ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες

Από το 1985 στην εκπαίδευση για φοιτητές ΕΜΠ και ΑΕΙ και από το 2000 στην παροχή εκπαιδευτικών υπηρεσιών για το ΕΑΠ, χαρακτηριζόμενοι από πάθος και μεράκι, δημιουργήσαμε τη δεύτερη δεκαετία του 21ου αιώνα το Φοιτητικό Online Φροντιστήριο arnos.gr για φοιτητές όλων των θεματικών ενοτήτων του ΕΑΠ. Από το 2000 έως σήμερα, χιλιάδες φοιτητές του Ε.Α.Π. έχουν αποκτήσει το πτυχίο τους με τη συμβολή των καθηγητών μας. Συνεχίζουμε με γνώμονα την καινοτομία και την προσωπική επιτυχία του φοιτητή.

Διαθέτουμε εκτός από το πλούσιο εκπαιδευτικό υλικό της ιστοσελίδας μας και τον υπεύθυνο καθηγητή της ενότητας που διασφαλίζουν την πλήρη φροντίδα και διδακτική κάλυψη των αναγκών κάθε φοιτητή εξατομικευμένα και το συγκεκριμένο βιβλίο-βοήθημα με το οποίο ισχυροποιούμε πλήρως την προετοιμασία του φοιτητή του ΕΑΠ. Το βοήθημα έχει διαμορφωθεί και επιμεληθεί με προσεκτικά σχεδιασμένο τρόπο, ώστε να αποτυπώνονται με απλό και κατανοητό τρόπο όλα όσα χρειάζεται να γνωρίζουμε αναφορικά με τη Θεωρία, τη Μεθοδολογία και τα Παραδείγματα σε κάθε διδακτική ενότητα της ύλης.

Θα ήθελα να εκφράσω από την καρδιά μου τις ευχαριστίες μου στον κ. Βασίλειο Τσιλιβή εκλεκτό δάσκαλο και συνεργάτη που επιμελήθηκε και περάτωσε την εκπόνηση του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού βοηθήματος, στα πλαίσια της άριστης και εποικοδομητικής μας συνεργασίας όλα αυτά τα χρόνια.

CEO & Founder Arnos Online Education
Ιωάννης Π. Κρόκος

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Αγαπητέ σπουδαστή του Κέντρου ΑΡΝΟΣ,

Το παρόν διδακτικό εγχειρίδιο είναι ένα βοήθημα-εκπαιδευτική πρόταση του Κέντρου μας που απευθύνεται στους φοιτητές της Θ. Ε. ΔΕΟ 13 του Ε.Α.Π. Περιλαμβάνει όλη την απαραίτητη Θεωρία με τρόπο απλό και κατανοητό, η οποία συνοδεύεται από εικόνες, παραδείγματα και στοχευμένη μεθοδολογία που σε βοηθούν να κατανοήσεις την ύλη γρήγορα και ουσιαστικά. Πρόκειται για ένα εκπαιδευτικό σύγγραμμα μικρό σε όγκο, με όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που διακρίνεται για τον απλό και καθαρό λόγο του και το οποίο δεν αφήνει αναπάντητα ερωτήματα.

Τα χαρακτηριστικά αυτά σε συνδυασμό με την επιστημονικότητά του, σε οδηγούν βήμα-βήμα στην βαθμιαία και στέρεα οικοδόμηση της γνώσης με πληρότητα και σαφήνεια. Ο εύληπτος τρόπος παρουσίασης της ύλης και η προσεκτική επιλογή των παραδειγμάτων, λειτουργούν συμπληρωματικά της Θεωρίας και εξασφαλίζουν την κατανόηση της ύλης.

Με εφόδιο αυτό το εγχειρίδιο μπορείς να αξιοποιήσεις εύκολα και κατανοητά τις υπηρεσίες που προσφέρει διαδικτυακά το Online (εξ αποστάσεως) Κέντρο Σπουδών ΑΡΝΟΣ, και να μελετήσεις με δομημένη σκέψη το πλήρες υλικό Video-Διδασκαλίας σε Θεωρία, Μεθοδολογία και Θέματα Εξετάσεων για τη Θ.Ε. ΔΕΟ 13 που θα βρεις αναρτημένο στην ιστοσελίδα www.arnos.gr

Να θυμάσαι ότι η **προσπάθεια ανταμείβεται και οι θυσίες τελικά δικαιώνονται**. Μην περιορίζεις τον πήχη της επίδοσής σου, απλώς δώσε ό,τι παραπάνω και όσο περισσότερο μπορείς. **Έχεις δυνατότητες παραπάνω απ' όσο νομίζεις...** γι αυτό τόλμησε και μη φοβάσαι. Άλλωστε, η επιτυχία στη ζωή μετριέται αποκλειστικά από το κουράγιο και τη δύναμη που δείξαμε στις μάχες που δώσαμε. Για αυτό να σε οπλίζει η δύναμη, η αισιοδοξία και η ελπίδα και να επικεντρώσεις τη συνείδησή σου μόνο σε αυτά που επιθυμείς.

Σου ευχόμαστε ολόψυχα Καλή Επιτυχία και Κάθε Δύναμη.

Ο υπεύθυνος καθηγητής
Βασίλειος Κ. Τσιλιβής

ΜΕΡΟΣ 1ο

Επιχειρησιακά Μαθηματικά

Το συγκεκριμένο μέρος αποτελεί το 1ο εκ των τριών συνολικά μερών της ύλης της Θ.Ε. ΔΕΟ 13. Βαθμολογικά το σύνολο των θεμάτων που συναντώνται σε αυτό το μέρος στις εξετάσεις της ενότητας, καταλαμβάνουν κατά μέσο όρο τις 3 έως 3,5 μονάδες με άριστα το 10.

Προαπαιτούμενα: Για το συγκεκριμένο μέρος των Επιχειρησιακών Μαθηματικών, χρειάζεται **ΠΡΩΤΙΣΤΩΣ** η γνώση για:

- Επίλυση εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού (***video-διδασκαλία*** www.arnos.gr)
- Χρήση του τυπολογίου των παραγώγων και των ολοκληρωμάτων (www.arnos.gr)

Λέξεις-Κλειδιά: Όπως επισημάνθηκε και στην εισαγωγή του συγκεκριμένου εγχειριδίου, για κάθε ένα εκ των τριών μερών της ύλης μας (*Επιχειρησιακά Μαθηματικά, Επιχειρησιακή Στατιστική και Επιχειρησιακή Έρευνα*), υπάρχουν συγκεκριμένες Λέξεις-Κλειδιά για κάθε θέμα που ζητείται στις εξετάσεις. Ας γνωρίσουμε λοιπόν αυτές τις **Λέξεις-Κλειδιά** για το μέρος των Επιχειρησιακών Μαθηματικών που είναι τα **Θέματα των Εξετάσεων**.

Είναι οι:

- **Μεγιστοποίηση/Ελαχιστοποίηση** (ή *«μέγιστο/ελάχιστο»*, ή *«μεγιστοποιείται/ελαχιστοποιείται»*). Είναι τα λεγόμενα **ακρότατα** μίας συνάρτησης, δηλαδή οι ακραίες τιμές (*μέγιστη ή ελάχιστη*) που μπορεί να λάβει αυτή η συνάρτηση.
- **Σημείο Ισορροπίας** της Αγοράς
- **Ελαστικότητα** Προσφοράς - **Ελαστικότητα** Ζήτησης
- **Πεδίο Ορισμού** Προσφοράς και Ζήτησης
- **Ολοκλήρωμα**

Οι Λέξεις-Κλειδιά είναι αυτές που αναγνωρίζοντας τες μέσα στο κείμενο, έστω και να μην έχουμε διαβάσει εξαρχής όλα τα λεγόμενά του, γνωρίζουμε ακριβώς τι θα κάνουμε για να το λύσουμε. Κι αυτό διότι η κάθε Λέξη-Κλειδί συνδέεται με την αντίστοιχη **Μεθοδολογία Επίλυσης.**

1.1. Μεγιστοποίηση – Ελαχιστοποίηση Οικονομικών Συναρτήσεων

Είναι το θέμα που συναντάται πάντα σε κάθε εξεταστική περίοδο και αφορά στο να βρούμε τι ποσότητα Q πρέπει να παράγουμε από ένα προϊόν ή και σε τι τιμή P πρέπει να το πουλήσουμε, ώστε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε το κέρδος, τα έσοδα, το κόστος κοκ. Για αυτόν ακριβώς το θέμα αναφέρεται στον τίτλο η φράση «μεγιστοποίηση-ελαχιστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων». Οι οικονομικές συναρτήσεις είναι αυτές που σχετίζονται με τα **έσοδα**, τα **έξοδα** (κόστος) και το **κέρδος** μίας επιχείρησης.

Η επίλυση αυτού του θέματος είναι πολύ απλή και άμεση, καθώς βασίζεται σε μία **Μεθοδολογία επίλυσης** η οποία απαρτίζεται από **4 βήματα**. Πριν όμως γνωρίσουμε αυτήν τα μεθοδολογία, πρέπει να θυμόμαστε απέξω πέντε **οικονομικούς τύπους**. Είναι οι:

- Συνολικά Έσοδα: $TR = P \cdot Q$, όπου P (price) η τιμή και Q (quantity) η ποσότητα
- Συνολικό Κόστος: $TC = VC + FC$, όπου VC μεταβλητό κόστος και FC σταθερό κόστος
- Συνολικό Κέρδος: $T\Pi = TR - TC$
- **Μέσο (average)**: $A? = \dfrac{?}{Q}$, όπου στη θέση του **?** βάζουμε τη συνάρτηση του κόστους C ή των εσόδων R, ή του κέρδους Π.

  Ενδεικτικά παραδείγματα χρήσης του τύπου:

  - Μέσο **Κόστος** (Average **Coast**): $AC = \dfrac{C}{Q}$

- Μέσο **Μεταβλητό Κόστος** (Average **Variable Coast**): $AVC = \dfrac{VC}{Q}$
- Μέσο **Έσοδο** (Average **Revenues**): $AR = \dfrac{R}{Q}$
- Μέσο **Κέρδος** (Average **Π**): $A\Pi = \dfrac{\Pi}{Q}$

- $\boxed{\textbf{Οριακό (marginal)}: M? = (?)'}$, όπου στη θέση του **?** βάζουμε τη συνάρτηση του κόστους C ή των εσόδων R, ή του κέρδους Π.

  Ενδεικτικά παραδείγματα χρήσης του τύπου:

- Οριακό **Κόστος** (Marginal **Coast**): $MC = (C)'$
- Οριακό Έσοδο (Marginal Revenues): $MR = (R)'$
- Οριακό **Κέρδος** (Marginal **Π**): $M\Pi = (\Pi)'$

Παράδειγμα: Δίνεται το σταθερό κόστος μίας επιχείρησης $FC = 800$ χρηματικές μονάδες και το μεταβλητό κόστος:

$$VC = Q^3 - \frac{15}{2}Q^2 + 200Q$$

Θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις για το συνολικό κόστος (TC), το μέσο κόστος (AC), το μέσο μεταβλητό κόστος (AVC), το μέσο σταθερό κόστος (AFC) και το οριακό κόστος (MC). Είναι λοιπόν οι εξής:

$$TC = VC + FC = Q^3 - \frac{15}{2}Q^2 + 200Q + 800 =$$
$$= Q^3 - 7,5Q^2 + 200Q + 800$$

1.3. Ελαστικότητα Προσφοράς - Ελαστικότητα Ζήτησης

Είναι ένα από τα επίσης σχετικά άμεσα θέματα που συναντάται επίσης **σχεδόν πάντα** σε κάθε εξεταστική περίοδο και αφορά στο να βρούμε την ελαστικότητα ζήτησης ή/και την ελαστικότητα προσφοράς. Η Λέξη-Κλειδί εδώ είναι λοιπόν η λέξη **ελαστικότητα**.

Η ελαστικότητα ως μέγεθος έχει μεγάλη οικονομική σημασία, καθώς ερμηνεύει το πόσο % θα επηρεαστεί (θα αυξηθεί ή μειωθεί) η ζητούμενη ή η προσφερόμενη ποσότητα ενός αγαθού, σε ενδεχόμενη ποσοστιαία μεταβολή της τιμής αυτού.

Για αυτό λοιπόν και η **ερμηνεία** της ελαστικότητας είναι **SUPER SOS** και ζητείται **ΠΑΝΤΑ** στις εξετάσεις μας.

Το συγκεκριμένο θέμα δε βασίζεται σε μεθοδολογία, αλλά στους τύπους που πρέπει να **θυμόμαστε απέξω**. Έχουμε λοιπόν:

Ελαστικότητα Ζήτησης **Συμβολίζεται ως ε_d**	**Ελαστικότητα Προσφοράς** **Συμβολίζεται ως ε_s**
• Εάν η συνάρτηση προσφοράς είναι σε μορφή $Q = \textit{Τύπος Συνάρτησης}$ τότε η ελαστικότητα προσφοράς υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο: $\boxed{\varepsilon = \frac{P}{Q} \cdot Q'}$	• Εάν η συνάρτηση ζήτησης είναι σε μορφή $Q = \textit{Τύπος Συνάρτησης}$ τότε η ελαστικότητα ζήτησης υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο: $\boxed{\varepsilon = \frac{P}{Q} \cdot Q'}$

Ελαστικότητα Ζήτησης Συμβολίζεται ως ε_d	Ελαστικότητα Προσφοράς Συμβολίζεται ως ε_s
• Εάν η συνάρτηση ζήτησης είναι σε μορφή $P =$ ***Τύπος Συνάρτησης*** τότε η ελαστικότητα ζήτησης υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο: $\boxed{\varepsilon = \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{P'}}$ **ΠΑΝΤΑ** Η ελαστικότητα ζήτησης είναι **αρνητική** ($\varepsilon_d < 0$)	• Εάν η συνάρτηση προσφοράς είναι σε μορφή $P =$ ***Τύπος Συνάρτησης*** τότε η ελαστικότητα προσφοράς υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο: $\boxed{\varepsilon = \frac{P}{Q} \cdot \frac{1}{P'}}$ **ΠΑΝΤΑ** Η ελαστικότητα προσφοράς είναι **θετική** ($\varepsilon_s > 0$)

Παράδειγμα: Δίνονται οι ακόλουθες συναρτήσεις:

Η συνάρτηση προσφοράς: $Q = P + 3$

Η συνάρτηση ζήτησης: $Q = 9 - P^2$

Να βρεθεί η ελαστικότητα προσφοράς και η ελαστικότητα ζήτησης στο σημείο ισορροπίας της αγοράς και να **ερμηνευθούν** τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

Λύση: Κατ' αρχήν, θα βρούμε αλγεβρικά το σημείο ισορροπίας της αγοράς:

2.3. Α. Δεσμευμένη Πιθανότητα

Πριν μελετήσουμε το συγκεκριμένο εδάφιο, **είναι ωφέλιμο όπως μελετήσουμε πρωτίστως από την ιστοσελίδα** www.arnos.gr **το Εισαγωγικό Κεφάλαιο των Πιθανοτήτων και των Αρχών Απαρίθμησης,** απλώς και μόνον για στοχευμένη εξοικείωση με τη λογική και τη φιλοσοφία της συγκεκριμένης θεματικής περιοχής που συναντάται πάντα και παντού στην καθημερινότητά μας.

Υπάρχουν λοιπόν αρκετές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή, όπου υπολογίζουμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός, έχοντας πρωτίστως ήδη κάποιες πληροφορίες για αυτό.

Ως παράδειγμα δεσμευμένης πιθανότητας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την πιθανότητα το κασετόφωνο που έχουμε να είναι ελαττωματικό, δεδομένου ότι το αγοράσαμε από το κατάστημα Ε. Σε αυτό το παράδειγμα λοιπόν, η ποιότητα του κασετόφωνου που έχουμε στο σπίτι μας, *εξαρτάται/καθορίζεται/δεσμεύεται* από μία προϋπόθεση… **από μία συνθήκη**. Ποια; Από ποιο κατάστημα το αγοράσαμε!

Για αυτό και ασκήσεις όπου ζητείται ο υπολογισμός μίας κατάστασης **Α** υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει μία άλλη συνθήκη, **Β**, εντάσσονται στη θεματική κατηγορία των προβλημάτων **Δεσμευμένης Πιθανότητας**.

Η πιθανότητα αυτή συμβολίζεται ως Ρ(**Α**/**Β**) και εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο **Α**, εάν γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το ενδεχόμενο **Β**.

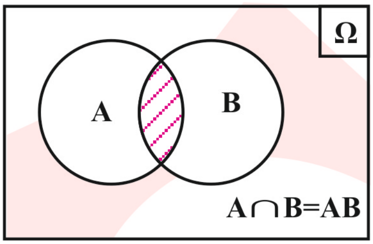
Υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{P(\mathbf{A}/B) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{B})}, \text{ όταν } P(\mathbf{B}) \neq \mathbf{0}}$$

Ο τύπος $P(A/B)$ διαβάζεται ως: η πιθανότητα ισχύει το γεγονός A δεδομένου/εφόσον όταν έχει πραγματοποιηθεί το γεγονός B.

Με βάση αυτήν τη σχέση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύουν και τα ακόλουθα:

- $P(\mathbf{A} \cap B) = P(\mathbf{A}/B) \cdot P(\mathbf{B})$
- $P(\mathbf{A} \cap B) = P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A})$



Σημαντική Σημείωση:

Στην παραπάνω παρένθεση **ΠΑΝΤΑ** το αριστερό γράμμα εκφράζει το ενδεχόμενο του οποίου την πιθανότητα ΖΗΤΟΥΜΕ και το δεξί εκφράζει την **προϋπόθεση** (*που την αναγνωρίζουμε εύκολα διότι συνοδεύεται από μία εκ των παραπάνω Λέξεων-Κλειδιών*).

Παράδειγμα: Μία εταιρεία κατηγοριοποίησε τους υπαλλήλους της, σε χαμηλόμισθους και υψηλόμισθους, ανάλογα με το επίπεδο της εκπαίδευσής τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα:

Επίπεδο εκπαίδευσης	Μισθός	
	Χαμηλόμισθοι	Υψηλόμισθοι
Απόφοιτοι Δημοτικού	40	5
Απόφοιτοι Μέσης εκπαίδευσης	25	60
Απόφοιτοι Πανεπιστημίου	5	25

Εάν ένας από τους εργαζόμενους είναι απόφοιτος Πανεπιστημίου, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι υψηλόμισθος.

Λύση: Πρωτίστως ορίζουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

ΑΔ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι απόφοιτος Δημοτικού»

ΑΜ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι απόφοιτος Μέσης Εκπαίδευσης»

Π: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι απόφοιτος Πανεπιστημίου»

Χ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι χαμηλόμισθος»

Υ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι υψηλόμισθος».

Ζητούμε την πιθανότητα: $P(\Upsilon/\Pi) =;$

Δηλαδή: $P(Y/\Pi) = \dfrac{P(Y \cap \Pi)}{P(\Pi)} =;$

Ζητούμε δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Π «να είναι απόφοιτος Πανεπιστημίου», να βρούμε την πιθανότητα του Υ «να είναι υψηλόμισθος».

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$P(Y \cap \Pi) = \frac{N(Y \cap \Pi)}{N(\Omega)} = $$
$$= \frac{25}{40+5+25+60+5+25} = 0,15625$$

και

$$P(\Pi) = \frac{\mathrm{N}(\Pi)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{5+25}{40+5+25+60+5+25} = 0,1875$$

Πώς καταλαβαίνουμε αν το θέμα αναφέρεται σε «ΤΟΜΗ»;

Το σύμβολο $\cap$ ονομάζεται «**ΤΟΜΗ**» και εκφράζει την ταυτόχρονη πραγματοποίηση.

Λέξεις-Κλειδιά είναι: «**ταυτόχρονα**», ο συζευκτικός σύνδεσμος «**ΚΑΙ**».

Το $N(Y \cap \Pi)$ εκφράζει το πλήθος των ατόμων που είναι Υψηλόμισθοι και **ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ** απόφοιτοι Πανεπιστημίου.

Πόσοι είναι; Είναι **25** σε πλήθος!

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(Y/\Pi) = \frac{0,15625}{0,1875} = 0,8333 = 83,33\%$$

(ή **πιο γρήγορα**: $P(Y/\Pi) = \dfrac{25}{\boxed{25+5}} = 0,8333$)

Επίπεδο εκπαίδευσης	Μισθός	
	Χαμηλόμισθοι	Υψηλόμισθοι
Απόφοιτοι Δημοτικού	40	5
Απόφοιτοι Μέσης εκπαίδευσης	25	60
Απόφοιτοι Πανεπιστημίου	5	25

Το N(Ω) είναι το πλήθος ΟΛΩΝ των ατόμων. Προσθέτοντας όλα τα παραπάνω νούμερα βγαίνει 160!

Παράδειγμα (κατανόηση της ΤΟΜΗΣ ∩)

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι κάποιος απόφοιτος Μέσης Εκπαίδευσης και ταυτόχρονα υψηλόμισθος.

Λύση: Η πιθανότητα του ενδεχομένου μας, υπολογίζεται ως εξής:

$$P(AM \cap Y) = \frac{N(AM \cap Y)}{N(\Omega)} = \frac{60}{40+5+25+60+5+25} =$$
$$= \frac{60}{160} = 0,375 = 37,5\%$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(AM \cap Y) = 0,375 = 37,5\%$$

Το σύμβολο $\cap$ ονομάζεται «**ΤΟΜΗ**» και εκφράζει την **ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΗ** ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ.

Το $N(AM \cap Y)$ εκφράζει το πλήθος των ατόμων που είναι Απόφοιτοι Μέσης Εκπαιδευσης και **ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ** Υψηλόμισθοι.

Είναι πόσοι; Είναι **60** σε πλήθος!

Επίπεδο εκπαίδευσης	Μισθός	
	Χαμηλόμισθοι	Υψηλόμισθοι
Απόφοιτοι Δημοτικού	40	5
Απόφοιτοι Μέσης εκπαίδευσης	25	60
Απόφοιτοι Πανεπιστημίου	5	25

Παράδειγμα (κατανόηση της ΕΝΩΣΗΣ $\cup$)

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι κάποιος απόφοιτος Πανεπιστημίου ή χαμηλόμισθος.

Λύση: Η πιθανότητα του ενδεχομένου μας, υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} P(\Pi \cup X) &= P(\Pi) + P(X) - P(\Pi \cap X) = \\ &= \frac{5+25}{160} + \frac{40+25+5}{160} - \frac{5}{160} \\ &= \frac{95}{160} = 0,59375 = 59,375\% \end{aligned}$$

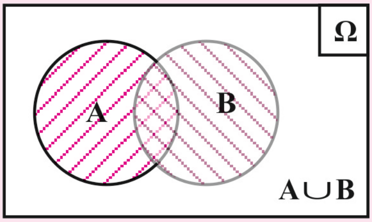
Πώς καταλαβαίνουμε αν θέμα αναφέρεται σε «ένωση»;

Το σύμβολο $\cup$ ονομάζεται «**ΕΝΩΣΗ**» και σημαίνει να πραγματοποιηθεί **ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ** το ένα ενδεχόμενο.

Λέξεις-Κλειδιά είναι: «**τουλάχιστον**» ή ο διαζευκτικός σύνδεσμος «**Ή**».

Τύπος υπολογισμού:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



2.3. Β. Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Bayes - Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

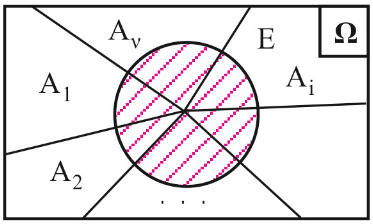
Έστω ότι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης που πραγματεύεται το εκάστοτε θέμα, «**τεμαχίζεται**» στα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ κλπ, όπου **δεν μπορούν** δύο οποιαδήποτε από αυτά να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Κάποιο από τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ θα πραγματοποιηθεί.
- Δεν μπορούν να γίνουν **συγχρόνως δύο** οποιαδήποτε από αυτά.

Άρα, θα πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$

Ακόμη, έστω το ενδεχόμενο Ε το οποίο όταβ πραγματοποιήται, τότε συμβαίνει ένα από τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$, ... A_i κλπ.:

Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί ένα από τα ενδεχόμενα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$, ... A_i υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί το Ε, βάσει του ακόλουθου τύπου:



$$\boxed{P(\mathbf{A}_i/E)} = \frac{P(\mathbf{A}_i)\cdot P(E/\mathbf{A}_i)}{P(E)}$$

(Θεώρημα του Bayes)

ΠΡΙΝ εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο, πρέπει πρωτίστως να βρούμε την πιθανότητα $\mathrm{P}(\mathrm{E})$:

Είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου Ε το οποίο «σχετίζεται» με **ΟΛΑ** τα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots$ κ.λπ. (*βλέπε Σχήμα*).

Για αυτό λοιπόν και το θεώρημα, μέσω του οποίου θα υπολογίσουμε την P(E), ονομάζεται Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

Είναι:

$$\boxed{P(E)} = P(\mathbf{A}_1 \cap E) + P(\mathbf{A}_2 \cap E) + \ ... \ + P(\mathbf{A}_i \cap E)$$

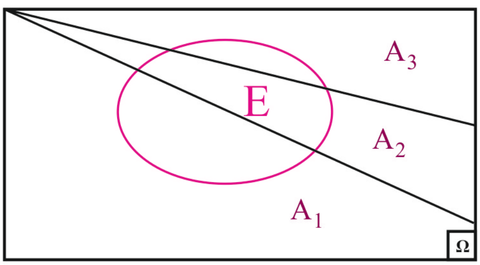
$$= \underbrace{P(\mathbf{A}_1) \cdot P(E/\mathbf{A}_1)}_{\text{αφορά το ενδεχόμενο } \mathrm{A}_1} + \underbrace{P(\mathbf{A}_2) \cdot P(E/\mathbf{A}_2)}_{\text{αφορά το ενδεχόμενο } \mathrm{A}_2} + ... \ + \underbrace{P(\mathbf{A}_i) \cdot P(E/\mathbf{A}_i)}_{\text{αφορά το ενδεχόμενο } \mathrm{A}_i}$$

Παράδειγμα: Όταν κάποιος παίρνει λεωφορείο για να πάει στη δουλειά του, πηγαίνει καθυστερημένος στο 30% των περιπτώσεων, όταν παίρνει ταξί πηγαίνει καθυστερημένος στο 10% των περιπτώσεων και όταν παίρνει το μετρό πηγαίνει καθυστερημένος στο 40% των περιπτώσεων.
Γενικά, προτιμάει λεωφορείο στο 70%, ταξί στο 20% των περιπτώσεων και μετρό στο 10% των περιπτώσεων.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μία μέρα;
- (β) Εάν μία μέρα πήγε καθυστερημένος στη δουλειά του, ποια είναι η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο;

Λύση: Ορίζουμε **ΠΡΩΤΙΣΤΩΣ** τα ακόλουθα ενδεχόμενα για έναν τυχαία επιλεγμένο άνθρωπο:

A_1: «να πάει στη δουλειά του με λεωφορείο»
A_2: «να πάει στη δουλειά του με ταξί»
A_3: «να πάει στη δουλειά του με μετρό»
Ε: «να καθυστερήσει να πάει στη δουλειά του μία μέρα»



Αναπαράσταση των ενδεχομένων **A_1, A_2, A_3** και του **κοινού** ενδεχομένου Ε

Παράδειγμα 2: Η αξία των διαμερισμάτων σε ένα δήμο ακολουθεί την **Κανονική Κατανομή** με μέση αξία 100 χιλιάδες Ευρώ και τυπική απόκλιση 30 χιλιάδες. Ποια είναι η πιθανότητα για ένα τυχαία επιλεγμένο διαμέρισμα να έχει αξία τουλάχιστον 60 χιλιάδες Ευρώ;

Λύση: Ορίζουμε ως τυχαία μεταβλητή:

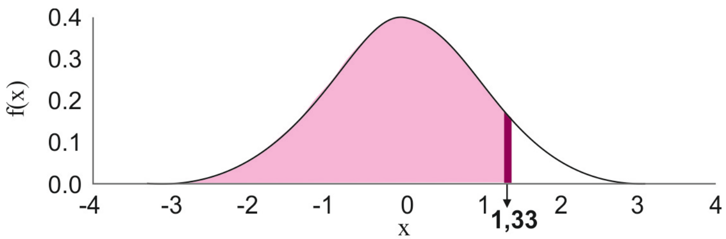
X: «*η αξία (σε χιλιάδες ευρώ) των διαμερισμάτων σε ένα δήμο» με:*

- μ =100 χιλιάδες ευρώ (*η μέση τιμή*)
- σ = 30 χιλιάδες Ευρώ (*η τυπική απόκλιση*)

Ζητούμε την πιθανότητα:

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{60-100}{30}\right) =$$
$$= P\left(Z \geq -\frac{40}{30}\right) =$$
$$= P(Z \geq -1,33) =;$$

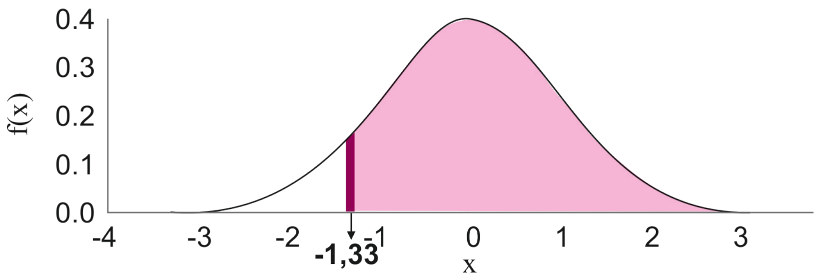
Ας παρατηρήσουμε την ομορφιά της συμμετρίας της καμπύλης της Κανονικής Κατανομής, με τις ακόλουθες δύο εικόνες:



Διάγραμμα 1

Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο **διάγραμμα 1**, δηλώνει την πιθανότητα $P(Z \leq 1,33)$

Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο **διάγραμμα 2**, δηλώνει την πιθανότητα $P(Z \geq -1,33)$



Διάγραμμα 2

Παρατηρούμε ότι λόγω συμμετρίας της καμπύλης τα δύο χωρία έχουν την ίδια έκταση, το ίδιο εμβαδόν.

Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε:

$$\underbrace{\mathbf{P(Z \geq -1,33) = P(Z \leq 1,33)}}$$

ίσα εμβαδά, άρα ίσες πιθανότητες.

Γενικά λοιπόν:

$$P(Z \geq \mathbf{z_0}) = P(Z \leq -\mathbf{z_0})$$

Άρα, η προηγούμενη πιθανότητα υπολογίζεται πλέον ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{60-100}{30}\right) = \\ &= P\left(Z \geq -\frac{40}{30}\right) = P(Z \geq -1,33) = \\ &= P(Z \leq 1,33) = \\ &= 0,9082 = \underbrace{90,82\%} \end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα το λαμβάνουμε αυτομάτως από τους προηγούμενους πίνακες. Σε αυτούς εντοπίζουμε τον αριθμό 1,3 στην πρώτη στήλη και τον αριθμό 0,03 στην πρώτη γραμμή του πίνακα, οι οποίοι διασταυρώνονται στον αριθμό 0,9082.

Εναλλακτικά, σύμφωνα με όσα είχαμε διδαχθεί και στη Διωνυμική Κατανομή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το γενικότερο κανόνα:

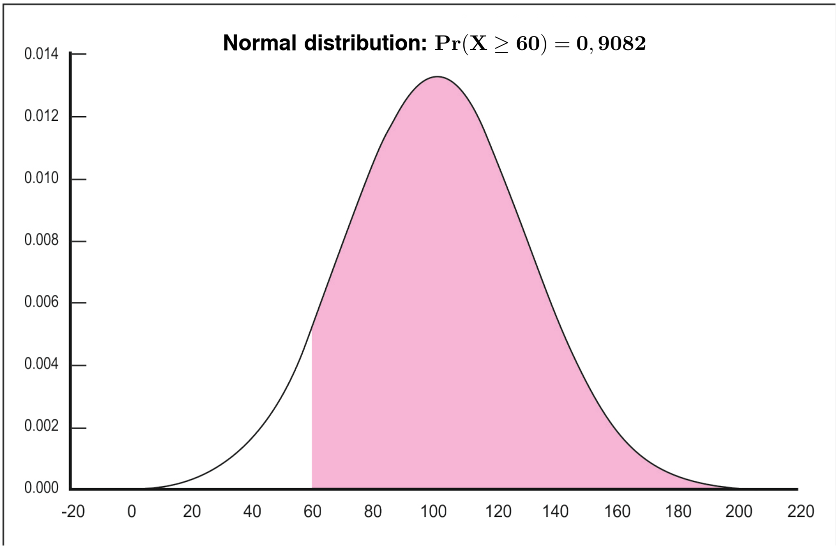
$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{Z} \geq -\mathbf{1,33}) = \text{ΟΛΑ - ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ}}$$

Μιας και μιλάμε για πιθανότητες, η **ΟΛΙΚΗ** τιμή της είναι το ποσοστό 100% δηλαδή το $\mathbf{1}$.

Το ερώτημα εστιάζει στις τιμές $\mathbf{Z} \geq -\mathbf{1,33}$, άρα οι προηγούμενες είναι οι τιμές $\mathbf{Z} < -\mathbf{1,33}$.

Οπότε:

$$P(Z \geq -1,33) = 1 - P(Z < -1,33) = \\ = 1 - 0,0918 = 0,9082 = 90,82\%$$



Παράδειγμα 3: Η αξία των διαμερισμάτων σε ένα δήμο ακολουθεί την **Κανονική Κατανομή** με μέση αξία 100 χιλιάδες Ευρώ και τυπική απόκλιση 30 χιλιάδες. Ποια είναι η πιθανότητα για ένα τυχαία επιλεγμένο διαμέρισμα να έχει αξία μεταξύ 70 χιλιάδες και 130 χιλιάδες Ευρώ;

Λύση: Ορίζουμε ως τυχαία μεταβλητή:

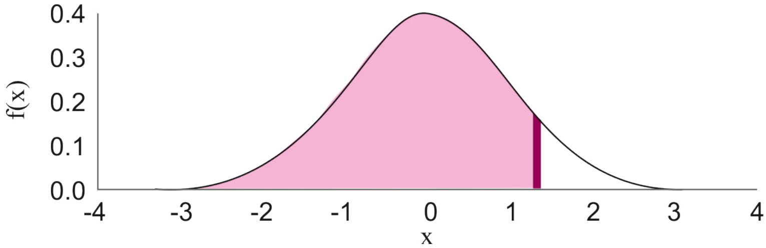
X: «*η αξία (σε χιλιάδες ευρώ) των διαμερισμάτων σε ένα δήμο*» με:

- μ =100 (*η μέση τιμή*)
- σ = 30 (*η τυπική απόκλιση*)

Ζητούμε την πιθανότητα:

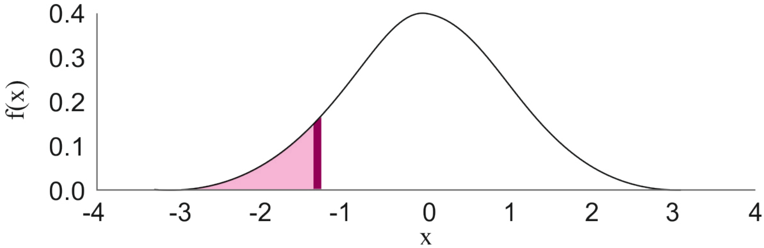
$$P(70 \leq X \leq 130) = P\left(\frac{70-100}{30} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{130-100}{30}\right) =$$
$$= P(-1,00 \leq Z \leq 1,00) = ;$$

Ας παρατηρήσουμε τη συμμετρία της καμπύλης της Κανονικής Κατανομής, με τις ακόλουθες εικόνες:



Διάγραμμα 1

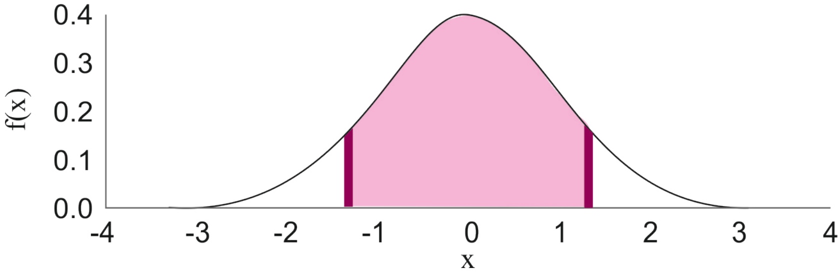
Αυτό το γραμμοσκιασμένο χωρίο δηλώνει την πιθανότητα $P(Z \leq 1,00)$



Διάγραμμα 2

Αυτό το γραμμοσκιασμένο χωρίο δηλώνει την πιθανότητα $P(Z \leq -1,00)$

Εάν από το ροζ χωρίο του **Διαγράμματος 1**, «*κόψουμε*» το χωρίο του **Διαγράμματος 2**, τότε λαμβάνουμε το ακόλουθο διάγραμμα:



Το γραμμοσκιασμένο αυτό χωρίο, εκφράζει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή Ζ να λάβει τιμές από -1 έως και 1. Δηλαδή εκφράζει την πιθανότητα $P(-1 \leq Z \leq 1)$

Η πιθανότητα $P(-1 \leq Z \leq 1)$, γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$P(-1 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1)$$

Γενικά λοιπόν ισχύει ότι:

$$\mathbf{P}(\alpha \leq \mathbf{Z} \leq \beta) = \mathbf{P}(\mathbf{Z} \leq \beta) - \mathbf{P}(\mathbf{Z} \leq \alpha)$$

<u>Άρα, η προηγούμενη πιθανότητα υπολογίζεται πλέον ως εξής</u>:

$$P(70 \leq X \leq 130) =$$

$$= P\left(\frac{70-100}{30} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{130-100}{30}\right) =$$

$$= P(-1,00 \leq Z \leq 1,00) =$$
$$= P(Z \leq 1,00) - P(Z \leq -1,00) =$$
$$= 0,8413 - 0,1587 = 0,6826 =$$
$$= 68,26\%$$

3.3. Θεωρία Παιγνίων

Η Θεωρία Παιγνίων αποτελεί μία μαθηματική μέθοδο ανάλυσης προβλημάτων σχετικών με τον τρόπο λήψης αποφάσεων σε συνθήκες ανταγωνισμού και συνεργασίας. Στο επίπεδο που αφορά την ύλη της ΔΕΟ 13, συναντούμε παίγνια με 2 παίκτες οι οποίοι συνήθως δρουν ανταγωνιστικά μεταξύ τους. Ένας παίκτης μπορεί να είναι ένα φυσικό πρόσωπο, μία εταιρεία, μία αθλητική ομάδα ή ένα κράτος. Λόγω της ανταγωνιστικότητας των 2 παικτών μεταξύ τους, όταν ο ένας κερδίζει τότε ο άλλος χάνει και το αντίστροφο.

Για αυτό και ο ένας παίκτης (ας τον ονομάσουμε «**κυρίαρχο**») ονειρεύεται να κερδίσει τα μέγιστα, ενώ ο άλλος (ο «**αντίπαλος**» επί της ουσίας) ονειρεύεται να χάσει τα ελάχιστα. Λογικό, έτσι; Φυσικά και ανάποδα να το πούμε, πάλι σωστό θα είναι το συμπέρασμά μας, αλλά είναι αναγκαίο να θεωρήσουμε ένα κοινό σημείο αναφοράς, ώστε να μιλούμε όλοι την ίδια «γλώσσα».

Ας μιλήσουμε συγκεκριμένα λοιπόν, με τον ακόλουθο πίνακα ως παράδειγμα, καθώς ένας τέτοιος πίνακας δίδεται στην εκφώνηση ενός θέματος Παιγνίων.

Παράδειγμα: Μία εταιρεία ζαχαροπλαστικής Α επιθυμεί να ανοίξει ένα καινούργιο κατάστημα σε μία πόλη. Έπειτα από μεγάλη αναζήτηση, κατέληξε σε 4 υποψήφιες τοποθεσίες (γραμμές $A_1 - A_4$), προκειμένου να ανοίξει το κατάστημά της. Ακριβώς την ίδια σκέψη έκανε και η ανταγωνίστριά της, η εταιρεία Β, επιχειρώντας να ανοίξει και εκείνη ένα μαγαζί σε μία από τις πέντε πιθανές τοποθεσίες (στήλες B_1–B_5) της ίδιας πόλης. Τα νούμερα στον πίνακα δείχνουν πόσα εκατομμύρια ευρώ θα κερδίσει ή θα χάσει η εταιρεία A για κάθε επιλογή τοποθεσίες που θα κάνει σε συνδυασμό με την αντίστοιχη επιλογή της B.

ο **ΚΥΡΙΑΡΧΟΣ** του παιγνίου είναι αυτός που είναι στα **αριστερά** του πίνακα, δηλαδή **εν προκειμένω** είναι ο A. **Τι ονειρεύεται; Να έχει μέγιστα κέρδη**.

ο **ΑΝΤΙΠΑΛΟΣ** του παιγνίου είναι αυτός που είναι στα **δεξιά** του πίνακα, δηλαδή εν προκειμένω είναι ο B. **Τι ονειρεύεται; Να έχει ελάχιστη ζημία**.

B

A

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	3	2	-1	0	2
A_2	4	-1	3	-2	1
A_3	0	1	-2	-3	-3
A_4	5	3	1	3	2

Συγκεκριμένα:

- εάν η εταιρεία A επιλέξει ως τοποθεσία την A_1 και η B επιλέξει τη B_2, τότε η εταιρεία A θα κερδίσει 2 εκατομμύρια ευρώ, εις βάρος της εταιρείας B η οποία θα χάσει 2 εκατομμύρια Ευρώ από αυτόν το συνδυασμό στρατηγικών.
- εάν η εταιρεία A επιλέξει ως τοποθεσία την A_3 και η B επιλέξει τη B_4, τότε η εταιρεία A θα χάσει 3 εκατομμύρια ευρώ, άρα η εταιρεία B θα κερδίσει 3 εκατομμύρια Ευρώ από αυτόν το συνδυασμό στρατηγικών.

(α) Να ελέγξετε εάν υπάρχει σημείο ισορροπίας στο παίγνιο, με αμιγείς στρατηγικές.

(β) Να διαγράψετε τις υποδεέστερες στρατηγικές για κάθε παίκτη, από τον παραπάνω πίνακα του παιγνίου.

(γ) Αφού τις διαγράψετε και σχηματίστε το νέο πίνακα που θα προκύψει, να βρείτε την άριστη στρατηγική για κάθε παίκτη και την τιμή του παιγνίου.

B

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Ελάχιστο Γραμμών	Maxmin
	A_1	3	2	-1	0	2	-1	
	A_2	4	-1	3	-2	1	-2	
	A_3	0	1	-2	-3	-3	-3	
A	A_4	5	3	1	3	2	1	1**
	Μέγιστα στηλών	5	3	3	3	2		
	Minmax					2*		

Λύση: Τα τρία ζητούμενα ερωτήματα είναι και τα **ΚΑΤΑ ΣΕΙΡΑ** βήματα της **Μεθοδολογίας**:

(α) Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο **Minmax - Maxmin** στον παραπάνω νέο πίνακα, για να διερευνήσουμε την ύπαρξη σημείου ισορροπίας με αμιγείς στρατηγικές. **Πώς**;

Επεξήγηση 1 *

Από τις ΜΕΓΙΣΤΕΣ (**max**) τιμές που βρήκαμε σε κάθε στήλη, βρίσκουμε τη μικρότερη (**min**). Από τα νούμερα λοιπόν στο κόκκινο πλαίσιο η μικρότερη είναι το 2.

(151,1)

Άρα Minmax (που σημαίνει «το μικρότερο από τα μεγαλύτερα») είναι το **2**.

Για κάθε **στήλη** βρίσκουμε
το **ΜΕΓΙΣΤΟ** της:

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
3	2	-1	0	2
4	-1	3	-2	1
0	1	-2	-3	-1
5	3	1	3	2
5	**3**	**3**	**3**	**2**

Επεξήγηση 2 **

Από τις ΕΛΑΧΙΣΤΕΣ (**min**) τιμές που βρήκαμε σε κάθε γραμμή, βρίσκουμε τη μεγαλύτερη (**max**). Από τα νούμερα λοιπόν στο κόκκινο πλαίσιο η μεγαλύτερη είναι το 1.

Για κάθε **γραμμή**
βρίσκουμε το **ΕΛΑΧΙΣΤΟ** της:

A						
A_1	3	2	-1	0	2	**-1**
A_2	4	-1	3	-2	1	**-2**
A_3	0	1	-2	-3	-1	**-3**
A_4	5	3	1	3	2	**1**

Για να υπάρχει σημείο ισορροπίας στο παίγνιο, με αμιγείς στρατηγικές, θα πρέπει:

Minmax = Maxmin

η οποία σχέση δεν ικανοποιείται, διότι εν προκειμένω έχουμε: **Minmax ≠ Maxmin**, διότι: **2 ≠ 1**, οπότε έχουμε σημείο ισορροπίας το οποίο προσδιορίζεται όχι με αμιγείς, αλλά με μεικτές στρατηγικές.

Ειδική Περίπτωση

B

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Ελάχιστο Γραμμών	Maxmin
A_1	3	2	-1	0	2	**-1**	
A_2	4	-1	3	-2	1	**-2**	
A_3	0	1	-2	-3	-1	**-3**	
A_4	5	3	2	1	2	**1**	**1**
Μέγιστα στηλών	**5**	**3**	**3**	**1**	**2**		
Minmax				**1**			

Αν είχαμε Minmax = Maxmin, τότε:

Έστω ότι είχαμε τον παραπάνω πίνακα, στον οποίον παρατηρούμε ότι όντως Minmax = Maxmin = **1**. Τότε συμπεραίνουμε ότι το παίγνιο έχει ισορροπία με **αμιγείς** στρατηγικές για τους δύο παίκτες. Δηλαδή ο κάθε παίκτης θα ακολουθήσει από **ΜΙΑ ΚΑΙ ΜΟΝΟ** στρατηγική για να φτάσει στο όνειρό του. Συγκεκριμένα:

- εάν η εταιρεία Α εφαρμόσει την στρατηγική A_4 τα μέγιστα κέρδη της θα ισούνται με 1 εκατομμύριο χρηματικές μονάδες.
- εάν η εταιρεία Β εφαρμόσει την στρατηγική B_4 η ελάχιστη ζημία της θα ισούνται με 1 εκατομμύριο χρηματικές μονάδες.

Γιατί 1 εκατομμύριο; Μα διότι Minmax=Maximin=1.

Ο αριθμός **1** ονομάζεται **τιμή** ή **αξία** ή **αναμενόμενη απόδοση** του παιγνίου.

Σκοπός είναι να βρούμε ποια/ποιες στρατηγικές του Α τον οδηγούν στο «όνειρο» του που είναι τα **μέγιστα κέρδη** και ποια/ποιες οδηγούν το Β στο δικό του «όνειρο» που είναι η **ελάχιστη ζημιά**. Δηλαδή να βρούμε την άριστη **στρατηγική** για κάθε παίκτη.

Εάν:

- η ιδανική στρατηγική είναι από μία για κάθε παίκτη, τότε λέμε ότι έχουμε **αμιγή** στρατηγική για κάθε παίκτη (όταν **Minmax = Maxmin**)
- οι ιδανικές στρατηγικές είναι από δύο για κάθε παίκτη (*δηλαδή μείξη 2 στρατηγικών*), τότε λέμε ότι έχουμε **μεικτή** στρατηγική για κάθε παίκτη (όταν **Minmax ≠ Maxmin**)

(β) Εάν **Minmax = Maxmin**, τότε η άσκηση μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα έχει τελειώσει και έχουμε βρει την άριστη στρατηγική για κάθε παίκτη, καθώς επίσης και την τιμή (*αναμενόμενη απόδοση*) του παιγνίου (βλέπε «**Ειδική Περίπτωση**» στην προηγούμενη σελίδα).

Εάν όμως **Minmax ≠ Maxmin**, τότε θα πρέπει να περιμένουμε μία μείξη από δύο στρατηγικές για κάθε παίκτη. Άρα, στόχος μας είναι ο πίνακας να μείνει **ΜΟΝΟ με 2 γραμμές αλλά και ΜΟΝΟ με 2 στήλες**, δηλαδή να έρθει σε μορφή **2x2**.

Είναι λοιπόν το επόμενο βήμα της Μεθοδολογίας των Παιγνίων το οποίο ονομάζεται **Διαγραφή των Υποδεέστερων Στρατηγικών για κάθε Παίκτη**. **Τι σημαίνει αυτό**;

Υποδεέστερες στρατηγικές είναι οι **βλαβερές** για κάθε παίκτη, δηλαδή αυτές που δε θέλουν το συμφέρον του!

- Ποιο είναι το συμφέρον του «**κυρίαρχου**» **Α**; Τα **μέγιστα κέρδη**!
  Υποδεέστερη λοιπόν για τον Α, θα είναι μία στρατηγική (γραμμή) που του φέρνει μικρά κέρδη, **την οποία και διαγράφουμε.**
- Ποιο είναι το συμφέρον του «**αντιπάλου**» **Β**; Η **ελάχιστη ζημία**!
  Υποδεέστερη λοιπόν για τον Β, θα είναι μία στρατηγική (στήλη) που του φέρνει μεγάλη ζημιά, **την οποία και διαγράφουμε.**

Συνοψίζοντας λοιπόν, διαγράφουμε:

ΠΡΩΤΑ **τη γραμμή/-ες** με τα μικρότερα (ή ίσα) νούμερα έναντι μίας άλλης γραμμής και

ΕΠΕΙΤΑ **την στήλη/-ες στήλες** με τα μεγαλύτερα (ή ίσα) νούμερα έναντι μίας άλλης στήλης.

ΠΑΝΤΑ ξεκινάμε με τη διαγραφή ΓΡΑΜΜΩΝ

Σύμφωνα λοιπόν με τον **αρχικό πίνακα** του **Παραδείγματός** μας, για την εταιρεία Α, **διαγράφουμε τη γραμμή A_1**, διότι είναι υποδεέστερη της A_4 (τα στοιχεία δηλαδή της γραμμής A_1 είναι όλα μικρότερα (*ή και ίσα*) των αντίστοιχων της γραμμής A_4. Επίσης, **διαγράφουμε τη γραμμή A_3**, διότι είναι υποδεέστερη της A_1 (τα στοιχεία δηλαδή της γραμμής A_3 είναι όλα μικρότερα (*ή και ίσα*)