

Πρόλογος

Εφαρμόζουμε τον Μαθηματικό Εγγραμματισμό με λεπτομέρεια και ακρίβεια.

- **Οπτικοποιούμε** την Προπαίδεια με **Εικόνες**, για τη μετάβαση από την πρόσθεση στον πολλαπλασιασμό, με την **Αριθμογραμμή**, όπου το λαγουδάκι χτίζει τα πολλαπλάσια κάθε αριθμού, και με τον **Πίνακα Δεκάδων**, όπου, μέσα από την κομψότητα του συστήματος αρίθμησης, παρατηρούμε και κατανοούμε τις συσχετίσεις μεταξύ των πολλαπλασίων, τις συμμετρίες και τα υπέροχα χαλιά των αριθμών.
Στην οπτικοποίηση της Προπαίδειας χρησιμοποιούμε τα χρώματα της **Μεθόδου Cuisenaire** στις Αριθμογραμμές, για την εκμάθηση παιδιών με μαθησιακές απαιτήσεις και δεξιότητες.
- Με **Λογική** συνέχεια μεταβαίνουμε από την πρόσθεση στον πολλαπλασιασμό, στα πολλαπλάσια και στους διαιρέτες. Με τα **Μοτίβα Μάθησης** εστιάζουμε κάθε φορά, με διαφορετικό τρόπο και με συστηματικές επαναλήψεις, στη διαμόρφωση τρόπων και δρόμων σκέψης.
- Μαθαίνουμε την Προπαίδεια των αριθμών σε «οικογένειες» που έχουν μεταξύ τους λογική σύνδεση, όπως τα 2, 4, 8 και τα 3, 6, 9.
- Δίνουμε θέση στον **Λόγο** με την παρατήρηση και παρουσίαση του Πίνακα των Δεκάδων. Επίσης, με τα προβλήματα στα πολλαπλάσια και στους διαιρέτες κάθε αριθμού της Προπαίδειας, συνδέουμε τη Γλώσσα με τα Μαθηματικά.

Το βιβλίο «*Βίβλος Προπαίδειας*» γράφτηκε με το **Μεράκι**, την **Εμπειρία**, την **Υπομονή**, την **Καθαρή Ματιά** και την **Αγάπη** για τα Μαθηματικά... αξίες που μοιραστήκαμε και οι δυο μας για τη δημιουργία του συγκεκριμένου πονήματος.

Χαρά μας να περιορίσουμε την παπαγαλία και να δημιουργήσουμε δρόμους σκέψης φανερούς στα παιδιά μας, πάνω στο υπέροχο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Ευχαριστούμε θερμά τους εκπαιδευτικούς συνεργάτες Σταύρο Παπαδόπουλο και Θεμιστοκλή Καψάλη για την καθοριστική τους συμβολή στην εξέλιξη και τελική διαμόρφωση του βιβλίου μας.

Γιάννης Π. Κρόκος
Βασίλης Κ. Τσιλιθής

Αφιερωμένο στη Νίνα,
στην Αθηνά, στον Παναγιώτη - Ιάσωνα και στην Όλγα
που με οδηγούν στην εξέλιξη της ζωής.

Γιάννης Κρόκος

Αφιερωμένο στην οικογένειά μου
που στηρίζει κάθε μου βήμα
και με εξελίσσει στην καλύτερη εκδοχή του εαυτού μου,
με Πίστη και Υπομονή.

Βασίλης Τσιλιβής

Μαθαίνουμε την Προπαίδεια Έξυπνα και Σωστά

Ομαδοποιούμε την Προπαίδεια, για να γίνονται συσχετισμοί και να χτίζεται η λογική συνέχεια, με γνώμονα τη δόμηση των αριθμών του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

■ Σταθμοί της Προπαίδειας – Οι αριθμοί 0, 1, 5 και 10

Με τους αριθμούς-σταθμούς αρχίζει το όμορφο τραγούδι της Προπαίδειας!

Με το Μηδέν είμαστε αγκαλιά με τον Μηδενόταυρο!

Με το Ένα γυρίζουμε στα ίδια και στα ίδια!

Πέντε-πέντε τις παλάμες μου χαρούμενα μετρώ!

Δέκα-δέκα τα χεράκια μου χτυπώ!

■ Οικογένεια του Δύο (2): Προπαίδεια των 2, 4 και 8

Με το Δύο ανεβαίνουμε δύο-δύο τα σκαλιά! Από την Οικογένεια του Δύο-Δύο, ένα αφήνω ένα πατώ και στα πολλαπλάσια του Τέσσερα περπατώ! Γιατί $2 + 2 = 2 \times 2 = 4$

Από την Προπαίδεια του Τέσσερα, ένα αφήνω ένα πατώ και στα πολλαπλάσια του Οχτώ περπατώ! Γιατί $4 + 4 = 2 \times 4 = 8$

■ Οικογένεια του Τρία (3): Προπαίδεια των 3, 6 και 9

Να 'μαστε στα Πολλαπλάσια του 3! Τρία-τρία ανεβαίνω τα σκαλιά της Αριθμόσκαλας. Παίζω κουτσό, ένα αφήνω ένα πατώ και στα πολλαπλάσια του Έξι περπατώ! Γιατί $3 + 3 = 2 \times 3 = 6$

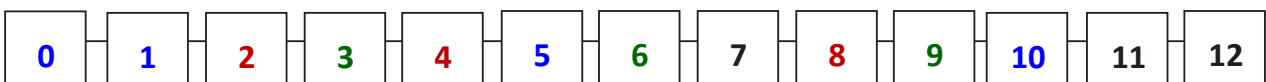
Δύο αφήνω ένα πατώ και στα πολλαπλάσια του Εννιά περπατώ! Γιατί $3 + 3 + 3 = 3 \times 3 = 9$.

■ Επτά Ημέρες... ο Αριθμός του Κυρίου!

Ο Αριθμός... Κύριος που μετρά τον χρόνο εβδομάδα εβδομάδα. Από την Παλαιά Διαθήκη μέχρι τα θαύματα του κόσμου και από τις νότες μέχρι τα χρώματα του ουράνιου τόξου, το ιερό νούμερο 7 βρίσκεται παντού στην καθημερινότητά μας.

■ Προπαίδεια του 11 και 12 – Δημοφιλείς αριθμοί

Κάνουμε το παραπάνω βήμα από τους μονοψήφιους στους διψήφιους, με το δίδυμο 11 που γεννάει κι άλλους διδύμους και με το 12 στο δωδεκάωρο της ημέρας και της νύχτας!















≡ Στον πολλαπλασιασμό είτε είσαι πρώτος είτε δεύτερος είναι το ίδιο!













Στον πολλαπλασιασμό οι αριθμοί έχουν τέτοιο «δέσιμο» μεταξύ τους, που δεν τους ενδιαφέρει ποιος θα μπει πρώτος ή δεύτερος. Μοναδικός τους σκοπός είναι να δίνουν πάντα το ίδιο αποτέλεσμα-γινόμενο!

Σκεφτόμαστε: Ο πολλαπλασιασμός 3×4 είναι το ίδιο με τον 4×3 ;

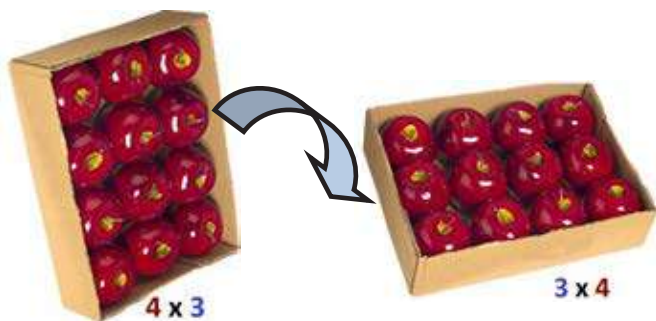
- Στον **Πίνακα 1** έχουμε τοποθετήσει σε καθεμιά από τις **4** γραμμές από **3** μήλα. Δηλαδή, έχουμε συνολικά $4 \times 3 = 12$ μήλα.
- Στον **Πίνακα 2** έχουμε τοποθετήσει σε καθεμιά από τις **3** γραμμές από **4** μήλα. Δηλαδή, έχουμε συνολικά $3 \times 4 = 12$ μήλα.

Πίνακας 1

Πίνακας 2



Το ορθογώνιο 4×3 (Πίνακας 1) είναι σαν τελάρο με 12 μήλα!
Αν στρίψουμε το τελάρο, προκύπτει το ορθογώνιο 3×4 (Πίνακας 2).

Όπως και να 'χουμε το τελάρο, τα μήλα είναι πάντα 12. Έχουμε λοιπόν:

$$4 \times 3 = 3 \times 4 = 12 \text{ μήλα}$$

Η Ιδιότητα του Καθρέφτη

Το γινόμενο 4×3 , καθώς κοιτάζεται στον **καθρέφτη**, βλέπει τον ίδιο του τον εαυτό... το 3×4 !

- $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$
- $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$
- $3 \times 4 = 4 \times 3 = 12$
- $6 \times 2 = 2 \times 6 = 12$

Την ιδιότητα να μην παίζει ρόλο η σειρά στον πολλαπλασιασμό οι Μαθηματικοί την ονομάζουν **αντιμεταθετική**, δηλαδή το ένα νούμερο παίρνει τη θέση του άλλου.

Στο παράδειγμα $4 \times 3 = 3 \times 4$, στη θέση του **4** μπαίνει το **3** και στη θέση του **3** μπαίνει το **4**.



Με αυτήν την ιδιότητα μαθαίνουμε την Προπαίδεια γρήγορα και εύκολα, διότι αν, για παράδειγμα, γνωρίζουμε το $5 \times 8 = 40$, τότε γνωρίζουμε και το $8 \times 5 = 40$. **Συζητήσέ το!**

≡ Ζυγοί ή Άρτιοι Αριθμοί

- Έχουμε **10** ντομάτες. Μπορούμε να τις μοιράσουμε εξίσου σε μία ζυγαριά;
Οι 10 ντομάτες μπορούν να χωριστούν σε δύο ίσα μέρη.
Βάζοντας 5 ντομάτες σε κάθε μέρος, η ζυγαριά ισορροπεί!
Ο αριθμός **10** είναι **ζυγός** ή **άρτιος**.



$$5 + 5 = 2 \times 5 = 10$$

- Έχουμε **8** μπάλες. Μπορούμε να τις μοιράσουμε εξίσου σε μία ζυγαριά;
Οι 8 μπάλες μπορούν να χωριστούν σε δύο ίσα μέρη. Βάζοντας 4 μπάλες στο κάθε μέρος, η ζυγαριά ισορροπεί!
Ο αριθμός **8** είναι **ζυγός** ή **άρτιος**.



$$4 + 4 = 2 \times 4 = 8$$

Ζυγός ή άρτιος είναι ο αριθμός που χωρίζεται σε **δύο ίσα μέρη**, δηλαδή, γράφεται ως άθροισμα **δύο ίδιων αριθμών**.

Παραδείγματα ζυγών αριθμών

Το 2 γράφεται ως άθροισμα δύο μονάδων, δηλαδή $2 = 1 + 1 = 2 \times 1$

Το 4 γράφεται ως άθροισμα δύο ζευγαριών, δηλαδή $4 = 2 + 2 = 2 \times 2$

Το 6 γράφεται ως άθροισμα δύο τριάδων, δηλαδή $6 = 3 + 3 = 2 \times 3$

Το 18 γράφεται ως άθροισμα δύο εννιαριών, δηλαδή $18 = 9 + 9 = 2 \times 9$

Το 20 γράφεται ως άθροισμα δύο δεκάδων, δηλαδή $20 = 10 + 10 = 2 \times 10$

Παρατηρούμε:

Οι ζυγοί ή άρτιοι αριθμοί λήγουν-έχουν Αξία Μονάδων: **0, 2, 4, 6, 8**.

Στις δύο πρώτες δεκάδες, οι ζυγοί αριθμοί είναι:

0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20

Στον Πίνακα Δεκάδων, που θα βρεις στο Παράρτημα του βιβλίου, να ζωγραφίσεις τους ζυγούς ή άρτιους αριθμούς.

≡ Γιατί χρησιμοποιούμε τον Πίνακα Δεκάδων;

Επιλέγουμε τον Πίνακα Δεκάδων για να νιώσουμε τους αριθμούς στο δεκαδικό σύστημα, τις προσθέσεις και τα πολλαπλάσιά τους, με τρόπο άμεσο και φανερό στο μάτι.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1η Δεκάδα
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	2η Δεκάδα
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	3η Δεκάδα
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4η Δεκάδα
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	5η Δεκάδα
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	6η Δεκάδα
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	7η Δεκάδα
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	8η Δεκάδα
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	9η Δεκάδα
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	10η Δεκάδα

Προσέχουμε από πού ξεκινάει και πού τελειώνει η κάθε Δεκάδα.

Π.χ. Η έβδομη δεκάδα αρχίζει από το 61 και ολοκληρώνεται στο $70 = 7 \times 10$.

Η δέκατη όγδοη δεκάδα αρχίζει από το 171 και ολοκληρώνεται στο $180 = 18 \times 10$.

- Οι **Ζυγοί** αριθμοί στον Πίνακα Δεκάδων βρίσκονται στις στήλες με το πράσινο χρώμα. Παρατήρησέ το και διαπίστωσε ότι λήγουν σε: **0, 2, 4, 6, 8**.
- Οι **Μονοί** αριθμοί στον Πίνακα Δεκάδων βρίσκονται στις στήλες με το κίτρινο χρώμα. Παρατήρησέ το και διαπίστωσε ότι λήγουν σε: **1, 3, 5, 7, 9**.

Ο Πίνακας Δεκάδων φανερώνει με απλότητα και ομορφιά το μοτίβο του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης.

Στη συνέχεια θα ανακαλύψουμε οπτικοποιημένες συμμετρίες και συσχετίσεις στην Προπαίδεια!

Προπαίδεια του Μηδενός

x0

Ο Μηδενόταυρος πολλαπλασιάζει και όλα στην κοιλιά του τα βάζει!



Σε **1** άδειο **βάζο** δεν υπάρχει **κανένα** (0) μπισκότο

$$1 \text{ φορά το } 0 \text{ ίσον } 0, 1 \times 0 = 0$$



Σε **2** άδεια **βάζα** δεν υπάρχει **κανένα** (0) μπισκότο

$$2 \text{ φορές το } 0 \text{ ίσον } 0, 0 + 0 = 2 \times 0 = 0$$



Σε **3** άδεια **βάζα** δεν υπάρχει **κανένα** (0) μπισκότο

$$3 \text{ φορές το } 0 \text{ ίσον } 0, 0 + 0 + 0 = 3 \times 0 = 0$$

Όταν έχουμε άδεια βάζα, θα έχουμε ΠΑΝΤΑ κανένα μα κανένα μπισκότο!

Προπαίδεια
του 0

$$1 \times 0 = 0$$

$$2 \times 0 = 0$$

$$3 \times 0 = 0$$

$$4 \times 0 = 0$$

$$5 \times 0 = 0$$

$$6 \times 0 = 0$$

$$7 \times 0 = 0$$

$$8 \times 0 = 0$$

$$9 \times 0 = 0$$

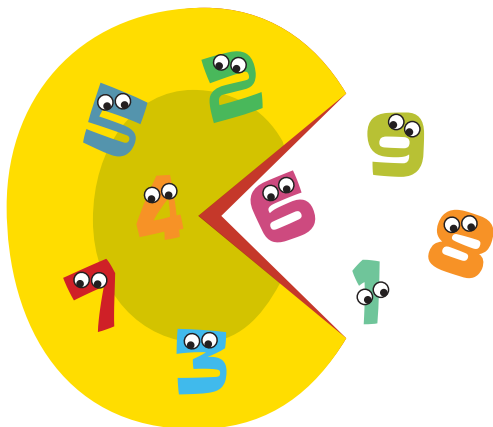
$$10 \times 0 = 0$$

Θυμάμαι: Μηδέν φορές έναν αριθμό δίνει Μηδέν.

$$4 \times 0 = 0, 5 \times 0 = 0, 6 \times 0 = 0$$

$$7 \times 0 = 0, 8 \times 0 = 0, 9 \times 0 = 0$$

Το θηρίο **Μηδενόταυρος** όταν πολλαπλασιάζει τους αριθμούς, τους «καταβροχθίζει», τους τσακίζει και στο τέλος μένει ΜΗΔΕΝ.



Συζητούμε για το Μηδέν

Ο αριθμός Μηδέν εμφανίστηκε στην Ευρώπη πριν από 1.000 χρόνια. Ήρθε στη ζωή μας για να πάρει τη θέση του κενού και να του δώσει την πραγματική του αξία.

Για δες... Πώς το Μηδέν ανεβάζει τη Μονάδα σε Δεκάδα, Εκατοντάδα, Χιλιάδα...;

10, 100, 1.000 ...

Μπορούμε να σκεφτούμε το κενό, τη σιωπή... Τι σημασία έχουν στη ζωή μας;

≡ Η αδυναμία του Μηδενός στον ρόλο του διαιρέτη

Το Μηδέν μπορεί να είναι διαιρέτης;

Το Μηδέν, αν και **πανίσχυρο** ψηφίο που ως πολλαπλασιαστής τα κάνει όλα μηδέν, είναι εντελώς **αδύναμο** και δεν μπορεί να πάρει τον ρόλο του διαιρέτη στην πράξη της διαίρεσης.

3 x 0 = 0 Μπορούμε να κάνουμε τη διαίρεση **3 : 0**;
Όποιο πηλίκο (**π**) και αν έχουμε, το γινόμενο
πηλίκο x διαιρέτης θα είναι **πάντα 0** και όχι ίσο με το
Διαιρετέο **3**. Οπότε, η διαίρεση **3 : 0** ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ!

$$\begin{array}{r|l} 3 & 0 \\ \hline & \pi \end{array}$$

7 x 0 = 0 Μπορούμε να κάνουμε τη διαίρεση **7 : 0**;
Όποιο πηλίκο (**π**) και αν έχουμε, το γινόμενο
πηλίκο x διαιρέτης θα είναι **πάντα 0** και όχι ίσο με το
Διαιρετέο **7**. Οπότε, η διαίρεση **7 : 0** ΔΕΝ ΓΙΝΕΤΑΙ!

$$\begin{array}{r|l} 7 & 0 \\ \hline & \pi \end{array}$$

1. Κατανόηση της Αδυναμίας

Θέλουμε να δώσουμε **10** μήλα σε παιδιά, ώστε
κάθε παιδί να πάρει από μηδέν (**0**) μήλα.
Σε πόσα παιδιά θα μοιράσουμε τα 10 μήλα;

Έχουμε τη διαίρεση **10 : 0**.

Αν σκεφτούμε, θα διαπιστώσουμε ότι δεν
μπορούμε να κάνουμε τη μοιρασιά, ώστε κάθε
παιδί να πάρει από μηδέν (**0**) μήλα.

2. Κατανόηση της Αδυναμίας

Θέλουμε να δώσουμε **10** μήλα σε μηδέν (**0**)
παιδιά.
Από πόσα μήλα θα πάρει κάθε παιδί;
Έχουμε τη διαίρεση **10 : 0**.

Αν σκεφτούμε, θα διαπιστώσουμε ότι η
μοιρασιά σε μηδέν (**0**) παιδιά δεν έχει νόημα
στην πράξη.

Συμπέρασμα

Το Μηδέν **δεν μπορεί** να είναι διαιρέτης στην **πράξη της διαίρεσης**.

Θυμόμαστε την **παντοδυναμία** του Μηδενός (0) στον πολλαπλασιασμό και
την πλήρη **αδυναμία** του (**αποκλεισμός**) να είναι διαιρέτης στην πράξη της διαίρεσης.

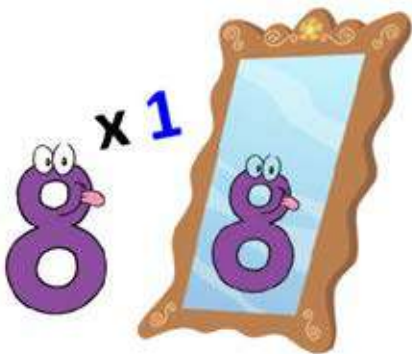
Λέμε «να χωρίσουμε μια σοκολάτα σε 0 μέρη»;
Λέμε «να χωρίσουμε μια πίτσα σε 0 μέρη»;

≡ Στον καθρέφτη του 1 όλοι παραμένουν ίδιοι

Η «κυρία **Μονάδα**», ως πραγματική κυρία, όταν πολλαπλασιάζει τους αριθμούς δεν τους θίγει, δεν τους στενοχωρεί, ούτε τους προσβάλλει. Γι' αυτό και οι αριθμοί παραμένουν ίδιοι όταν πολλαπλασιάζονται μαζί της.

Παράδειγμα:

$$5 \times 1 = 5, \quad 12 \times 1 = 12, \quad 122 \times 1 = 122$$



Ο καθρέφτης του 1!

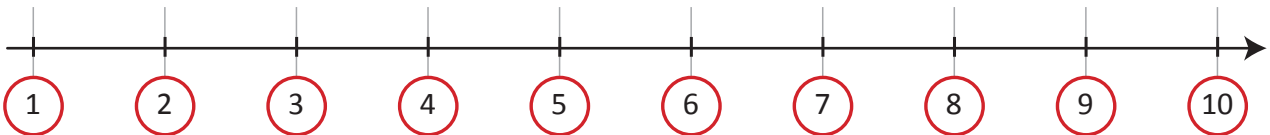
Πολλαπλασιάζοντας έναν αριθμό επί 1, είναι σαν να τον τοποθετούμε μπροστά από έναν καθρέφτη για να δει το είδωλό του.

Βλέπουμε και πάλι τον ίδιο αριθμό!

Για παράδειγμα:

$$8 \times 1 = 8, \quad 18 \times 1 = 18, \quad 578 \times 1 = 578$$

Τα πολλαπλάσια του 1 φτιάχνουν το δικό τους τρενάκι αριθμών:



Τραγουδάμε και λέμε νεράκι την Προπαίδεια του 1!

Μία φορά το Ένα κάνει Ένα... έτοιμος για τη μαθηματική αρένα;

Δύο φορές το Ένα κάνει Δύο... πρώτη μέρα στο σχολείο!

Τρεις φορές το Ένα κάνει Τρία... ποιος θα πει το μάθημα κυρία;

Τέσσερις φορές το Ένα κάνει Τέσσερα...

Πέντε φορές το Ένα κάνει Πέντε...

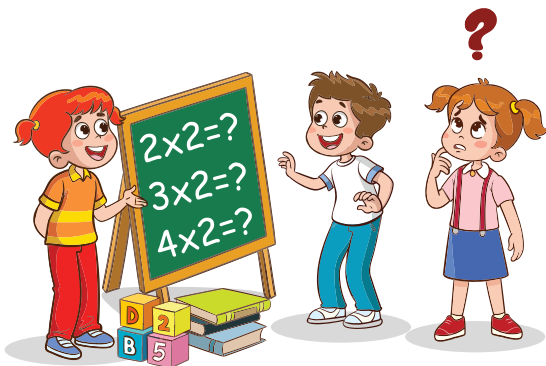
Έξι φορές το Ένα κάνει Έξι,

Εφτά φορές το Ένα... Εφτά!

Οχτώ φορές το Ένα κάνει Οχτώ... γερά στα πόδια μου πατώ!

Εννιά φορές το Ένα κάνει Εννιά και Δέκα φορές το Ένα; Δέκα!





Κεφάλαιο 3

Οικογένεια του 2 Προπαίδια των 2, 4, 8

≡ Ο μαγικός αριθμός 2

Ο αριθμός 2 είναι ο «απόλυτος άρχων» της λογικής μας: μια απόφαση είναι «σωστή» ή «λάθος», μια απάντηση είναι «ναι» ή «όχι», «το φαγητό είναι αλμυρό» ή «δεν είναι αλμυρό». Εξού και η συστηματική του χρήση στην πληροφορική, βασισμένη σε μια λογική ονόματι «δυαδική»: μέσω ηλεκτρονικών κυκλωμάτων, ικανών να βρεθούν σε δύο καταστάσεις, μπορούμε να περιγράψουμε τον κόσμο με εξισώσεις, να μεταφέρουμε, να συλλέξουμε πληροφορίες και να καταλήξουμε σε συμπεράσματα.

≡ Τα Πολλαπλάσια του 2

Στην αριθμογραμμή οι ζυγοί αριθμοί 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 είναι πολλαπλάσια του 2:



≡ Τα Πολλαπλάσια του 4

Πώς μαθαίνουμε την Προπαίδια του 4 εύκολα και γρήγορα;

Από τους 10 ζυγούς αριθμούς στις δύο πρώτες δεκάδες των φυσικών αριθμών, κρατάμε τους 4, 8, 12, 16, 20 που είναι πολλαπλάσια του 4.



≡ Τα Πολλαπλάσια του 8

Πώς μαθαίνουμε την Προπαίδια του 8 εύκολα και γρήγορα;

Από τα 10 πολλαπλάσια του 4 έως το 40, κρατάμε τα 8, 16, 24, 32, 40 που είναι πολλαπλάσια του 8.



Παρατήρησέ τα όλα αυτά στους Πίνακες Δεκάδων της επόμενης σελίδας!

Δύο-Δύο ανεβαίνουμε στον Πίνακα Δεκάδων και έχουμε τα Πολλαπλάσια του 2

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Θυμάμαι: Ο αριθμός 2 έχει διαμαντάκι ∇ και είναι ο μοναδικός ζυγός αριθμός που είναι πρώτος.

Τέσσερα-Τέσσερα ανεβαίνουμε στον Πίνακα Δεκάδων και έχουμε τα Πολλαπλάσια του 4

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Θυμάμαι: Ο αριθμός 4 είναι σύνθετος, γιατί γράφεται ως γινόμενο του εαυτού του και της Μονάδας, $4 \times 1 = 4$, αλλά και $2 \times 2 = 4$. Δηλαδή, γράφεται με δύο τρόπους.

Οχτώ-Οχτώ ανεβαίνουμε στον Πίνακα Δεκάδων και έχουμε τα Πολλαπλάσια του 8

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

Παρατηρώ: Στις 4 πρώτες δεκάδες, τα πολλαπλάσια του 4 είναι 10, ενώ τα πολλαπλάσια του 8 είναι 5 σε πλήθος (τα μισά).

Προπαίδια του Δύο

x2

≡ Γρήγορη Πρόσθεση πολλών δυαριών

Έχουμε $2 + 2 + 2 = 6$, με την πράξη (ενέργεια) της πρόσθεσης

$3 \times 2 = 6$ «3 φορές το 2 ίσον 6», με την πράξη (ενέργεια) του πολλαπλασιασμού

Έχουμε $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$, με την πράξη της πρόσθεσης

$5 \times 2 = 10$ «5 φορές το 2 ίσον 10», με την πράξη του πολλαπλασιασμού

Με την πράξη του πολλαπλασιασμού χτίζουμε την Προπαίδια του Δύο (2).

≡ Κατανοούμε τα πολλαπλάσια του 2

Για να δούμε... Τι γνωρίζουμε ήδη από την «ιδιότητα του Καθρέφτη»-αντιμεταθετική ιδιότητα;

Έχουμε μάθει:	$2 \times 1 = 2$	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 10 = 20$
Είναι γνωστά:	$1 \times 2 = 2$	$5 \times 2 = 10$	$10 \times 2 = 20$

Παρατηρούμε στις εικόνες πώς, από τα αθροίσματα, χτίζεται η Προπαίδια του 2:



$$2 + 2 = 4$$
$$2 \times 2 = 4$$



$$2 + 2 + 2 = 6$$
$$3 \times 2 = 6$$



$$2 + 2 + 2 + 2 = 8$$
$$4 \times 2 = 8$$



$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$
$$6 \times 2 = 12$$



$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16$$
$$8 \times 2 = 16$$



$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14$$
$$7 \times 2 = 14$$



$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 18$$
$$9 \times 2 = 18$$

Προπαίδια
του 2

$$1 \times 2 = 2$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$6 \times 2 = 12$$

$$7 \times 2 = 14$$

$$8 \times 2 = 16$$

$$9 \times 2 = 18$$

$$10 \times 2 = 20$$

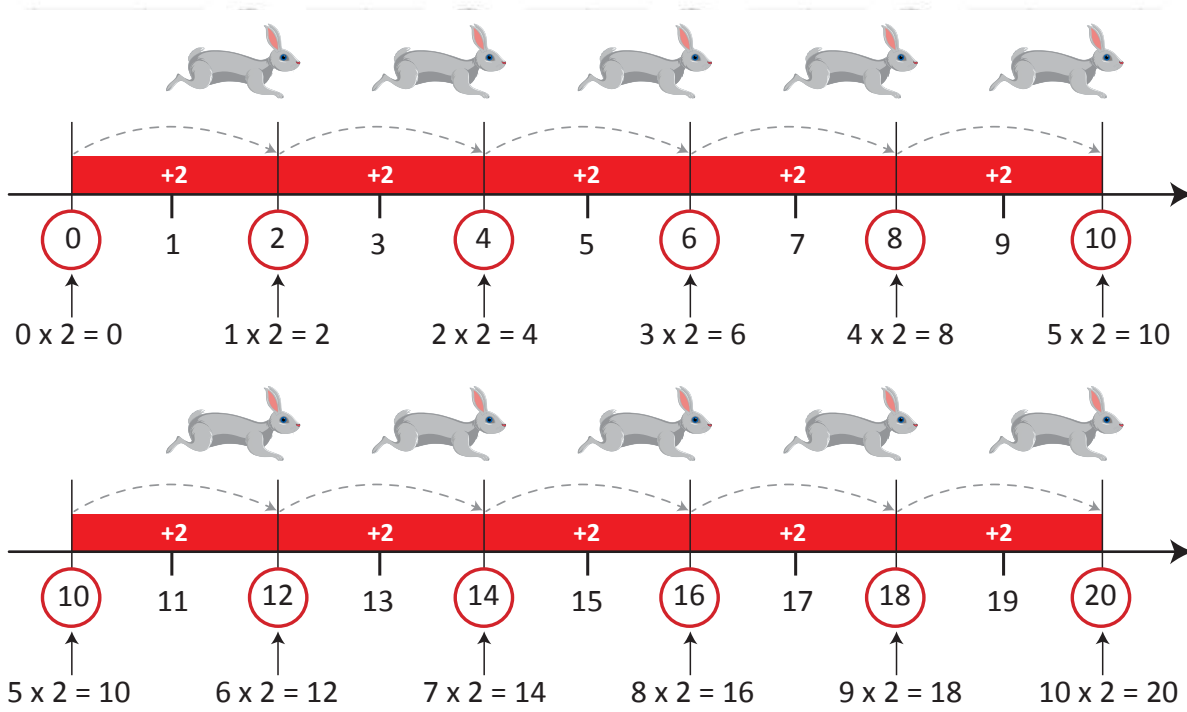
Ανεβαίνουμε δύο-δύο τους αριθμούς και έχουμε:

Δύο, Τέσσερα, Έξι, Οχτώ, Δέκα και έφτασα στα μισά... $5 \times 2 = 10$!

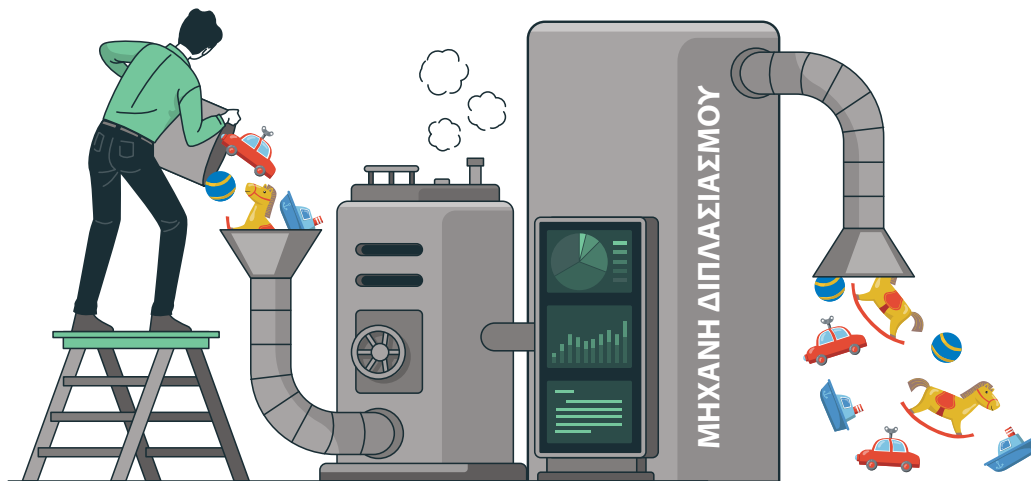
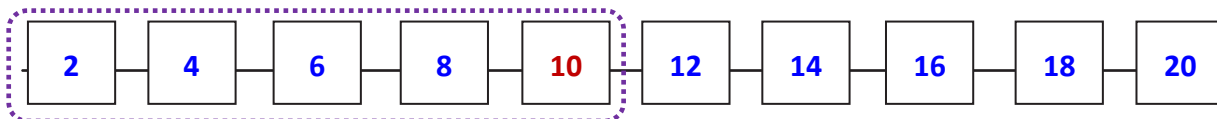
Δώδεκα, Δεκατέσσερα, Δεκαέξι, Δεκαοχτώ, Είκοσι!

≡ Αριθμογραμμή με Πολλαπλάσια του 2

Στην Αριθμογραμμή το λαγουδάκι ξεκινάει από το Μηδέν και τρέχει, με πηδηματάκια, δύο-δύο τα νούμερα πάνω σε αυτήν.



Στην αριθμογραμμή η Προπαίδεια του 2 είναι το μοτίβο των ζυγών αριθμών, δηλαδή, των αριθμών που λήγουν-έχουν αξία Μονάδων: **0, 2, 4, 6** και **8**.



≡ Πίνακας Δεκάδων - Μοτίβα του 2 σε Εικόνα

Το Δύο (2) είναι ο **μοναδικός** πρώτος αριθμός από τους ζυγούς. Είναι **πρώτος αριθμός**, γιατί φτιάχνεται μόνο από τη Μονάδα και τον εαυτόν του: $2 \times 1 = 2$ ή $1 \times 2 = 2$.

Στον Πίνακα Δεκάδων που ακολουθεί, στις στήλες των ζυγών αριθμών δημιουργείται το μοτίβο με τα πολλαπλάσια του 2:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Παρατήρηση 1

Στην 1^η Δεκάδα έχουμε πέντε πολλαπλάσια: **2, 4, 6, 8** και **10**. Με αυτά κλείνει η δεκάδα και ολοκληρώνεται για πρώτη φορά το μοτίβο.

Στη 2^η Δεκάδα έχουμε επανάληψη του μοτίβου με τα επόμενα πέντε πολλαπλάσια

12, 14, 16, 18 και **20**

Παρατήρηση 2

Τα πολλαπλάσια του 2 λήγουν-έχουν αξία Μονάδων: **2, 4, 6, 8, 0**.

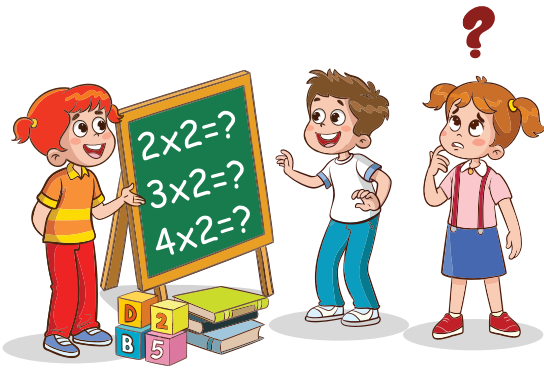
Παρατήρηση 3

Από δεκάδα σε δεκάδα τα αντίστοιχα πολλαπλάσια του 2 διατηρούν **ίδιο το ψηφίο των Μονάδων**.

$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$	$5 \times 2 = 10$
$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$	$8 \times 2 = 16$	$9 \times 2 = 18$	$10 \times 2 = 20$



$$5 \times 2 = 10$$



Κεφάλαιο 4

Οικογένεια του 3 Προπαίδια των 3, 6, 9

≡ Ο αριθμός που εξηγεί τα πάντα στο σύμπαν

Από τα πανάρχαια χρόνια ο αριθμός 3 προσέλκυσε την ιδιαίτερη προσοχή των ανθρώπων. Δεν είναι τυχαίο ότι η μυθολογία, η θρησκεία και η λαογραφία είναι πλημμυρισμένες από τον αριθμό 3. Σκεφτήκατε γιατί τα αρχαία μυστήρια στον συμβολισμό του αριθμού 3 κρύβουν όλη τους την υπόσταση ή γιατί στη θρησκεία μιλούν για την τριαδικότητα του Θεού;

Από μεταφυσική άποψη, σύμφωνα με τις διδασκαλίες των Πυθαγορείων, τρεις είναι οι όψεις ενός όλου: Ενέργεια (μονάδα), Αντίσταση (δυάδα) και κίνηση (τριάδα).

≡ Τα Πολλαπλάσια του 3

Στην αριθμογραμμή οι αριθμοί 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 είναι πολλαπλάσια του 3:



≡ Τα Πολλαπλάσια του 6

Πώς μαθαίνουμε την Προπαίδια του 6 εύκολα και γρήγορα;

Από τα 10 πολλαπλάσια του 3 στις τρεις πρώτες δεκάδες των φυσικών αριθμών κρατάμε τους 6, 12, 18, 24, 30, που είναι πολλαπλάσια του 6.



≡ Τα Πολλαπλάσια του 9

Πώς μαθαίνουμε την Προπαίδια του 9 εύκολα και γρήγορα;

Από τα πολλαπλάσια του 3 έως το 30 κρατάμε τα 9, 18, 27, που είναι πολλαπλάσια του 9.



Παρατήρησέ τα όλα αυτά στους Πίνακες Δεκάδων της επόμενης σελίδας!

Τρία-Τρία ανεβαίνουμε στον Πίνακα Δεκάδων και έχουμε τα Πολλαπλάσια του Τρία

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Θυμάμαι: Ο αριθμός 3 έχει διαμαντάκι ▽, καθώς είναι **πρώτος αριθμός**. Επίσης, το μοτίβο κλείνει στο $10 \times 3 = 30$.

Έξι-Έξι ανεβαίνουμε στον Πίνακα Δεκάδων και έχουμε τα Πολλαπλάσια του Έξι

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Θυμάμαι: Ο αριθμός 6 είναι σύνθετος, γιατί γράφεται ως γινόμενο του εαυτού του και της Μονάδας, $6 \times 1 = 6$ αλλά και $2 \times 3 = 6$, δηλαδή, γράφεται με δύο τρόπους.

Εννιά-Εννιά ανεβαίνουμε στον Πίνακα Δεκάδων και έχουμε τα Πολλαπλάσια του Εννιά

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Παρατηρώ: Μεταβαίνοντας από Δεκάδα σε Δεκάδα, τα πολλαπλάσια του 9 δημιουργούν μια κλίμακα (σκάλα) με το ψηφίο των Μονάδων να γίνεται κατά 1 μικρότερο.

Προπαίδια του Τρία

x3

≡ Τρήγορη Πρόσθεση πολλών τριαριών

Έχουμε $3 + 3 + 3 + 3 = 12$, με την πράξη (ενέργεια) της πρόσθεσης
 $4 \times 3 = 12$ «4 φορές το 3 ίσον 12», με την πράξη (ενέργεια) του πολλαπλασιασμού

Έχουμε $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$, με την πράξη της πρόσθεσης
 $5 \times 3 = 15$ «5 φορές το 3 ίσον 15», με την πράξη του πολλαπλασιασμού

Με την πράξη του πολλαπλασιασμού, χτίζουμε την Προπαίδια του Τρία (3).

≡ Κατανοούμε τα πολλαπλάσια του 3

Για να δούμε... Τι γνωρίζουμε ήδη από την «Ιδιότητα του Καθρέφτη»-αντιμεταθετική ιδιότητα;

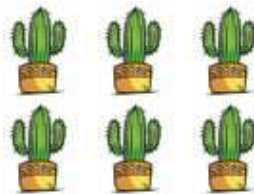
Έχουμε μάθει:	$3 \times 1 = 3$	$3 \times 2 = 6$	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 5 = 15$	$3 \times 8 = 24$	$3 \times 10 = 30$
Είναι γνωστά:	$1 \times 3 = 3$	$2 \times 3 = 6$	$4 \times 3 = 12$	$5 \times 3 = 15$	$8 \times 3 = 24$	$10 \times 3 = 30$

Παρατηρούμε στις εικόνες πώς, από τα αθροίσματα, χτίζεται η Προπαίδια του 3:



$$3 + 3 + 3 = 9$$

$$3 \times 3 = 9$$



$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18$$

$$6 \times 3 = 18$$



$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 21$$

$$7 \times 3 = 21$$



$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27$$

$$9 \times 3 = 27$$

Προπαίδια
του 3

$$1 \times 3 = 3$$

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$4 \times 3 = 12$$

$$5 \times 3 = 15$$

$$6 \times 3 = 18$$

$$7 \times 3 = 21$$

$$8 \times 3 = 24$$

$$9 \times 3 = 27$$

$$10 \times 3 = 30$$

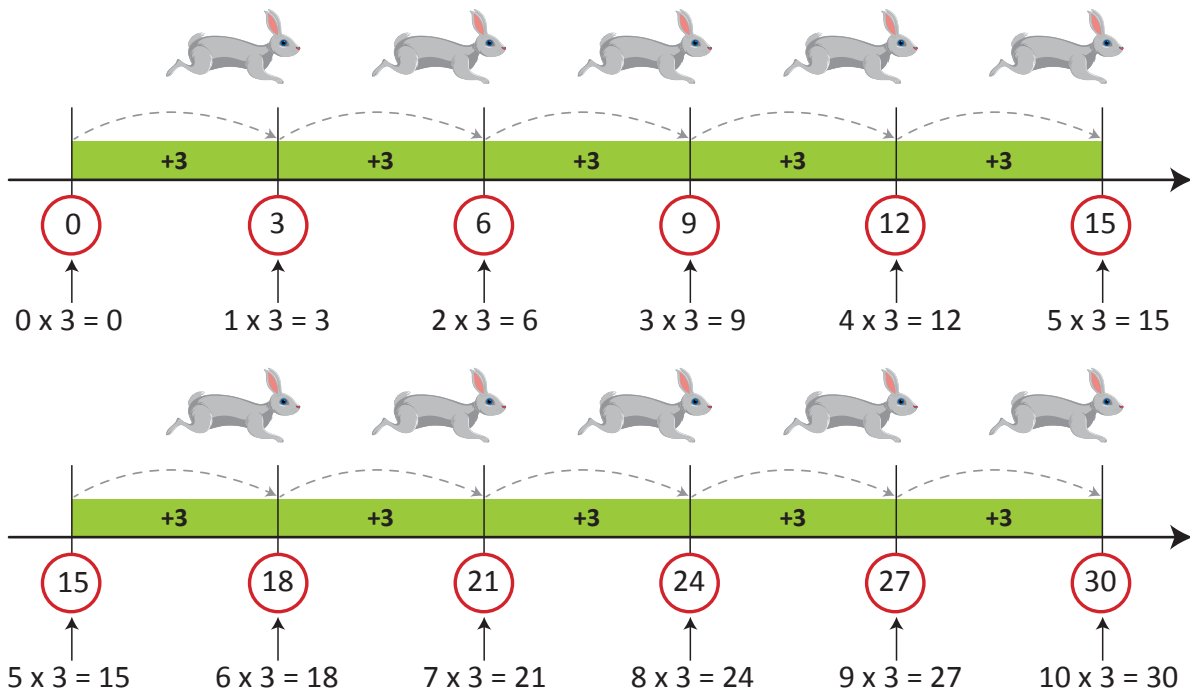
Ανεβαίνουμε τρεις-τρεις τους αριθμούς και έχουμε:

Τρία, Έξι, Εννιά, Δώδεκα, Δεκαπέντε και έφτασα στα μισά... $5 \times 3 = 15$!

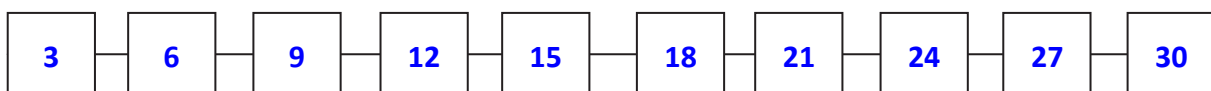
Δεκαοχτώ, Είκοσι ένα, Είκοσι τέσσερα, Είκοσι επτά, Τριάντα!

≡ Αριθμογραμμή με Πολλαπλάσια του 3

Στην Αριθμογραμμή το λαγουδάκι ξεκινάει από το Μηδέν και τρέχει, με πηδηματάκια, τρία-τρία τα νούμερα πάνω σε αυτήν.



Τα πολλαπλάσια του 3 πηγαίνουν στη γραμμή βήμα-βήμα ανά τρία και σχηματίζουν τα αποτελέσματα της Προπαίδειας του 3:



Το μοτίβο της Προπαίδειας του 3 ολοκληρώνεται στο 30 για πρώτη φορά.

Επίσης, τα πολλαπλάσιά του λήγουν και στα δέκα ψηφία με τη σειρά: 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0.

Τα πολλαπλάσια του 3 ανεβαίνουν στη σκάλα των Δεκάδων... τρία-τρία!

3, 6, 9 – 1^η Δεκάδα

12, 15, 18 – 2^η Δεκάδα

21, 24, 27, 30 – 3^η Δεκάδα

≡ Πίνακας Δεκάδων - Μοτίβα του 3 σε Εικόνα

Στον Πίνακα Δεκάδων που ακολουθεί δημιουργείται μοτίβο με τα πολλαπλάσια του 3, καθώς οι αριθμοί ανεβαίνουν βήμα-βήμα ανά 3:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Παρατήρηση 1

Στην 1^η Δεκάδα έχουμε τρία πολλαπλάσια, **3, 6** και **9**, και μένει δεξιά 1 θέση κενή για να κλείσει η δεκάδα.

Στην 2^η Δεκάδα έχουμε τρία πολλαπλάσια, **12, 15** και **18**, και μένουν δεξιά 2 θέσεις κενές για να κλείσει η δεκάδα.

Στην 3^η Δεκάδα έχουμε τέσσερα πολλαπλάσια, **21, 24, 27** και **30**, και κλείνει η δεκάδα.

Παρατήρηση 2

Τα πολλαπλάσια του 3 λήγουν σε όλα τα ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Από τη μία Δεκάδα στην άλλη τα πολλαπλάσια πηγαίνουν μία μονάδα πίσω, γι' αυτό προκύπτει και η όμορφη διαγώνια αλληλουχία, όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα.

Παρατήρηση 3

Αν προσθέσουμε τα ψηφία κάποιων πολλαπλασίων του 3

$$12 \rightarrow 1 + 2 = 3$$

$$15 \rightarrow 1 + 5 = 6$$

$$18 \rightarrow 1 + 8 = 9$$

$$21 \rightarrow 2 + 1 = 3$$

$$24 \rightarrow 2 + 4 = 6$$

$$27 \rightarrow 2 + 7 = 9$$

παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα έχουν **άθροισμα αξίας ψηφίων ίσο με 3 ή 6 ή 9**.

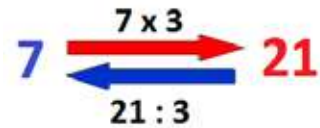
Παρατήρηση 4

Αν πολλαπλασιάσουμε με 3 τους αριθμούς από το 11 έως το 20, το μοτίβο της προπαίδειας του 3 επαναλαμβάνεται από το 30 έως το 60.

≡ Πολλαπλάσια του 3 και οι Διαιρέτες τους

Πώς από τα πολλά (πολλαπλάσια) που γεννάει ο πολλαπλασιασμός, πηγαίνουμε στα λίγα (διαιρέτες) που προκύπτουν από τη διαίρεση-μοιρασιά;

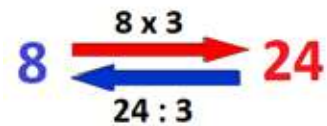
Π.χ. $7 \times 3 = 21$ «πηγαίνω» - πολλαπλασιασμός
το $7 \times 3 = 21$, το **21** είναι πολλαπλάσιο του 3



$21 : 3 = 7$ «γυρίζω» - διαίρεση
από το $21 : 3 = 7$, το **7** είναι διαιρέτης του 21

Μοιράζουμε 21 φωτογραφίες σε 3 φακέλους. Κάθε φάκελος θα περιέχει **7** φωτογραφίες.

Π.χ. $8 \times 3 = 24$ «πηγαίνω» - πολλαπλασιασμός
το $8 \times 3 = 24$, το **24** είναι πολλαπλάσιο του 3



$24 : 3 = 8$ «γυρίζω» - διαίρεση
από το $24 : 3 = 8$, το **8** είναι διαιρέτης του 24

Μοιράζουμε 24 κουλουράκια σε 3 παιδιά. Κάθε παιδί θα πάρει **8** κουλουράκια.

Απολαμβάνουμε την ομορφιά του «πήγαινε' έλα» μεταξύ πολλαπλασιασμού και διαίρεσης:

Από $1 \times 3 = 3$ για τη διαίρεση έχουμε $3 : 3 = 1$

Από $2 \times 3 = 6$ για τη διαίρεση έχουμε $6 : 3 = \square$

Από $3 \times 3 = 9$ για τη διαίρεση έχουμε $9 : 3 = \square$

Από $4 \times 3 = 12$ για τη διαίρεση έχουμε $12 : 3 = \square$

Από $5 \times 3 = 15$ για τη διαίρεση έχουμε $15 : 3 = \square$

Από $6 \times 3 = 18$ για τη διαίρεση έχουμε $18 : 3 = \square$

Από $7 \times 3 = 21$ για τη διαίρεση έχουμε $21 : 3 = \square$

Από $8 \times 3 = 24$ για τη διαίρεση έχουμε $24 : 3 = \square$

Από $9 \times 3 = 27$ για τη διαίρεση έχουμε $27 : 3 = \square$

Από $10 \times 3 = 30$ για τη διαίρεση έχουμε $30 : 3 = \square$

Τώρα που μάθαμε την Προπαίδεια του 3...

μάθαμε και τη διαίρεση με διαιρέτη το 3!

1ο Μοτίβο μάθησης: Γρήγορη Πρόσθεση - Προπαίδεια του 3

Χτίζουμε τα πολλαπλάσια του 3 με γρήγορη πρόσθεση ίδιων αριθμών.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

1. Να συμπληρώσεις τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, όπως στο παράδειγμα:

$2 \times 3 =$ <input style="width: 40px; text-align: center;" type="text" value="6"/>	$3 + 3 =$ <input style="width: 40px; text-align: center;" type="text" value="6"/>
• $3 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $4 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $5 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $6 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $7 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $8 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $9 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
• $10 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>

2. Να συμπληρώσεις τα κενά με τους κατάλληλους αριθμούς, όπως στο παράδειγμα:

3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
---	---	---	----	----	----	----	----	----	----

$0 + 3 =$ <input style="width: 40px; text-align: center;" type="text" value="3"/>	$3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px; text-align: center;" type="text" value="12"/>
$1 \times 3 =$ <input style="width: 40px; text-align: center;" type="text" value="3"/>	$4 \times 3 =$ <input style="width: 40px; text-align: center;" type="text" value="12"/>

3		9	12	15		21	24	27	30
---	--	---	----	----	--	----	----	----	----

$3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>
$2 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>	$6 \times 3 =$ <input style="width: 40px;" type="text"/>

■ 2ο Μοτίβο μάθησης: Αριθμογραμμή στην Προπαίδεια του 3

Ανεβαίνουμε τρεις-τρεις τους αριθμούς πάνω στην αριθμογραμμή χτίζοντας το μοτίβο με τα αποτελέσματα της προπαίδειας του 3.



1. Να συμπληρώσεις τα κενά βάζοντας κάθε φορά τους κατάλληλους αριθμούς:

3	6	9	12		
---	---	---	----	--	--

6	9		15		
---	---	--	----	--	--

9	12		18	21	24	
---	----	--	----	----	----	--

		15				27		33	36
--	--	----	--	--	--	----	--	----	----

3			12	15			24	27	
---	--	--	----	----	--	--	----	----	--

12		18		24		30	33	
----	--	----	--	----	--	----	----	--

3	6		12	15			24		30
---	---	--	----	----	--	--	----	--	----

6			15				27			36	39
---	--	--	----	--	--	--	----	--	--	----	----

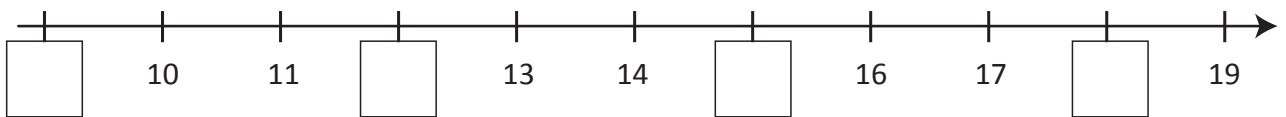
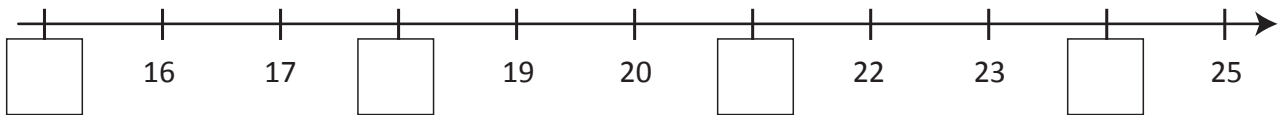
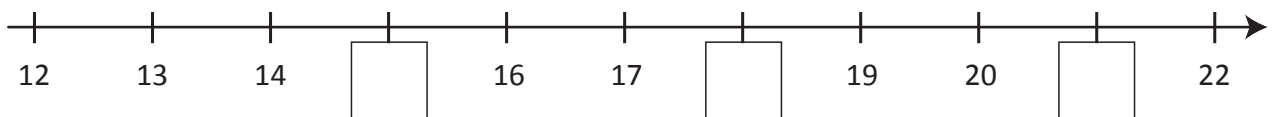
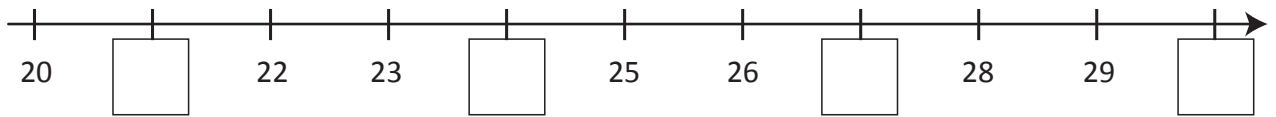
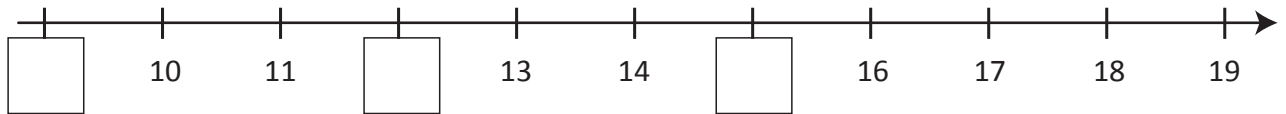
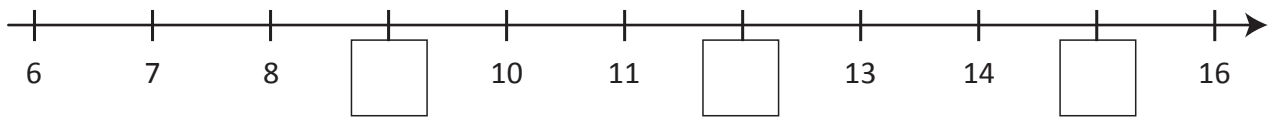
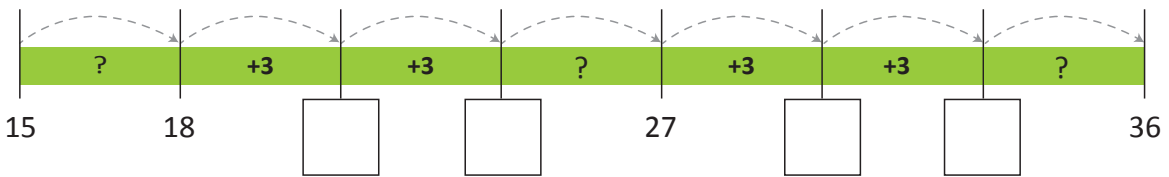
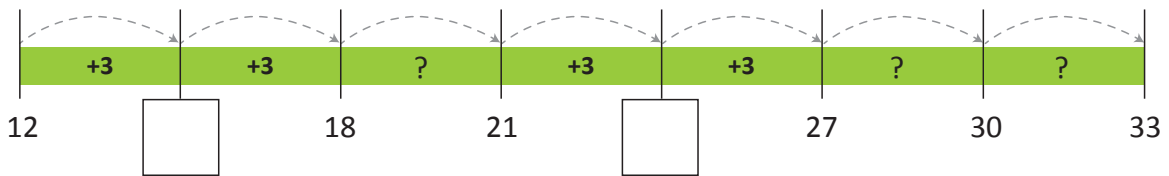
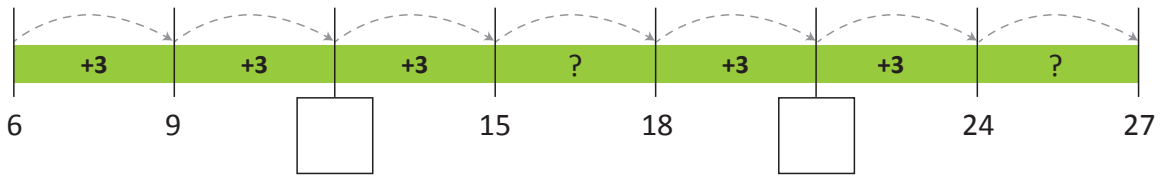
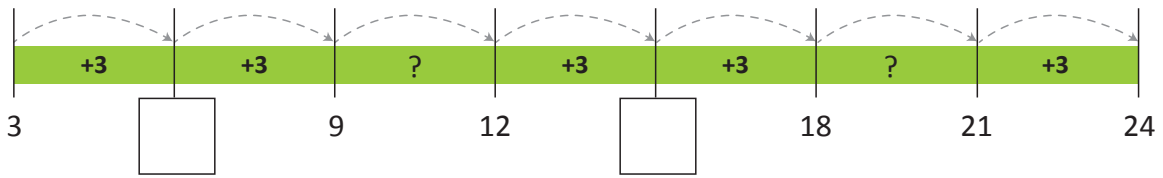
12			21			30
----	--	--	----	--	--	----

3		9		15		21		27	
---	--	---	--	----	--	----	--	----	--

6			15	18			27	
---	--	--	----	----	--	--	----	--

	12		18			27			
--	----	--	----	--	--	----	--	--	--

2. Να συμπληρώσεις τα κενά κουτάκια και τα ερωτηματικά στις αριθμογραμμές:



3ο Μοτίβο μάθησης: Μοτίβα του 3 στον Πίνακα Δεκάδων

Παρατηρούμε διαγώνια τον παρακάτω πίνακα με τις συμμετρίες που διαμορφώνουν τα πολλαπλάσια του 3. Βλέπουμε ότι τα 3, 12 και 21 είναι διαγώνια τοποθετημένα, όπως επίσης τα 6, 15, 24 και τα 9, 18, 27.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

1. Να συμπληρώσεις τα κενά στους παρακάτω πίνακες:

1	2		4	5		7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

$$\square \times 3 = 3$$

$$\square \times 3 = 6$$

11	12	13	14		16	17		19	20
	22	23		25	26	27	28	29	30

$$\square \times 3 = 15$$

$$\square \times \square = 21$$

$$\square \times \square = 18$$

$$\square \times 3 = 24$$

21	22	23	24	25	26		28	29	
31	32		34	35		37	38	39	40

$$\square \times 3 = 27$$

$$\square \times 3 = 30$$

$$\square \times \square = 33$$

$$\square \times \square = 36$$

4ο Μοτίβο μάθησης: Πολλαπλασιάζουμε με το 3 οριζόντια και κάθετα

Μαθαίνουμε να κάνουμε οριζόντιους και κάθετους πολλαπλασιασμούς με το 3.

1. Να πολλαπλασιάσεις τους παρακάτω αριθμούς:

$3 \times 2 = \square$

$3 \times 7 = \square$

$2 \times 3 = \square$

$3 \times 4 = \square$

$3 \times 9 = \square$

$3 \times 10 = \square$

$3 \times 8 = \square$

$3 \times 6 = \square$

$3 \times 4 = \square$

$3 \times 10 = \square$

$3 \times 4 = \square$

$3 \times 1 = \square$

$3 \times 1 = \square$

$3 \times 2 = \square$

$3 \times 6 = \square$

$2 \times 3 = \square$

$3 \times 5 = \square$

$3 \times 8 = \square$

$3 \times 5 = \square$

$3 \times 8 = \square$

$3 \times 5 = \square$

2. Να συμπληρώσεις τα παρακάτω κενά:

$1 \times \square = 3$

$7 \times \square = 21$

$5 \times \square = 15$

$3 \times \square = 24$

$3 \times \square = 18$

$3 \times \square = 27$

$2 \times \square = 6$

$2 \times \square = 6$

$4 \times \square = 12$

$3 \times \square = 15$

$3 \times \square = 27$

$3 \times \square = 18$

$3 \times \square = 9$

$7 \times \square = 21$

3. Να κάνεις τους παρακάτω κάθετους πολλαπλασιασμούς:

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 5 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 9 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 2 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 8 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

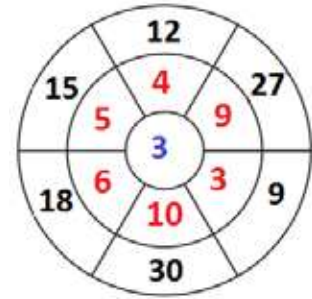
$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 3 \\ \hline \square \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 7 \\ \hline \square \end{array}$$

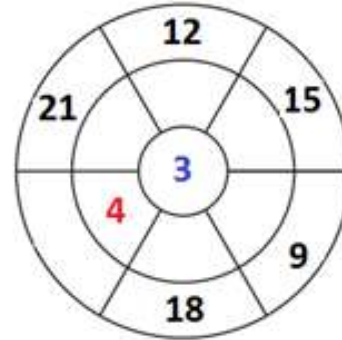
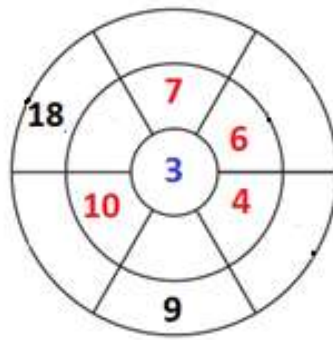
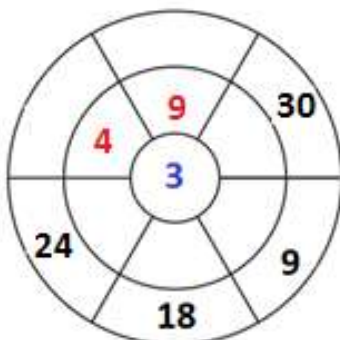
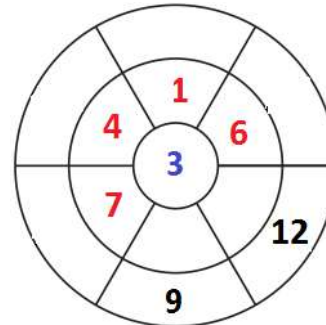
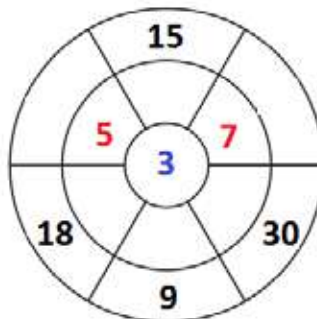
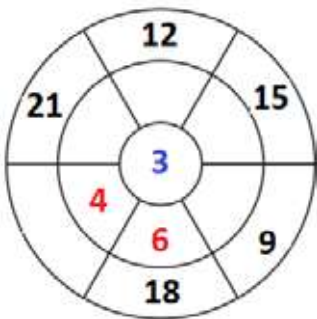
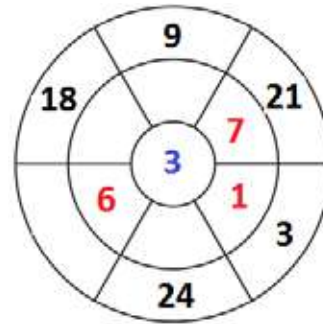
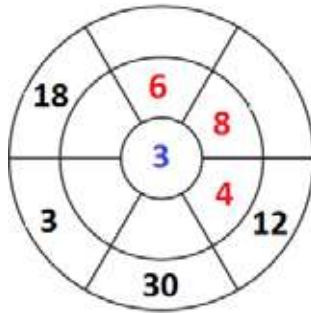
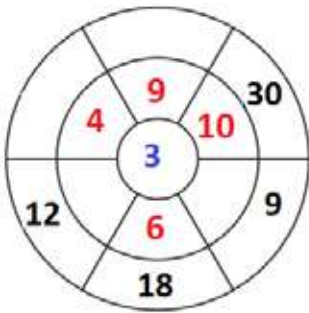
5ο Μοτίβο μάθησης: Αριθμός- Στόχος το 3

Στο κέντρο του κύκλου βρίσκεται ο αριθμός **3**. Με κόκκινο χρώμα βλέπουμε τους αριθμούς με τους οποίους πολλαπλασιάζεται κάθε φορά το **3** (**3, 4, 5, 6, 9, 10**). Με μαύρο χρώμα βλέπουμε τα αποτελέσματα κάθε πολλαπλασιασμού. Δηλαδή:

$$3 \times 3 = 9 \quad 3 \times 4 = 12 \quad 3 \times 5 = 15 \quad 3 \times 6 = 18 \quad 3 \times 9 = 27 \quad 3 \times 10 = 30$$



1. Να συμπληρώσεις τα κενά στους παρακάτω αριθμούς-στόχους:



■ 6ο Μοτίβο μάθησης: Προβλήματα στα πολλαπλάσια του 3

Πρόβλημα 1

Σε κάθε συσκευασία υπάρχουν 3 πακέτα με σοκολάτες.
Πόσα πακέτα σοκολάτες έχουν οι 5 συσκευασίες;

Πρόβλημα 2

Ένα κουτί με μπισκότα κοστίζει 3€. Πόσο κοστίζουν τα 6 κουτιά;

Πρόβλημα 3

Ο Παναγιώτης τρώει 3 αχλάδια την ημέρα. Πόσα τρώει σε 7 ημέρες;

Πρόβλημα 4

Ένα βιολί έχει 4 χορδές. Πόσες χορδές έχουν τα 3 βιολιά;

Πρόβλημα 5

Η Μαρία αγόρασε ένα κουτί πλαστελίνες και έδωσε 3€.
Πόσα ευρώ θα δώσει για 9 κουτιά πλαστελίνες;

Πρόβλημα 6

Σε ένα ασανσέρ χωράνε 3 άνθρωποι. Πόσοι άνθρωποι χωράνε σε 5 ασανσέρ;

Πρόβλημα 7

Ένας ελέφαντας έχει 4 πόδια. Πόσα πόδια έχουν οι 3 ελέφαντες;

Πρόβλημα 8

Το ένα κουτί γάλα κοστίζει 3€. Πόσο κοστίζουν τα 8 κουτιά γάλα;

Πρόβλημα 9

Ο Θανάσης στους σχολικούς αγώνες έβαλε 7 τρίποντα καλάθια.
Πόσους πόντους έβαλε συνολικά;

Πρόβλημα 10

Η Μαρία αγόρασε μία τσάντα και έδωσε 3 χαρτονομίσματα των 5€.
Πόσο κόστιζε η τσάντα;

Πρόβλημα 11

Ένα παγωτό κοστίζει 3€. Πόσο κοστίζουν τα 9 παγωτά;

Πρόβλημα 12

Το εισιτήριο στο θέατρο κοστίζει 8€ για κάθε άτομο.
Πόσα χρήματα θα δώσουν συνολικά, εάν πάνε η μητέρα μου, ο πατέρας μου και ο θείος μου;

■ 7ο Μοτίβο μάθησης: Προβλήματα με διαιρέτη το 3

Πρόβλημα 1

Η Ιουλία έχει 9 τριαντάφυλλα και θέλει να τα μοιράσει σε 3 γλάστρες.
Πόσα τριαντάφυλλα θα βάλει σε κάθε γλάστρα;

Πρόβλημα 2

Ο Μανώλης έχει 18 μπαλόνια και θέλει να τα μοιράσει στους 3 φίλους του δίκαια.
Πόσα μπαλόνια θα πάρει κάθε φίλος του;

Πρόβλημα 3

Η Μαρίνα καταναλώνει μέσα σε 3 ημέρες 15 λίτρα γάλα.
Πόσα λίτρα γάλακτος καταναλώνει κάθε ημέρα;

Πρόβλημα 4

Αγοράσαμε ντομάτες από το σούπερ μάρκετ. Για 3 κιλά πληρώσαμε 12€.
Πόσο κόστισε κάθε κιλό ντομάτες;

Πρόβλημα 5

Ο κ. Δημήτρης έχει 21 σοκολατάκια και θέλει να τα μοιράσει στα εγγονάκια του, ώστε καθένα να πάρει από 3 σοκολατάκια. Πόσα εγγονάκια έχει ο κ. Δημήτρης;

Πρόβλημα 6

Ο δάσκαλος του σχολείου μου θέλει να παρατάξει 18 μαθητές σε τριάδες. Πόσες τέτοιες τριάδες μπορεί να φτιάξει, παρατάσσοντας τους μαθητές του σχολείου;

Πρόβλημα 7

Η κ. Κωνσταντίνα έχει 24 πακέτα ζάχαρη και θέλει να τα συσκευάσει σε κούτες για να τις μοιράσει στα άπορα παιδάκια της γειτονιάς. Αν κάθε κούτα περιέχει 3 πακέτα ζάχαρη, σε πόσα παιδιά θα μοιραστεί η ζάχαρη;

Πρόβλημα 8

Η Μαρίνα έχει στο γραφείο της 9 σημειωματάρια τα οποία αγόρασε συνολικά στην τιμή των 27€.
Πόσα ευρώ κόστιζε κάθε σημειωματάριο;

Πρόβλημα 9

Οι 3 θεατές ενός θεάτρου, για να παρακολουθήσουν μία παράσταση, έκοψαν εισιτήρια με συνολική αξία 21€. Πόσα ευρώ κόστιζε κάθε εισιτήριο;

Γίνε Ξεφτέρη στην Προπαίδεια!
Επιπλέον Εξάσκηση και Εμπέδωση στο



Προπαίδια του Επτά



≡ Γρήγορη Πρόσθεση πολλών επταριών

Έχουμε $7 + 7 + 7 = 21$, με την πράξη (ενέργεια) της πρόσθεσης
 $3 \times 7 = 21$ «3 φορές το 7 ίσον 21», με την πράξη (ενέργεια) του πολλαπλασιασμού

Έχουμε $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$, με την πράξη της πρόσθεσης
 $5 \times 7 = 35$ «5 φορές το 7 ίσον 35», με την πράξη του πολλαπλασιασμού

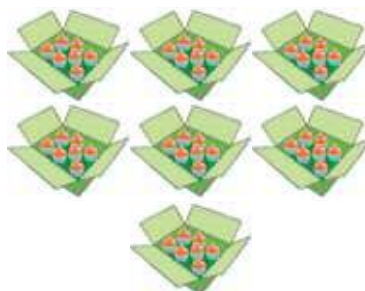
≡ Κατανοούμε τα πολλαπλάσια του 7

Για να δούμε... Τι γνωρίζουμε ήδη από την «ιδιότητα του Καθρέφτη»-αντιμεταθετική ιδιότητα;

$7 \times 1 = 7$	$7 \times 2 = 14$	$7 \times 3 = 21$	$7 \times 4 = 28$	$7 \times 5 = 35$	$7 \times 6 = 42$	$7 \times 8 = 56$	$7 \times 9 = 63$	$7 \times 10 = 70$
$1 \times 7 = 7$	$2 \times 7 = 14$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$	$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$	$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$	$10 \times 7 = 70$

Τα ξέρουμε σχεδόν
ΟΛΑ!

Μόνο 1 γινόμενο
έχει μείνει να
μάθουμε:



$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 49$$
$$7 \times 7 = 49$$

Προπαίδια
του 7

$1 \times 7 = 7$

$2 \times 7 = 14$

$3 \times 7 = 21$

$4 \times 7 = 28$

$5 \times 7 = 35$

$6 \times 7 = 42$

$7 \times 7 = 49$

$8 \times 7 = 56$

$9 \times 7 = 63$

$10 \times 7 = 70$

Παρατηρούμε πώς, από το άθροισμα των γλυκών στα 7 κουτιά,
χτίζεται το $7 \times 7 = 49$.

Μήπως το Βουνό της Προπαίδειας είναι πολύ
πιο μικρό και πιο εύκολο τώρα;

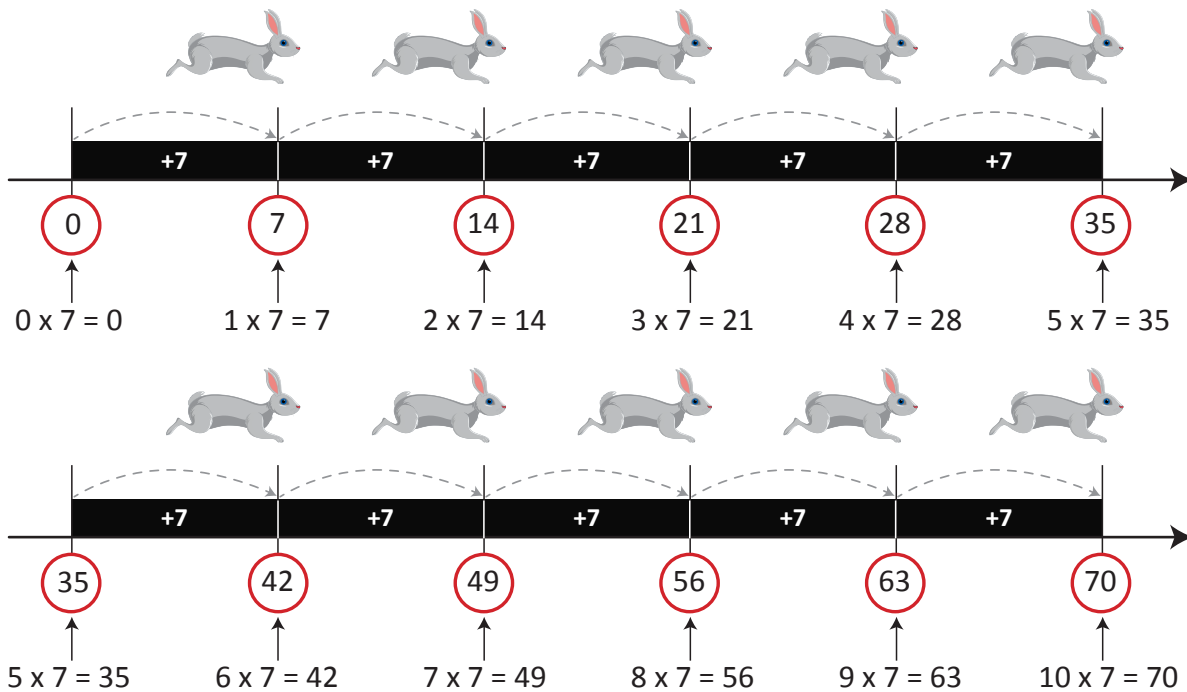
Ανεβαίνουμε επτά-επτά τους αριθμούς και έχουμε:

Επτά, Δεκατέσσερα, Είκοσι ένα, Είκοσι οχτώ, Τριάντα πέντε και έφτασα στα μισά... $5 \times 7 = 35!$

Σαράντα δύο, Σαράντα εννιά, Πενήντα έξι, Εξήντα τρία, Εβδομήντα!

≡ Αριθμογραμμή με Πολλαπλάσια του 7

Στην Αριθμογραμμή το λαγουδάκι ξεκινάει από το Μηδέν και τρέχει, με πηδηματάκια, επτά-επτά τα νούμερα πάνω σε αυτήν.



Τα πολλαπλάσια του 7 σχηματίζουν το **ένα και μοναδικό** μοτίβο των αριθμών που ανεβαίνουν επτά-επτά τη σκάλα των αριθμών, αφού ολοκληρώνεται στο $10 \times 7 = 70$.



Πώς από την Προπαίδεια του 2 και του 5 πηγαίνουμε στην Προπαίδεια του 7;

Το 7 γράφεται ως $7 = 2 + 5$, οπότε αξιοποιούμε την Προπαίδεια του 2 και του 5 για να δημιουργήσουμε την Προπαίδεια του 7. Δηλαδή:

Από $1 \times 2 = 2$	και $1 \times 5 = 5$	με πρόσθεση έχουμε $2 + 5 = 7$	ή $1 \times 7 = 7$
Από $2 \times 2 = 4$	και $2 \times 5 = 10$	με πρόσθεση έχουμε $4 + 10 = 14$	ή $2 \times 7 = 14$
Από $3 \times 2 = 6$	και $3 \times 5 = 15$	με πρόσθεση έχουμε $6 + 15 = 21$	ή $3 \times 7 = 21$
Από $4 \times 2 = 8$	και $4 \times 5 = 20$	με πρόσθεση έχουμε $8 + 20 = 28$	ή $4 \times 7 = 28$
Από $5 \times 2 = 10$	και $5 \times 5 = 25$	με πρόσθεση έχουμε $10 + 25 = 35$	ή $5 \times 7 = 35$

≡ Πίνακας Δεκάδων - Μοτίβα του 7 σε Εικόνα

Ο αριθμός Επτά (7) είναι πρώτος αριθμός, γιατί γράφεται **μόνο** ως γινόμενο του εαυτού του και της Μονάδας, $7 \times 1 = 7$ ή $1 \times 7 = 7$. Στον Πίνακα Δεκάδων παρατηρούμε τα πολλαπλάσια του 7.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70

Παρατήρηση 1

Παρατηρούμε στον Πίνακα Δεκάδων ότι, από το 7 για να πάμε στο 10, χρειαζόμαστε ακόμη 3 Μονάδες. Γι' αυτό στη Δεκάδα, τα πολλαπλάσια του 7 υποχωρούν κατά 3 μονάδες. Δηλαδή:

1 ^η Δεκάδα: $10 - 3 = 7$	5 ^η Δεκάδα: $45 - 3 = 42$
2 ^η Δεκάδα: $17 - 3 = 14$	6 ^η Δεκάδα: $52 - 3 = 49$
3 ^η Δεκάδα: $24 - 3 = 21$	6 ^η Δεκάδα: $59 - 3 = 56$
4 ^η Δεκάδα: $31 - 3 = 28$	7 ^η Δεκάδα: $66 - 3 = 63$
4 ^η Δεκάδα: $38 - 3 = 35$	8 ^η Δεκάδα: $73 - 3 = 70$

Παρατήρηση 2

Ο Επτά (7) είναι ο μεγαλύτερος πρώτος αριθμός στην πρώτη δεκάδα των φυσικών αριθμών. Βλέπουμε στον Πίνακα Δεκάδων ότι το μοτίβο των πολλαπλασίων του σταματάει σε μία πλήρη δεκάδα: $70 = 10 \times 7$. Η επανάληψη του μοτίβου γίνεται ανά 70 Μονάδες.