6

Εξισώσεις

› Σε πολλά προβλήματα ζητείται να υπολογίσουμε ένα μέγεθος.

π.χ. «Αν στο διπλάσιο ενός αριθμού προσθέσουμε 12, τότε βρίσκουμε το τριπλάσιο του αριθμού αυτού. Ποιος είναι αυτός ο αριθμός;»

Τέτοιου είδους προβλήματα λύνονται και με τη χρήση εξισώσεων. Στο παραπάνω παράδειγμα, αν ονομάσουμε με x τον αριθμό, τότε τα δεδομένα του προβλήματος μας δίνουν ότι:

$$2x + 12 = 3x$$

Η τελευταία σχέση είναι μία **εξίσωση με άγνωστο το x**.

Να σημειώσουμε ότι πολλές φορές αντί για x, χρησιμοποιούμε για τον άγνωστο ένα άλλο γράμμα της ελληνικής γλώσσας. Αυτό συμβαίνει όταν τον άγνωστο μάς τον δίνουν με άλλο σύμβολο.

π.χ. «Ποιος είναι ο αριθμός α, ώστε στα δύο κουτιά να έχουμε το ίδιο άθροισμα»;

Εδώ, η εξίσωση που σχηματίζεται είναι η:

$$\alpha + 5 = 8 + 4$$

και άγνωστος είναι το α.

Αντίστροφος αριθμού

Ο αντίστροφος ενός αριθμού είναι ένας άλλος αριθμός τέτοιος ώστε το γινόμενό του με τον αρχικό αριθμό, να ισούται με 1. Δηλαδή, ο αντίστροφος του αριθμού α είναι ο αριθμός x, ώστε:

$$\alpha \cdot x = 1$$

Πρόσεξε ότι στην σχέση $\alpha \cdot x = 1$ το α είναι γνωστός αριθμός, ενώ το x είναι ο άγνωστος.

Η λύση της εξίσωσης $\alpha \cdot x = 1$, είναι η: $x = \frac{1}{\alpha}$.

π.χ. Ο αντίστροφος του $\frac{4}{3}$, *είναι ο:* $\dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{1}{1}}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$

Θυμήσου: Επειδή το 1/0 δεν ορίζεται, το 0 είναι ο **μοναδικός** αριθμός που δεν έχει αντίστροφο.

Παρακάτω συγκεντρώνουμε κάποιες βασικές εξισώσεις με έναν άγνωστο στις οποίες βρίσκουμε τη λύση εύκολα και γρήγορα:

Εξίσωση	Ενέργεια	Λύση
1) $x + \alpha = \beta$	$x + \alpha - \alpha = \beta - \alpha$ *Αφαιρούμε το α και από τα δύο μέλη*	$x = \beta - \alpha$
2) $x - \alpha = \beta$	$x - \alpha + \alpha = \beta + \alpha$ *Προσθέτουμε το α και στα δύο μέλη*	$x = \beta + \alpha$
3) $\alpha - x = \beta$	$\alpha - x + x = \beta + x$ *Προσθέτουμε το x και στα δύο μέλη, οπότε έχουμε β + x = α (περίπτωση 1)*	$x = \alpha - \beta$
4) $\alpha \cdot x = \beta$	$\frac{\alpha \cdot x}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$ *Διαιρούμε με το **α** και τα δύο μέλη*	$x = \beta : \alpha$
5) $x : \alpha = \beta$	$\left(\frac{x}{\alpha}\right) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha$ *Πολλαπλασιάζουμε με το **α** και τα δύο μέλη*	$x = \beta \cdot \alpha$
6) $\alpha : x = \beta$	$\frac{\alpha}{x} = \beta$ άρα $\beta \cdot x = \alpha$ *Κάνουμε χιαστί και προκύπτει η περίπτωση 4*	$x = \alpha : \beta$

Στον παραπάνω πίνακα, χρησιμοποιήσαμε το γράμμα **x** για να δηλώσουμε τον άγνωστο της εξίσωσης και τα γράμματα **α** και **β** για να δηλώσουμε τους γνωστούς, όπως φαίνεται και στα επόμενα παραδείγματα:

6

Παραδείγματα:

Εξίσωση	Ενέργεια	Λύση
1) x + 3 = 14	$x + 3 - 3 = 14 - 3$ *Αφαιρούμε το **3** και από τα δύο μέλη*	**x = 14 – 3 = 11**
2) x – 6 = 20	$x - 6 + 6 = 20 + 6$ *Προσθέτουμε το 6 και στα δύο μέλη*	**x =20 + 6 =26**
3) 7,5 – x = 4,1	$7{,}5 - x + x = 4{,}1 + x$ *Προσθέτουμε το **x** και στα δύο μέλη, οπότε έχουμε 4,1 + x = 7,5 (περίπτωση 1)*	**x = 7,5 – 4,1 = 3,4**
4) 4 • x = 3	$\frac{4 \cdot x}{4} = \frac{3}{4}$ *Διαιρούμε με το **4** και τα δύο μέλη*	**x = 3 : 4 =** $\frac{3}{4}$
5) x: 2 = 10	$\left(\frac{x}{2}\right) \cdot 2 = 10 \cdot 2$ *Πολλαπλασιάζουμε με το **2** και τα δύο μέλη*	**x = 10 • 2 =20**
6) 11: x = 7	$\frac{11}{x} = 7$ άρα $7 \cdot x = 11$ *Κάνουμε χιαστί και προκύπτει η περίπτωση 4*	**x = 11 : 7 =** $\frac{11}{7}$

Να σημειώσουμε ότι εάν υπάρχουν μεικτές αριθμητικές παραστάσεις, τότε λειτουργούμε σύμφωνα με τον Κανόνα Προτεραιότητας των Πράξεων.

ΣΧΟΛΙΟ

1. $+\alpha - \alpha = 0$ π.χ. $+5 - 5 = 0$, $+30 - 30 = 0$, $+7 - 7 = 0$

   $+x - x = 0$

   $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1$ π.χ. $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$, $6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

2. Είτε γράψουμε $\alpha = \beta + x$ ή $\beta + x = \alpha$ είναι το ίδιο.
3. Σε μία ισότητα Α = Β, μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμό με τον ΙΔΙΟ αριθμό και στα δύο μέλη της ισότητας χωρίς να «διαταραχθεί» η ισορροπία. Εξαιρείται το μηδέν στη διαίρεση.

Θέματα Εξετάσεων & Προσομοιώσεις

6

6.1. Ζυγαριές

ΘΕΜΑ 1

Στο διπλανό σχήμα η ζυγαριά ισορροπεί. Αν το βάρος της πράσινης μπάλας είναι 300 γραμμάρια, πόσο είναι το βάρος της κόκκινης μπάλας;

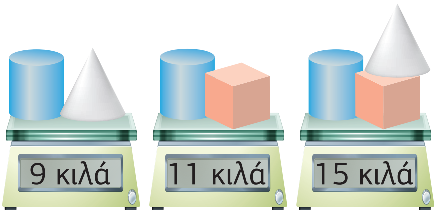
ΘΕΜΑ 2

Δίπλα φαίνονται τα αποτελέσματα τριών ζυγίσεων. Να βρεις πόσα κιλά ζυγίζει το κάθε αντικείμενο:

κύλινδρος: ______________________

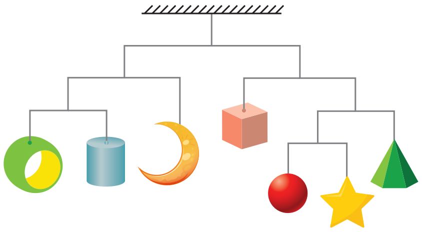
κύβος: ______________________

κώνος: ______________________



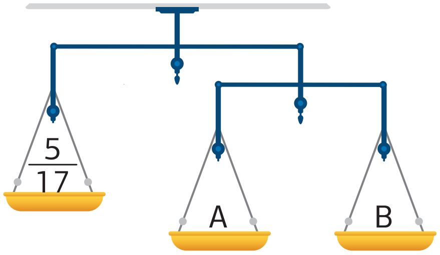
ΘΕΜΑ 3

Το κρεμαστό αντικείμενο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, βρίσκεται σε ισορροπία. Το βάρος του σπάγκου και οι οριζόντιες ράβδοι δε λαμβάνονται υπόψη στο συνολικό βάρος. Το συνολικό του βάρος είναι 112 γραμμάρια. Πόσο ζυγίζει το αστέρι;



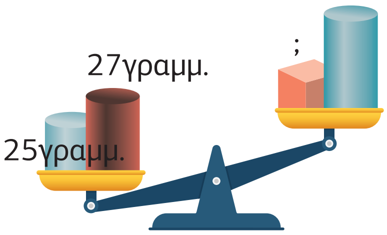
ΘΕΜΑ 4

Στο αριστερό μέρος της κεντρικής ράβδου ενός πολύζυγου έχει τοποθετηθεί ένα βάρος ίσο με τα 5/17 του κιλού. Στο δεξιό μέρος είναι τοποθετημένος άλλος ένας ζυγός με δύο βάρη, αριστερά Α και δεξιά Β. Τι μέρη του κιλού πρέπει να είναι τα βάρη Α και Β ώστε να ισορροπούν και οι δύο ζυγοί;



ΘΕΜΑ 5

Παρατήρησε προσεκτικά τη διπλανή ζυγαριά. Το βάρος του κύβου είναι μικρότερο, μεγαλύτερο ή ίσο με 22 γραμμάρια;



Ανάλογα Ποσά

› **Ανάλογα** ονομάζονται δύο **ποσά** που, όταν το ένα ποσό πολλαπλασιαστεί με έναν αριθμό, τότε συμβαίνει το ίδιο και στο άλλο ποσό. Το ίδιο ισχύει και με τη διαίρεση. Έχουμε δηλαδή ζευγάρια ανάλογων ποσών με **σταθερό λόγο**. Για παράδειγμα, ανάλογα ποσά είναι:

- η απόσταση που διανύει ένα σώμα και η ταχύτητά του, στον ίδιο χρόνο
- η αξία σε Ευρώ και η ποσότητα ψωμιού (σε κιλά) που αγοράζουμε
- το μήκος ενός υφάσματος και η χρηματική του αξία

Ο **λόγος** των αντίστοιχων τιμών δύο ανάλογων ποσών είναι **σταθερός**.

π.χ. Το 1 κιλό κεράσια κοστίζει 2 €, τα 2 κιλά κεράσια κοστίζουν 2 • 2 = 4 €, τα 3 κιλά κεράσια κοστίζουν 3 • 2 = 6 € κ.λπ. Η διπλάσια ποσότητα έχει διπλάσια τιμή, η τριπλάσια ποσότητα έχει τριπλάσια τιμή κ.λπ.

	1 κιλό κεράσια	→	**2** € κόστος
• 2	**2** κιλά κεράσια	→	**4** € κόστος (επί **2**)
• 3	**3** κιλά κεράσια	→	**6** € κόστος (επί **3**)
• 4	**4** κιλά κεράσια	→	**8** € κόστος (επί **4**)

Προκύπτει η αναλογία: $\frac{\text{κιλά}}{\text{τιμή}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

Τα ποσά «*κιλά κεράσια*» και «*κόστος*» είναι ανάλογα, με σταθερό λόγο το 0,5.

Αναλογία

› Όταν έχουμε δύο λόγους ίσους μεταξύ τους, λέμε ότι έχουμε μία **αναλογία**. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τους δύο όρους ενός κλάσματος με τον ίδιο αριθμό, το νέο κλάσμα που προκύπτει είναι ίσο με το αρχικό και έτσι σχηματίζουμε μία αναλογία.

π.χ. Οι λόγοι $\frac{3}{4}$ και $\frac{15}{20}$ σχηματίζουν αναλογία, διότι $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{15}{20}$

Κανόνας «χιαστί»

› **Κανόνας «χιαστί»:** Είναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, όταν $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

π.χ. Είναι $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, διότι $3 \cdot 20 = 12 \cdot 5 = 60$

7

ΑΣΚΗΣΗ

Σε μία εταιρεία 3 υπάλληλοι χρειάζονται 18 ημέρες για να ολοκληρώσουν μια εργασία. Σε πόσες ημέρες θα ολοκληρώσουν την εργασία αν εργαστούν 9 υπάλληλοι;

ΛΥΣΗ

Α΄ τρόπος (Πίνακας ποσών – τιμών)

Ποσά	Τιμές	
Αριθμός υπαλλήλων	3	9
Αριθμός ημερών	18	x

Τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, διότι όσοι περισσότεροι υπάλληλοι εργαστούν, τόσες λιγότερες μέρες θα χρειαστούν για να ολοκληρωθεί η εργασία.

Οπότε: $3 \cdot 18 = 9 \cdot x$ ή $9 \cdot x = 54$ ή $x = 54 : 9 = 6$ ημέρες.

Β’ τρόπος (Αναγωγή στη μονάδα)

Οι **3** υπάλληλοι χρειάζονται **18** ημέρες

↓ : 3 ↓ • 3

Ο **1** υπάλληλος χρειάζεται **54** ημέρες

↓ • 9 ↓ : 9

Οι **9** υπάλληλοι χρειάζονται **6** ημέρες

Γ΄ τρόπος (Απλή μέθοδος των τριών)

Οι **3** υπάλληλοι χρειάζονται **18** ημέρες

Οι **9** υπάλληλοι χρειάζονται **x** ημέρες

Έχουμε: $3 \cdot 18 = 9 \cdot x$ ή $9 \cdot x = 54$ ή $x = 54 : 9 = 6$ ημέρες.

Θέματα Εξετάσεων & Προσομοιώσεις

7.1. Απόσταση – Ταχύτητα – Χρόνος

ΘΕΜΑ 1

Ένας ποδηλάτης τρέχει με ταχύτητα 24 χλμ. την ώρα.
Πόσα χλμ. διανύει σε 20 λεπτά;

ΘΕΜΑ 2

Ένα αυτοκίνητο, που τρέχει με σταθερή ταχύτητα 80 χλμ. την ώρα, διανύει την απόσταση Αθήνα – Τρίπολη σε 120 λεπτά. Με πόση ταχύτητα πρέπει να τρέξει ένα δεύτερο αυτοκίνητο για να διανύσει την ίδια απόσταση σε 100 λεπτά;

ΘΕΜΑ 3

Ένα αυτοκίνητο τρέχοντας με σταθερή ταχύτητα 80 χλμ. την ώρα χρειάζεται 4 ώρες για να διανύσει μια απόσταση. Με ποια σταθερή ταχύτητα πρέπει να κινηθεί για να διανύσει την ίδια απόσταση σε 2,5 ώρες;

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία τρέχει 4 γύρους σε ένα στάδιο στον ίδιο χρόνο που η φίλη της Αλίκη τρέχει 3 γύρους στο ίδιο στάδιο. Πόσους γύρους θα έχει τρέξει η Μαρία, όταν η Αλίκη θα έχει τρέξει 12 γύρους;

ΘΕΜΑ 5

Στη γαλλική πόλη Le Mans γίνεται ένας αγώνας αντοχής αυτοκίνητων διάρκειας 24 ωρών.

α) Ποια απόσταση θα διανύσει στον αγώνα ένα αυτοκίνητο που τρέχει με 170 χλμ. την ώρα;

β) Η οδική απόσταση Αθήνας – Θεσσαλονίκης είναι περίπου 500 χλμ. Πόσες φορές περίπου θα την έχει καλύψει στη διάρκεια του αγώνα;

γ) Πόση ώρα θα χρειαστεί περίπου το αυτοκίνητο στο ερώτημα (α), για να πάει από την Αθήνα στη Θεσσαλονίκη;

ΘΕΜΑ 6

Ένα καγκουρό κάνει 4 πηδηματάκια σε 6 δευτερόλεπτα. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να κάνει 10 πηδηματάκια;

Α. 10 δευτερόλεπτα **Β.** 12 δευτερόλεπτα **Γ.** 15 δευτερόλεπτα **Δ.** 18 δευτερόλεπτα

ΘΕΜΑ 7

Ένας ποδηλάτης κάνει 28 χλμ. σε 30 λεπτά. Αν τρέχει με την ίδια ταχύτητα, πόσα χλμ. θα κάνει σε 1 ώρα;

Α. 28 χλμ. **Β.** 36 χλμ. **Γ.** 56 χλμ. **Δ.** 58 χλμ.

ΘΕΜΑ 8

Ο Χάρης έστειλε με περιστέρι ένα μήνυμα στην Ελένη. Το περιστέρι ξεκίνησε το ταξίδι του

7

ΘΕΜΑ 16

Οι επιστήμονες έχουν παρατηρήσει ότι 0,5 cm βροχόπτωσης αντιστοιχεί σε ύψος 5 cm χιονιού. Ο λόγος της βροχόπτωσης προς το ύψος του χιονιού είναι:

Α. 10:1 **Β.** 0,5:1 **Γ.** 1:10 **Δ.** 1:0,5

ΘΕΜΑ 17

Ένας κουβάς γεμάτος με νερό έχει μια μικρή τρύπα στο πλάι από όπου στάζει νερό. Έπειτα από 30 λεπτά, η στάθμη του νερού έφτασε ακριβώς το σημείο στο οποίο βρίσκεται η τρύπα και τότε μετρήσαμε ότι ο κουβάς ήταν γεμάτος κατά τα τέσσερα πέμπτα. Έπειτα από ακόμη μισή ώρα:

Α. θα έχει αδειάσει εντελώς **Β.** θα είναι γεμάτος κατά τα τέσσερα πέμπτα

Γ. θα είναι γεμάτος κατά τα τρία πέμπτα **Δ.** θα είναι γεμάτος κατά τα δύο πέμπτα

ΘΕΜΑ 18

Σε ένα καλάθι υπάρχουν αμύγδαλα και καρύδια. Αν ο λόγος των αμυγδάλων προς τα καρύδια είναι 8:5 και τα αμύγδαλα είναι 120 περισσότερα από τα καρύδια, τότε τα καρύδια είναι:

Α. 24 **Β.** 15 **Γ.** 200 **Δ.** 320

7.3. Ανάλογα Ποσά

ΘΕΜΑ 19

Με τα $\frac{4}{8}$ μιας κανάτας γεμίζουμε με νερό 4 ποτήρια. Πόσα ίδια ποτήρια γεμίζουμε με τα $\frac{5}{10}$ της ίδιας κανάτας;

ΘΕΜΑ 20

Αν 3 (όμοιες) μπουκάλες γεμίζουν με 4 γεμάτες (όμοιες) κούπες κρασί, πόσες κούπες κρασί χρειάζονται για να γεμίσουν 7,5 μπουκάλες;

ΘΕΜΑ 21

Ένα πλεούμενο, πλήρες από καύσιμα, ξεκινά από το λιμάνι Α με προορισμό το λιμάνι Β που απέχει 900 μίλια, για να μεταφέρει εμπορεύματα. Ενώ έχει διαπλεύσει τα 600 μίλια, παρατηρούν ότι τους έχει μείνει το $\frac{1}{4}$ από τα καύσιμα. Θα φτάσουν στον προορισμό τους ή θα πρέπει να πάνε σε κάποιο ενδιάμεσο λιμάνι για ανεφοδιασμό;

(Η κατανάλωση καυσίμων θεωρείται ομοιόμορφη σε όλη τη διάρκεια της πλεύσης)

ΘΕΜΑ 22

Δύο ελαιοχρωματιστές έβαψαν ένα σπίτι και πληρώθηκαν συνολικά 1.590€. Όμως, ο πρώτος εργάτης εργάστηκε 9 μέρες και ο δεύτερος μόλις 6 μέρες. Πόσα χρήματα θα πάρει ο καθένας;

9

Στατιστική και Γραφήματα

› Αρκετές φορές, καλούμαστε να πραγματοποιήσουμε έρευνα σε μία ομάδα στοιχείων, π.χ. αντικειμένων, ανθρώπων, ως προς ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό.

Για παράδειγμα, θέλουμε να μελετήσουμε πόσες φορές την εβδομάδα πηγαίνουν θέατρο οι μαθητές της Στ' Δημοτικού ή πόσα αυτοκίνητα πούλησε μία συγκεκριμένη εταιρεία την τελευταία δεκαετία.

› Σε όλη την πορεία μας στην Στατιστική θα χρησιμοποιούμε συχνά **την έννοια του ποσοστού επί τοις εκατό**. Το ποσοστό **α%** είναι ισοδύναμο με το κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$. Για να υπολογίσουμε το ποσοστό μίας ποσότητας, εκτελούμε την πράξη:

$$\alpha\% \cdot x = \frac{\alpha \cdot x}{100}$$

Χρησιμοποιούμε **γραφήματα**, για να παρουσιάσουμε παραστατικά πληροφορίες, δεδομένα και στοιχεία.

Υπάρχουν διάφορα είδη γραφημάτων, όπως το ραβδόγραμμα και το εικονόγραμμα.

› Το ραβδόγραμμα είναι ένα είδος γραφήματος, που απαρτίζεται από οριζόντιες ή κατακόρυφες ράβδους σχήματος ορθογωνίου οι οποίες παρουσιάζουν τα δεδομένα.

Τα **ραβδογράμματα** πρέπει να έχουν πάντα τίτλο και οι ράβδοι να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους.

π.χ. Καταγράφουμε τις πωλήσεις αυτοκινήτων τα έτη 2008, 2009, 2010 και 2011
- *Το 2008 καταγράφηκαν 6000 πωλήσεις αυτοκινήτων*
- *Το 2009 καταγράφηκαν 5000 πωλήσεις αυτοκινήτων*
- *Το 2010 καταγράφηκαν 3000 πωλήσεις αυτοκινήτων*
- *Το 2011 καταγράφηκαν 2000 πωλήσεις αυτοκινήτων*

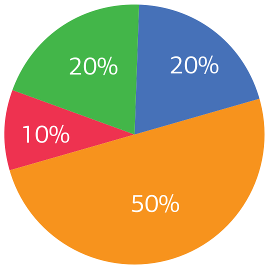
Απεικονίζουμε τις συγκεκριμένες πωλήσεις αυτοκινήτων με ένα ραβδόγραμμα, όπου στον οριζόντιο άξονα παρουσιάζονται τα έτη των πωλήσεων και στον κατακόρυφο το πλήθος των πωλήσεων ανά έτος.

Το ύψος κάθε ράβδου αντιστοιχεί στο πλήθος των πωλήσεων.

9

ΛΥΣΗ

Για να κατασκευάσουμε το κυκλικό διάγραμμα, βρίσκουμε καταρχάς τις γωνίες των υπόλοιπων κυκλικών τομέων για το φαγητό, τα ρούχα και τη διασκέδαση.



- Ενοίκιο **10%.** Γνωρίζουμε ότι το ποσοστό 10% αντιστοιχεί σε γωνία 36°.
- Φαγητό **20%.** (= 10% • 2)**:** Το ποσοστό 20% αντιστοιχεί σε γωνία 36° = 72°.
- Ρούχα **20%.** Το ποσοστό 20% αντιστοιχεί σε γωνία 72°.
- Διασκέδαση **50%** (= 10% • 5)**.** Το ποσοστό 50% αντιστοιχεί σε γωνία 5 • 36° = 180°.

Πίνακας Συχνοτήτων & Σχετικών Συχνοτήτων

- Όταν θέλουμε να δείξουμε πόσες φορές επαναλαμβάνεται ένα στοιχείο ανάμεσα στα δεδομένα μας, χρησιμοποιούμε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων.

Για να φτιάξουμε έναν πίνακα κατανομής συχνοτήτων, ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1. **Συλλέγουμε** τα δεδομένα.
2. Τα τοποθετούμε σε **αύξουσα ή φθίνουσα σειρά**.
3. **Μετράμε τη συχνότητα** εμφάνισης του κάθε στοιχείου.

ΑΣΚΗΣΗ

Οι βαθμοί που έλαβαν στο διαγώνισμα 19 μαθητές ήταν οι: 9, 8, 9, 10, 7, 8, 9, 7, 10, 10, 7, 6, 9, 10, 8, 9, 9, 8, 10. Να κατανείμετε τα παραπάνω δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων.

ΛΥΣΗ

Καταρχάς τοποθετούμε τα δεδομένα που συλλέξαμε, σε αύξουσα σειρά:

6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9,
9, 9, 9, 10, 10, 10, 10, 10

Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τα δεδομένα μας, διαμορφώνοντας έναν πίνακα συχνοτήτων με όλους τους παραπάνω βαθμούς.

Κατόπιν, εάν ζητηθεί, μπορούμε να παρουσιάσουμε τα συγκεκριμένα στοιχεία με ραβδόγραμμα, με τον τρόπο που περιγράψαμε στις προηγούμενες σελίδες.

Βαθμός	Καταμέτρηση	Συχνότητα
6	I	1
7	III	3
8	IIII	4
9	~~IIII~~ I	6
10	~~IIII~~	5

9

Εύκολος Τρόπος Υπολογισμού Μέσου Όρου

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι 8 βαθμοί που έλαβε ένας μαθητής στον έλεγχο επίδοσης:

16, 15, 18, 19, 20, 16, 17, 18

Να υπολογίσεις τον μέσο όρο της βαθμολογίας του.

ΛΥΣΗ

› Παίρνουμε τυχαία μία από τις παραπάνω τιμές της εκφώνησης, έστω την τιμή 17.

Υπολογίζουμε τη διαφορά κάθε μίας τιμής από το 17 που επιλέξαμε.

Έχουμε λοιπόν:

16 – 17 = **– 1**	15 – 17 = **– 2**	18 – 17 = **1**	19 – 17 = **2**
20 – 17 = **3**	16 – 17 = **– 1**	17 – 17 = **0** και	18 – 17 = **1**

Προσθέτουμε τα αποτελέσματα των διαφορών που βρήκαμε και έχουμε:

$$1 - 1 + 2 - 2 + 1 - 1 + 3 + 0 = 3$$

Συνοψίζοντας έχουμε κατά νου τους αριθμούς:

Πλήθος τιμών: **8**

Τιμή που λάβαμε τυχαία στην αρχή: **17**

Άθροισμα διαφορών: **3**

Ο μέσος όρος είναι ίσος με:

$$17 + \frac{3}{8} = \frac{17 \cdot 8 + 3}{8} = \frac{139}{8}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Σε ισοδύναμα αποτελέσματα θα καταλήγαμε εάν εξαρχής επιλέγαμε όχι το 17 αλλά οποιαδήποτε τιμή της εκφώνησης.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Τρία τετράγωνα έχουν εμβαδόν 16, 49 και 169, αντίστοιχα. Ποιος είναι ο μέσος όρος των πλευρών των 3 τετραγώνων;

Α. 8 **Β.** 12 **Γ.** 24 **Δ.** 39

ΛΥΣΗ

Αρχικά, υπολογίζουμε την πλευρά καθενός εκ των τριών τετραγώνων.

- 1^o τετράγωνο: Εμβαδόν $E_1 = 16 = 4^2$, άρα η πλευρά του ισούται με **4**.
- 2^o τετράγωνο: Εμβαδόν $E_2 = 49 = 7^2$, άρα η πλευρά του ισούται με **7**.
- 3^o τετράγωνο: Εμβαδόν $E_3 = 169 = 13^2$, άρα η πλευρά του ισούται με **13**.

Μέσος Όρος πλευρών $= \frac{4 + 7 + 13}{3} = \frac{24}{3} = 8$

Σωστό το Α.

Θέματα Εξετάσεων & Προσομοιώσεις

9

9.1. Υπολογισμός Μέσου Όρου

ΘΕΜΑ 1

Ένας μαθητής της Α΄ Γυμνασίου πήρε στο Α΄ τρίμηνο τους παρακάτω βαθμούς. Τι μέσο όρο έβγαλε;

18, 17, 17, 19, 19, 20, 17, 18, 19, 20, 20, 19

ΘΕΜΑ 2

Η Μαρία είναι αθλήτρια Ολυμπιακής γυμναστικής. Στους τελευταίους αγώνες που έλαβε μέρος οι κριτές τής έδωσαν τις διπλανές βαθμολογίες. Ποιος είναι ο μέσος όρος της βαθμολογίας της;

1ος κριτής	2ος κριτής	3ος κριτής	4ος κριτής	5ος κριτής
8,4	8,6	9	9,2	8,8

ΘΕΜΑ 3

Τρία παιδιά ΣΤ΄ δημοτικού πήραν μέρος σε 4 τεστ αξιολόγησης στη Γλώσσα.

α) Ποιος είναι ο μέσος όρος της βαθμολογίας κάθε μαθητή;

β) Ποιος μαθητής είχε την καλύτερη επίδοση;

	1ο τεστ	2ο τεστ	3ο τεστ	4ο τεστ
Χρήστος	10	10	9	10
Γιώργος	9	9	10	10
Άννα	10	8	10	8

ΘΕΜΑ 4

Η Μετεωρολογική Υπηρεσία στις 22/3/2001 κατέγραψε τη θερμοκρασία της Λάρισας 5 φορές την ημέρα και 5 τη νύχτα. Οι μετρήσεις φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

Ημέρα	23°C	27°C	28°C	26°C	21°C
Νύχτα	11°C	11°C	12°C	14°C	12°C

Ποια θερμοκρασία ημέρας και ποια νύχτας έδωσε η Μετεωρολογική Υπηρεσία στα μέσα μαζικής ενημέρωσης για το δελτίο καιρού στις 22/3/2001;

ΘΕΜΑ 5

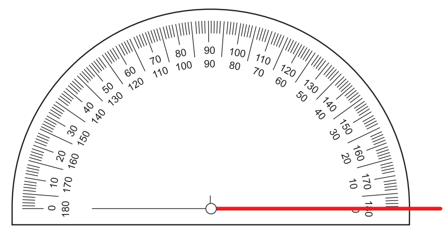
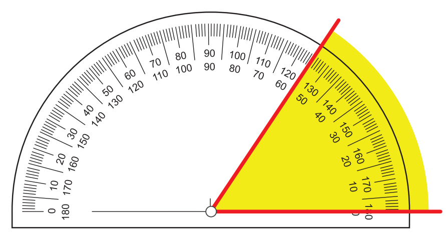
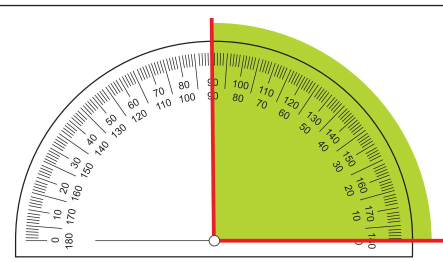
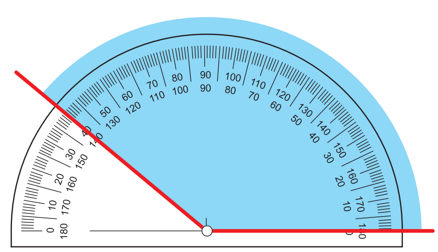
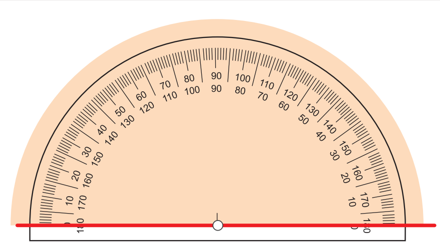
Ο διπλανός πίνακας δείχνει τη βαθμολογία 20 μαθητών μιας τάξης στο μάθημα των μαθηματικών. Ποιος είναι ο μέσος όρος της τάξης;

Βαθμολογία	Πλήθος μαθητών με τη συγκεκριμένη βαθμολογία
6	0
7	8
8	0
9	2
10	10

10

Γωνίες

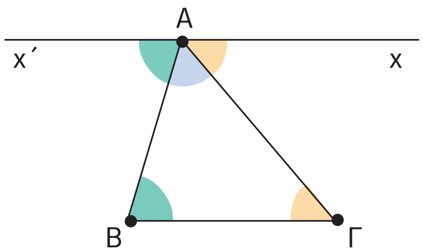
Είδη Γωνιών

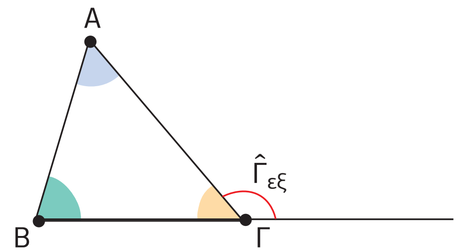
Είδος γωνίας	Μέτρο γωνίας	Σχήμα
μηδενική γωνία	0°	
οξεία γωνία	Μεγαλύτερη από 0° και μικρότερη από 90°	
ορθή γωνία	90°	
αμβλεία γωνία	Μεγαλύτερη από 90° και μικρότερη από 180°	
ευθεία γωνία	180°	

Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Μια σημαντική πρόταση για τις γωνίες του τριγώνου είναι:

Το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι 180°.





Ισχύει ότι: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$

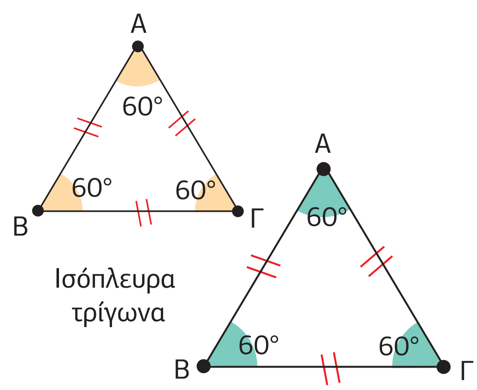
Είδη τριγώνων ως προς τις πλευρές

Ισόπλευρο τρίγωνο

- Λέγεται το τρίγωνο που έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.

  Όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες και μοιράζονται τις 180°.

  Έτσι έχουμε: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$.

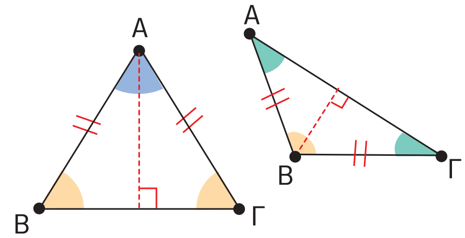


Ισόπλευρα τρίγωνα

Ισοσκελές τρίγωνο

- Λέγεται το τρίγωνο που έχει δύο πλευρές του ίσες.

  Στο ισοσκελές τρίγωνο οι δύο γωνίες προσκείμενες στη βάση του είναι ίσες.



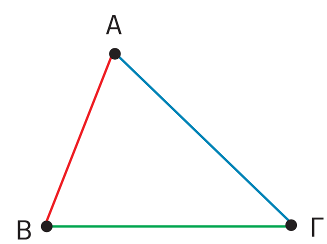
Ισοσκελές τρίγωνο

Σκαληνό τρίγωνο

- Λέγεται το τρίγωνο που έχει όλες τις πλευρές του άνισες.

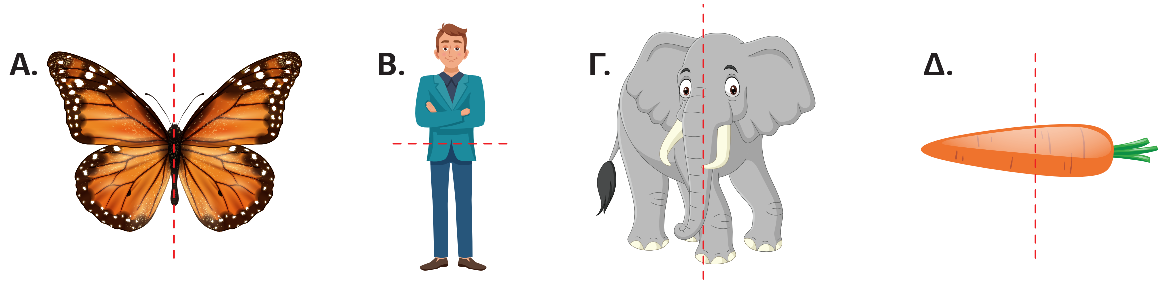
  Όλες οι γωνίες του σκαληνού τριγώνου είναι, επίσης, άνισες.

  Τα σκαληνά τρίγωνα είναι οξυγώνια, αμβλυγώνια ή ορθογώνια.



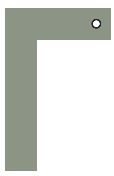
ΘΕΜΑ 15

Σε ποια από τις ακόλουθες ζωγραφιές η διακεκομμένη γραμμή είναι άξονας συμμετρίας;



ΘΕΜΑ 16

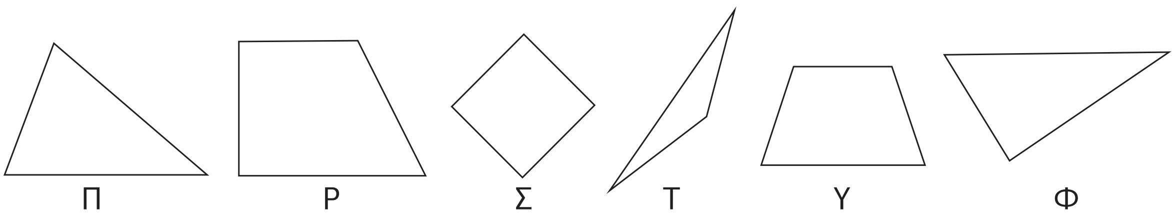
Το διπλανό σχήμα έχει περιστραφεί 90° δεξιόστροφα (με τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Ποιο σχήμα δείχνει το αποτέλεσμα της περιστροφής;



10.4. Γεωμετρικά Σχήματα

ΘΕΜΑ 17

Να γράψεις τα γράμματα των σχημάτων που είναι τρίγωνα.



ΘΕΜΑ 18

Ποια δύο από τα παρακάτω σχήματα μπορούν να ταυτιστούν, εάν το ένα το μεταφέρουμε και μετά το στρίψουμε;

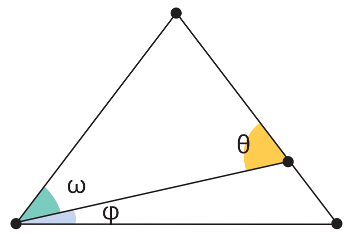
ΘΕΜΑ 19

Τρία σημεία σχηματίζουν ένα τρίγωνο. Θέλουμε να προσθέσουμε ένα ακόμη σημείο για να σχηματίσουμε ένα παραλληλόγραμμο. Πόσες είναι οι δυνατές θέσεις για το τέταρτο σημείο;

10

ΘΕΜΑ 31

Το διπλανό τρίγωνο είναι ισόπλευρο και η γωνία ω είναι διπλάσια της γωνίας φ. Τότε το μέτρο της γωνίας θ σε μοίρες είναι ίσο με:

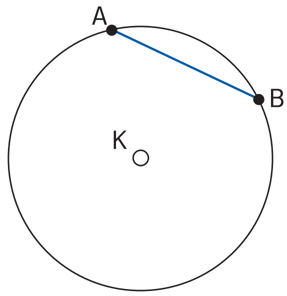


Α. 70 ° **Β.** 80 °

Γ. 90 ° **Δ.** 100 °

ΘΕΜΑ 32

Στο σχήμα φαίνεται η χορδή ΑΒ ενός κύκλου Κ. Αν φέρεις τη διάμετρο ΑΓ και τη διάμετρο ΒΔ, τι σχήμα θα είναι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ;

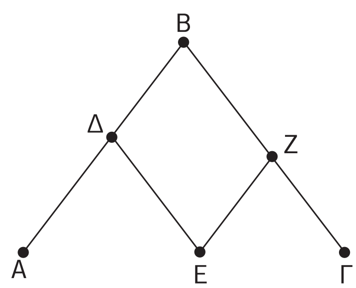


Α. Πεντάγωνο **Β.** Ορθογώνιο

Γ. Τραπέζιο **Δ.** Ρόμβος

ΘΕΜΑ 33

Για να πάμε από το Α στο Γ ακολουθούμε είτε τη διαδρομή 1: Α → Δ → Β → Ζ → Γ είτε τη διαδρομή 2: Α → Δ → Ε → Ζ → Γ όπου γνωρίζουμε ότι το μονοπάτι ΔΕ είναι παράλληλο στο ΒΓ και το μονοπάτι ΕΖ είναι παράλληλο στο ΑΒ. Τότε είναι σωστό ότι:



Α. Η διαδρομή 1 είναι πάντα η συντομότερη.

Β. Η διαδρομή 2 είναι πάντα η συντομότερη.

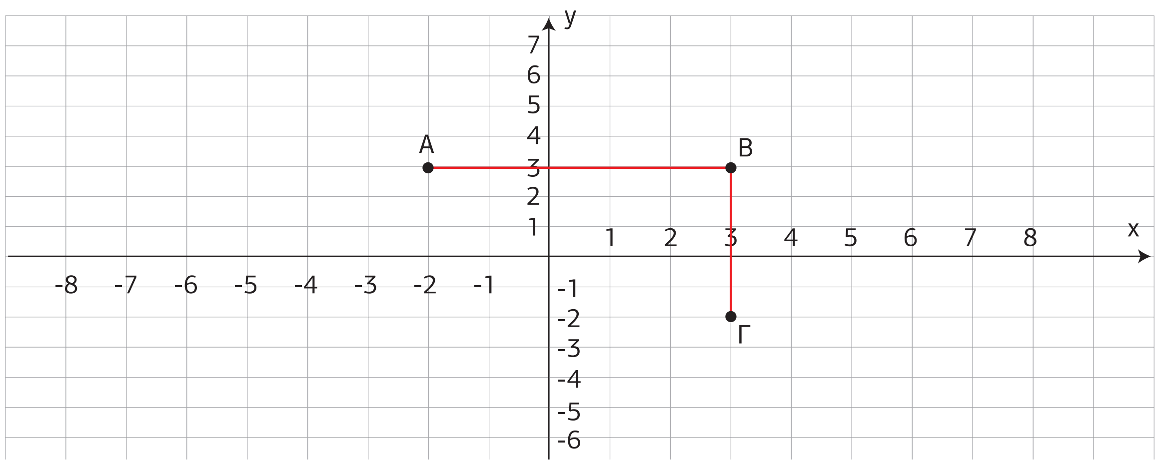
Γ. Οι διαδρομές 1 και 2 έχουν πάντα το ίδιο μήκος.

Δ. Η συντομότερη διαδρομή εξαρτάται από τη γωνία Β.

ΘΕΜΑ 34

Τα σημεία Α, Β και Γ είναι κορυφές τετραγώνου. Σε ποιο σημείο βρίσκεται η τέταρτη κορυφή του τετραγώνου;

Α. (–2, 2) **Β.** (–2, –2) **Γ.** (0, –2) **Δ.** (–3, –2)



Μονάδα Μέτρησης Επιφάνειας

- Μονάδα μέτρησης της επιφάνειας είναι το **1 τετραγωνικό μέτρο** (τ.μ.) ή **square meter** (m^2). Είναι η επιφάνεια ενός τετραγώνου πλευράς 1 μέτρου (μ. ή m). Είναι:

1 τ.μ. = 100 τ.δεκ. = 10.000 τ.εκ. = 1.000.000 τ.χιλ.

Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου

- **τετραγωνικό δεκατόμετρο (τ.δεκ.)** ή **square decimeter (dm^2)**

  Ο χωρισμός του τετραγωνικού μέτρου σε 10 • 10 = 100 τετραγωνάκια πλευράς 1 dm μάς δίνει το τετραγωνικό δεκατόμετρο.

$$\textbf{1 τ.μ = 100 τ.δεκ.} \quad \text{ή} \quad \textbf{1 τ.δεκ.} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{100}}\,\textbf{τ.μ.}$$

- **τετραγωνικό εκατοστόμετρο (τ.εκ.)** ή **square centimeter (cm^2)**

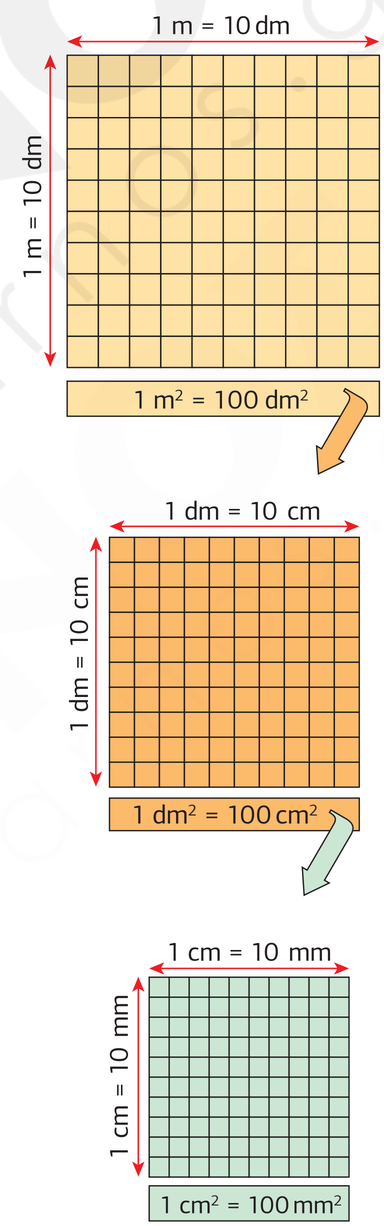
  Ο χωρισμός του τετραγωνικού δεκατόμετρου σε 10 • 10 = 100 τετραγωνάκια πλευράς 1 cm μάς δίνει το τετραγωνικό εκατοστόμετρο.

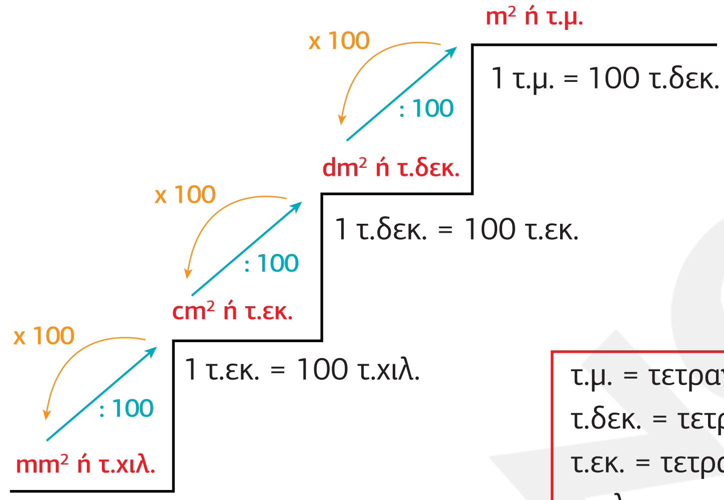
$$\textbf{1 τ.δεκ. = 100 τ.εκ.} \quad \text{ή} \quad \textbf{1 τ.εκ.} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{100}}\,\textbf{τ.δεκ.} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{10.000}\,\textbf{τ.μ.}$$

- **τετραγωνικό χιλιοστόμετρο (τ.χιλ.)** ή **square millimeter (mm^2)**

  Ο χωρισμός του τετραγωνικού εκατοστόμετρου σε 10 • 10 = 100 τετραγωνάκια πλευράς 1 mm μάς δίνει το τετραγωνικό χιλιοστόμετρο.

$$\textbf{1 τ.εκ. = 100 τ.χιλ.} \quad \text{ή} \quad \textbf{1 τ.χιλ.} = \frac{\textbf{1}}{\textbf{100}}\,\textbf{τ.εκ.} = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1.000.000}\,\textbf{τ.μ.}$$





τ.μ. = τετραγωνικά μέτρα
τ.δεκ. = τετραγωνικά δέκατα
τ.εκ. = τετραγωνικά εκατοστά
τ.χιλ. = τετραγωνικά χιλιοστά

Μονάδες μεγαλύτερες του τετραγωνικού μέτρου

- **τετραγωνικό χιλιόμετρο (τ. χλμ.)** ή **square kilometer (km^2)**

  Χρησιμοποιείται για τη μέτρηση μεγάλων εκτάσεων, όπως κρατών, νομών ή νησιών

  1 τ.χλμ. = 1.000 • 1.000 = 1.000.000 τ.μ. ή **1 km^2 = 1.000.000 m^2**

- **στρέμμα**

  Χρησιμοποιείται στην Ελλάδα για τη μέτρηση επιφάνειας οικοπέδων και κτημάτων

  1 στρέμμα = 1.000 τ.μ. ή **1 στρέμμα = 1.000 m^2**

- **Η Σκάλα των Μονάδων Επιφάνειας**

  Όταν κατεβαίνω τη σκάλα, πολλαπλασιάζω γιατί το Μεγάλο είναι ίσο με πολλά μικρά.

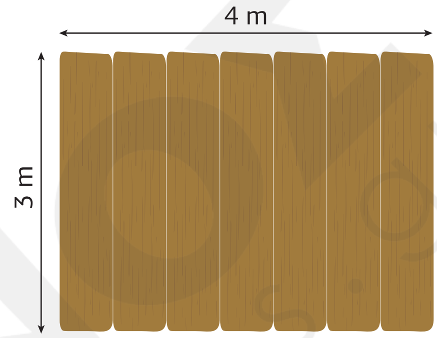
  Όταν ανεβαίνω τη σκάλα, διαιρώ γιατί το μικρό είναι μέρος (κλάσμα) του Μεγάλου.

Θέματα Εξετάσεων & Προσομοιώσεις

13.1. Υπολογισμός Εμβαδού

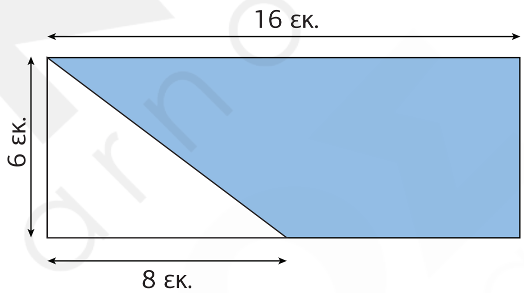
ΘΕΜΑ 1

Ο Πέτρος μπογιατίζει την εξωτερική πλευρά του φράκτη δεξιά. Ο φράκτης έχει μήκος 4 μ. και ύψος 3 μ. Ποια είναι η επιφάνεια που πρέπει να μπογιατίσει ο Πέτρος;



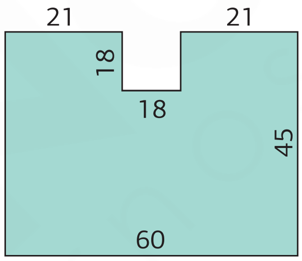
ΘΕΜΑ 2

Το διπλανό σχήμα είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ποιο είναι το εμβαδόν της γαλάζιας επιφάνειας σε τ.εκ. στο σχήμα;



ΘΕΜΑ 3

Ποιο είναι το εμβαδόν του διπλανού σχήματος;

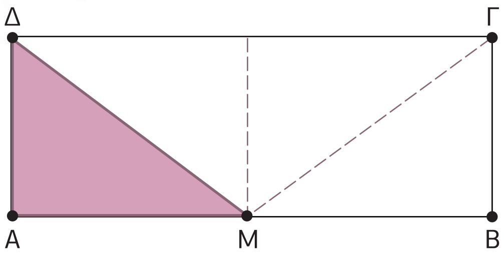


ΘΕΜΑ 4

Η κ. Μαρία έχει τέσσερα οικόπεδα. Το πρώτο έχει εμβαδόν 1,2 στρ., το δεύτερο 567 τ.μ., το τρίτο 25.400 τ.δεκ. και το τέταρτο 0,06 τ.χλμ. Ποια είναι η συνολική επιφάνεια των οικοπέδων;

ΘΕΜΑ 5

Αν η χρωματισμένη επιφάνεια του ορθογώνιου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, του διπλανού σχήματος, έχει εμβαδόν 6 τ.εκ. και Μ είναι το μέσο της πλευράς του ΑΒ, πόσο είναι το εμβαδόν του;

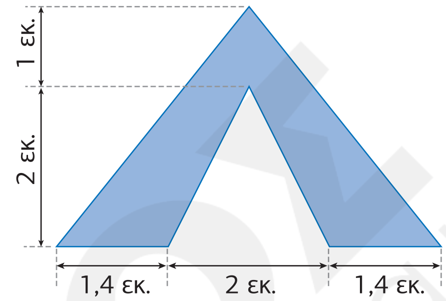


ΘΕΜΑ 6

Σε ένα τραπέζιο η μεγάλη βάση είναι 45 εκ., η μικρή βάση είναι τα $\frac{2}{3}$ της μεγάλης βάσης και το ύψος είναι το $\frac{1}{5}$ του αθροίσματος των δύο βάσεων. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τραπεζίου.

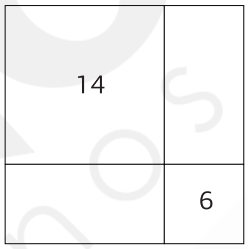
ΘΕΜΑ 7

Να υπολογίσεις το χρωματισμένο εμβαδόν στο διπλανό σχήμα.



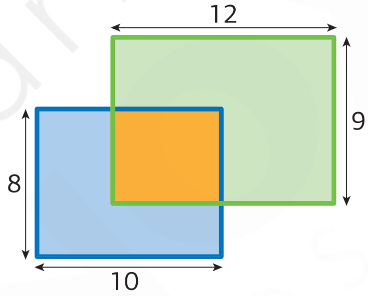
ΘΕΜΑ 8

Το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχει χωριστεί σε τέσσερα ορθογώνια, δύο περίμετροι των οποίων φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Πόσο θα είναι το εμβαδόν του τετραγώνου;



ΘΕΜΑ 9

Δυο ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις 8 × 10 και 9 × 12 αντιστοιχα έχουν ένα κοινό τμήμα, όπως δείχνουν τα σχήματα αντίστοιχα. Το γαλάζιο τμήμα έχει εμβαδόν 37 τ.εκ. Πόσο είναι το εμβαδόν του πράσινου τμήματος;

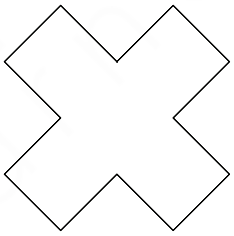


ΘΕΜΑ 10

Το διπλανό σχήμα αποτελείται από πέντε ίσα τετράγωνα. Αν η περίμετρος του σχήματος είναι 72 τ.εκ., το εμβαδόν του είναι:

Α. 144 τ.εκ. **Β.** 120 τ.εκ.

Γ. 180 τ.εκ. **Δ.** 200 τ.εκ.



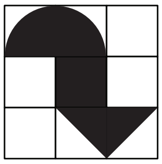
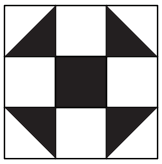
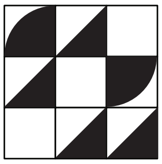
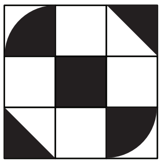
ΘΕΜΑ 11

Το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 81 τ.εκ. Ένα ορθογώνιο έχει την ίδια περίμετρο με το τετράγωνο. Το μήκος του ορθογωνίου είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Πόσο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου;

Α. 36 τ.εκ. **Β.** 6 τ.εκ. **Γ.** 18 τ.εκ. **Δ.** 72 τ.εκ.

ΘΕΜΑ 12

Ποιο από τα παρακάτω σχήματα έχει τη μεγαλύτερη σκιασμένη επιφάνεια;

Α.  **Β.**  **Γ.**  **Δ.**  **Ε.**