετράγωνα. Πόσα τετράγωνα έχει το σχήμα στην όγδοη θέση ;



- A. 34 B. 35 Γ. 36 Δ. 37

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Β.

Το κάθε επόμενο σχήμα έχει 4 τετράγωνα παραπάνω από το προηγούμενο.

Το πρώτο έχει 7 τετράγωνα.

Το δεύτερο $7+4$ το τρίτο $7 + 4 + 4 = 7 + 2 \cdot 4$.

Έτσι στην όγδοη θέση θα έχουμε

$$7 + 7 \cdot 4 = 7 + 28 = 35$$

Έξυπνα και Εύκολα!

Θέμα 19

Τα πιο κάτω τρίγωνα σχηματίζουν μοτίβο. Ποιο θα είναι το 15^ο σχήμα του;



Α. μικρό λευκό τρίγωνο

Β. μεγάλο λευκό τρίγωνο

Γ. μικρό γκρι τρίγωνο

Δ. μεγάλο γκρι τρίγωνο

ΛΥΣΗ.

Σωστό το Β.

Το μοτίβο αποτελείται από 6 σχήματα. Για να φθάσουμε στην 15^η θέση έχουμε καλύψει πόσες τέτοιες εξάδες;

Η διαίρεση του 15 με το 6 δίνει πηλίκο 2 και υπόλοιπο 3:

$$15 = 2 \cdot 6 + 3$$

Αυτό σημαίνει ότι για να φθάσουμε στην 15^η θέση, θα έχουμε καλύψει 2 τέτοιες βάδες συν 3 θέσεις ακόμη.

- Οπότε στο τέλος της δεύτερης εξάδας συναντούμε το μεγάλο γκρι τρίγωνο (με τον οποίο κλείνει το μοτίβο).
- Μετά από 3 θέσεις ακόμη το μοτίβο επαναλαμβάνεται, συναντώντας έτσι το τρίτο του σχήμα που είναι το μεγάλο λευκό τρίγωνο.

Έξυπνα και Εύκολα!

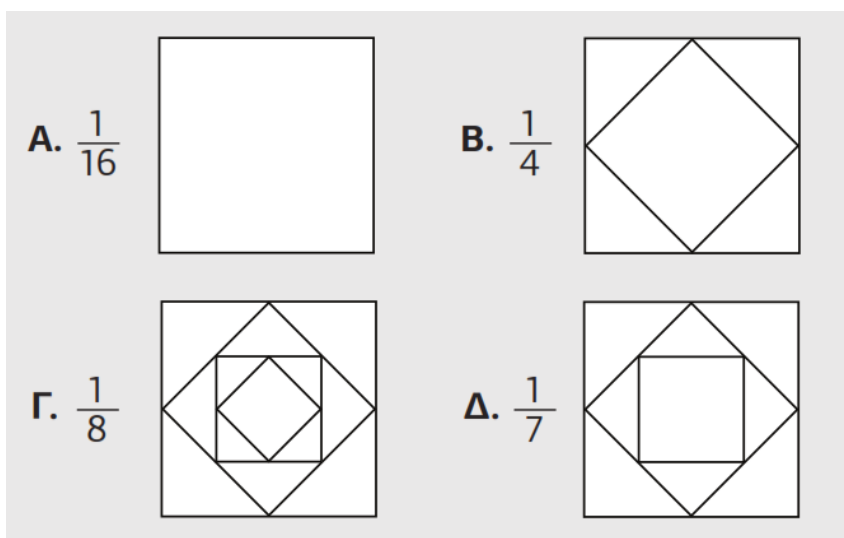
Θέμα 20

Το παρακάτω μοτίβο δημιουργείται ως εξής :

Στο τετράγωνο που είναι μέσα παίρνουμε τα μέσα των πλευρών του και ενώνοντας τα φτιάχνουμε ένα καινούργιο τετράγωνο.

Δίνεται ότι η πλευρά του μικρότερου τετραγώνου στο τρίτο σχήμα είναι η μισή του τετραγώνου στο πρώτο σχήμα.

Αν η πλευρά του πρώτου τετραγώνου είναι 1 τότε η πλευρά του μικρότερου τετραγώνου στο έβδομο σχήμα θα είναι :



ΛΥΣΗ.

Σωστό το Γ

Το μικρότερο τετράγωνο στο τρίτο σχήμα έχει πλευρά $\frac{1}{2}$.

Η πλευρά του μικρότερου τετραγώνου στο πέμπτο σχήμα θα είναι $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Έτσι η πλευρά του μικρότερου τετραγώνου στο έβδομο σχήμα θα είναι $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Έξυπνα και Εύκολα!