ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Θετικών & Οικονομικών Σπουδών
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- Α1. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 76 (Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών)
- Α2. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 155 (Ορισμός Κυρτής Συνάρτησης)
- Α3. Σχολικό Βιβλίο, σελ. 216 (Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού)
- Α4.
  - α. Σωστό (σελ 25)
  - β. Σωστό (σελ 52)
  - γ. Λάθος (σελ 114)
  - δ. Λάθος (σελ 142)
  - ε. Σωστό (σελ 212)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ $g: [1,\infty) \to \mathbb{R}$

Είναι $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ $h: [1,\infty) \to \mathbb{R}$

Η $f = \frac{g}{h}$ ορίζεται στο $[1,\infty)$

εκτός των σημείων αυτού που $h(x) \neq 0$

Είναι $h(1) = 0$

Άρα η $f: (1,\infty) \to \mathbb{R}$ και

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Η $r = g \cdot h$ ορίζεται στο $[1,\infty)$

και είναι $r(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2-1}{x} = x - \frac{1}{x}$

Β2

Είναι $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

Για $x > 1$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

Άρα $f((1,\infty))=(1,\infty)$

Έστω $y\in(1,\infty)$

Είναι $f(x)=y$ αν και μόνο αν

$1+\frac{2}{x-1}=y$ δηλαδή $\frac{2}{x-1}=y-1$

ή $x-1=\frac{2}{y-1}$ ή $x=1+\frac{2}{y-1}=f(y)$

Άρα f^{-1} ορίζεται και $f^{-1}=f$

B3

Είναι $r:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής

Θα εξετάσουμε για ασύμπτωτη στο ∞

Είναι $\lim\limits_{x\to\infty} r(x)-x=\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{1}{x}=0$

Από τον ορισμό της ασύμπτωτης

παίρνουμε ότι η $y=x$ είναι

ασύμπτωτη της r στο ∞.

Β4

Για $x \in (1, \infty)$ είναι $f^{-1}(f(x)) = x$

Επειδή στην εξίσωση υπάρχει το $f(x)$

θα πρέπει να βρούμε λύσεις στο $(1, \infty)$

Η εξίσωση γίνεται

$x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x}$ δηλαδή $x^3 = x + 4x^2 - 4$

Έχουμε $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

Είναι $x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x-4) - (x-4) =$

$= (x^2 - 1)(x-4) = (x-1)(x+1)(x-4)$

Η μόνη ρίζα της τελευταίας που βρίσκεται στο $(1, \infty)$ είναι η $x = 4$

Μοναδική ρίζα η $x = 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1

Η f είναι συνεχής στο 2.

Πρέπει $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} -2x+4+e^\lambda = -4+4+e^\lambda = e^\lambda$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -x^2+4x-3+\lambda = -4+8-3+\lambda = \lambda+1$$

$f(2)=\lambda+1$

Θα είναι συνεχής στο 2 αν και μόνο αν $e^\lambda=\lambda+1$

Είναι γνωστό ότι για $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1$ με ισότητα μόνο για $x=0$

Άρα $\lambda=0$.

Γ2

Για $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)=-2$

Για $x\in(2,\infty)$ είναι

$f'(x)=-2x+4=-2(x-2)<0$

Αφού $f'(x)<0$ για $x\in(0,2)\cup(2,\infty)$

και η f είναι συνεχής στο 2

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο

$[0,\infty)$ (σελ 144 σχολικό)

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα

στο $[0,\infty)$ στο 0 θα έχει

ολικό μέγιστο το $f(0)=5$

Γ3

i) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$

Για να ικανοποιεί τις υποθέσεις του

Θ.Μ.Τ πρέπει να είναι παραγωγίσιμη

στο $(0,3)$

Εκτός του σημείου 2 η f είναι

παραγωγίσιμη

Είναι

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x^2-4x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}-\frac{(x-2)^2}{x-2}=0$$

Αφού $\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

η f δεν παραγωγίζεται στό 2

Άρα δεν ικανοποιεί τίς υποθέσεις του Θ.Μ.Τ στό $[0,3]$

ii) Η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-5}{3}=-\frac{5}{3}$$

Γιά νά είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στό σημείο $(\alpha, f(\alpha))$ παράλληλη στην ευθεία πρέπει και αρκεί $f'(\alpha)=-\frac{5}{3}$

Αλλά γιά $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)=-2\neq-\frac{5}{3}$

Γιά $x\in(2,3)$ είναι

$f'(x)=-2x+4.$

$-2x+4=-\frac{5}{3}$ γίνεται $-6x+12=-5$

Δηλαδή $6x=17$ ή $x=\frac{17}{6}$

Αφού $2<\frac{17}{6}<3$ για $\alpha=\frac{17}{6}$

Έχουμε ότι η εφαπτομένη της C_f

στό $(\alpha, f(\alpha))$ είναι παράλληλη στην ευθεία

Γ4

Τό κινητό κινείται πάνω στην

ευθεία $x=2$ και σέ κάθε χρονική

στιγμή έχει $y=0{,}5t=\frac{1}{2}t$

Τό $f(2)=1$

Θά συναντήσει την γραφική

παράσταση της συνάρτησης f

στό σημείο $(2,1)$

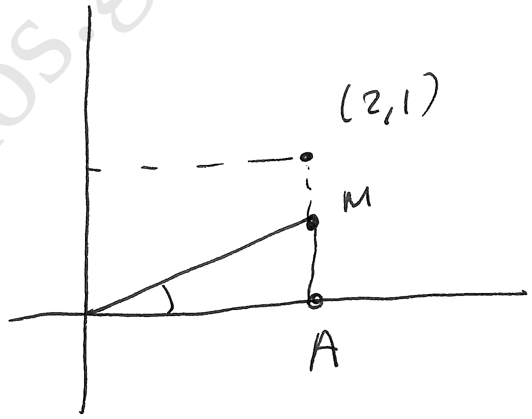
Άρα θά τό συναντήσει την χρονική

στιγμή $t_0=2$

Τό σημείο Μ θά είναι $\left(2, \frac{1}{2}t\right)$

Είναι

$$\varepsilon\varphi\, \omega(t) = \frac{\frac{1}{2}t}{2} = \frac{t}{4} \quad (1)$$



Ὁ ρυθμός πού αὐξάνει ἡ γωνία ω στό $t_0 = 2$ είναι $\omega'(2)$

Παραγωγίζοντας τήν (1) έχουμε

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\,\omega'(t) = \frac{1}{4}$$

Άρα $\omega'(2) = \frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu^2\omega(2)$

$$\sigma\upsilon\nu\,\omega(2) = \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Άρα $\omega'(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

Άρα ὁ ρυθμός πού αὐξάνει ἡ γωνία στό δοσμένο σημείο είναι $\frac{1}{5}$ rad/sec

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Είναι $f'(x) = \dfrac{(\ln x + ax)' x - (\ln x + ax)(x)'}{x^2} =$

$= \dfrac{\left(\frac{1}{x} + a\right)x - \ln x - ax}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

Έχουμε ότι $f'(x) > 0$ γιά $x < e$

και $f'(x) < 0$ γιά $x > e$

Συμπεραίνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στό $(0, e]$, γνησίως φθίνουσα στό $[e, \infty)$ και στό e παίρνει ολικό μέγιστο τό

$f(e) = \dfrac{1 + ae}{e} = \dfrac{1}{e} + a$

Αφού $f((0, \infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$

θά πρέπει $\frac{1}{e} + a = 1 + \frac{1}{e}$

Δηλαδή $a = 1$

Δ2

Είναι $f(x) = \dfrac{\ln x + x}{x}$

Γιά $x \geq 1$ είναι $f(x) > 0$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρίζα.

Στό $(0,1)$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα $f((0,1)) = \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (\ln x + x)\cdot\frac{1}{x} = (-\infty)(\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x + x}{x} = 1$$

Άρα $f((0,1)) = (-\infty, 1)$

Άρα η f έχει μοναδική ρίζα στό $(0,1)$

Επειδή $f(1) > 0$ γιά νά είναι η ρίζα στό $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ πρέπει νά δείξουμε ότι $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$

Αλλά (σχολικό σελ 148)

είναι $\ln x \le x-1$ με ισότητα μόνο

γιά $x=1$ έχουμε

$\ln\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - 1$ ή $\ln\frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 0$

Άρα $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ οπότε

η ρίζα βρίσκεται στο $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Δ3 i) Είναι $f(4) = \dfrac{\ln 4 + 4}{4} = \dfrac{2\ln 2 + 4}{4} =$

$= \dfrac{\ln 2 + 2}{2} = f(2)$

Στο $(0, e]$ η f είναι γνησίως

αύξουσα οπότε και 1-1

Άρα η $f(x) = f(2)$ έχει μοναδική

ρίζα την $x=2$

Στο $[e, \infty)$ η f είναι γνησίως

φθίνουσα οπότε και 1-1

Άρα η $f(x)=f(4)$ έχει μοναδική ρίζα την $x=4$

Άρα η $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$

ii) Η $2^x \le x^2$ γίνεται $x\ln 2 \le 2\ln x$

Δηλαδή $\frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x}$ ή $1+\frac{\ln 2}{2} \le 1+\frac{\ln x}{x}$

Άρα η $2^x \le x^2$ είναι ίδια με την

$f(2) \le f(x)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$

Άρα είναι $f(2)\le f(x)$ για $x\in[2,e]$

και $f(2)>f(x)$ για $x\in(0,2)$

Αφού $f(2)=f(4)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,\infty)$ θα είναι $f(2)\le f(x)$ για $x\in[e,4]$

και $f(2)>f(x)$ για $x\in(4,\infty)$

Τελικά $f(x)\ge f(2)$ αν και μόνο αν $x\in[2,4]$

Δ4.

Είναι $E = \int_{-\ln 2}^{0} |g(x)| dx =$

$= \int_{-\ln 2}^{0} |f(e^x)| \frac{1-x}{e^x} dx$ αφου για $x<0$ είναι $1-x>0$

Μπορούμε να το γράψουμε

$E = \int_{\ln 1/2}^{0} |f(e^x)| \frac{1-x}{e^x} dx$

Κανουμε αλλαγή μεταβλητης

$t = e^x$

$x = \ln\frac{1}{2} \rightarrow t = \frac{1}{2}$

$x = 0 \rightarrow t = 1$

$x = \ln t \quad dx = \frac{1}{t} dt$

Άρα

$$E=\int_{1/2}^{1}|f(t)|\,\frac{1-\ln t}{t^2}\,dt$$

Παρατηρούμε ότι $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$

Άρα

$$E=\int_{1/2}^{1}|f(t)|\,f'(t)\,dt$$

Η $f(x)=0$ έχει ρίζα στο $(\frac{1}{2},1)$ (ερώτημα Δ2) έστω x_0

Είναι $f(x)<0$ για $x\in(\frac{1}{2},x_0)$

και $f(x)>0$ για $x\in(x_0,1)$

Άρα

$$E=-\int_{1/2}^{x_0}f(t)f'(t)\,dt+\int_{x_0}^{1}f(t)f'(t)\,dt$$

$$= -\frac{1}{2} f^2(t)\Big|_{1/2}^{x_0} + \frac{1}{2} f^2(t)\Big|_{x_0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{2} f^2(x_0) + \frac{1}{2} f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} f^2(1) - \frac{1}{2} f^2(x_0)$$

Αλλά $f(x_0) = 0$

Άρα τελικά

$$E = \frac{1}{2}\left[f^2\left(\frac{1}{2}\right) + f^2(1)\right]$$

$$f(1) = 1 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + 1 = 2\ln\frac{1}{2} + 1 =$$

$$= -2\ln 2 + 1$$

Άρα $E = \frac{1}{2}\left[1 + (2\ln 2 - 1)^2\right]$