ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ευχαριστίες

Από το 1985 στην εκπαίδευση για φοιτητές ΕΜΠ και ΑΕΙ και από το 2000 στην παροχή εκπαιδευτικών υπηρεσιών για το ΕΑΠ, χαρακτηριζόμενοι από πάθος και μεράκι, δημιουργήσαμε τη δεύτερη δεκαετία του 21ου αιώνα το Φοιτητικό Online Φροντιστήριο arnos.gr για όλους τους φοιτητές των ΑΕΙ - ΕΑΠ - ΜΤΧ. Έως σήμερα, χιλιάδες φοιτητές, έχουν αποκτήσει το πτυχίο τους με τη συμβολή των καθηγητών μας. Συνεχίζουμε με γνώμονα την καινοτομία και την προσωπική επιτυχία του φοιτητή.

Διαθέτουμε εκτός από το πλούσιο εκπαιδευτικό υλικό της ιστοσελίδας μας και τον υπεύθυνο καθηγητή του μαθήματος που διασφαλίζουν την πλήρη φροντίδα και διδακτική κάλυψη των αναγκών κάθε φοιτητή εξατομικευμένα και το συγκεκριμένο βιβλίο-βοήθημα με το οποίο ισχυροποιούμε πλήρως την προετοιμασία του φοιτητή. Το βοήθημα έχει διαμορφωθεί και επιμεληθεί με προσεκτικά σχεδιασμένο τρόπο, ώστε να αποτυπώνονται με απλό και κατανοητό τρόπο όλα όσα χρειάζεται να γνωρίζουμε αναφορικά με τη Θεωρία, τη Μεθοδολογία και τα Παραδείγματα σε κάθε διδακτική ενότητα της ύλης.

Θα ήθελα να εκφράσω από την καρδιά μου τις ευχαριστίες μου στον κ. Βασίλειο Τσιλιβή εκλεκτό δάσκαλο και συνεργάτη που επιμελήθηκε και περάτωσε την εκπόνηση του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού βοηθήματος, στα πλαίσια της άριστης και εποικοδομητικής μας συνεργασίας όλα αυτά τα χρόνια.

CEO & Founder Arnos Online Education
Ιωάννης Π. Κρόκος

Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Αγαπητέ σπουδαστή του Κέντρου ΑΡΝΟΣ,

Το παρόν διδακτικό εγχειρίδιο είναι ένα βοήθημα-εκπαιδευτική πρόταση του Κέντρου μας που απευθύνεται στους φοιτητές του μαθήματος «Ποσοτικές Μέθοδοι-Επιχειρησιακή Στατιστική» των ΑΕΙ - ΕΑΠ - ΜΤΧ. Περιλαμβάνει όλη την απαραίτητη Θεωρία με τρόπο απλό και κατανοητό, η οποία συνοδεύεται από εικόνες, παραδείγματα και στοχευμένη μεθοδολογία που σε βοηθούν να κατανοήσεις την ύλη γρήγορα και ουσιαστικά. Πρόκειται για ένα εκπαιδευτικό σύγγραμμα μικρό σε όγκο, με όλες τις απαραίτητες πληροφορίες που διακρίνεται για τον απλό και καθαρό λόγο του και το οποίο δεν αφήνει αναπάντητα ερωτήματα.

Τα χαρακτηριστικά αυτά σε συνδυασμό με την επιστημονικότητά του, σε οδηγούν βήμα-βήμα στην βαθμιαία και στέρεα οικοδόμηση της γνώσης με πληρότητα και σαφήνεια. Ο εύληπτος τρόπος παρουσίασης της ύλης και η προσεκτική επιλογή των παραδειγμάτων, λειτουργούν συμπληρωματικά της Θεωρίας και εξασφαλίζουν την κατανόηση της ύλης.

Με εφόδιο αυτό το εγχειρίδιο μπορείς να αξιοποιήσεις εύκολα και κατανοητά τις υπηρεσίες που προσφέρει διαδικτυακά το (εξ αποστάσεως) Κέντρο Σπουδών ΑΡΝΟΣ, και να μελετήσεις με δομημένη σκέψη το πλήρες υλικό Video-Διδασκαλίας σε Θεωρία, Μεθοδολογία και Θέματα Εξετάσεων που θα βρεις αναρτημένο στην ιστοσελίδα www.arnos.gr

Να θυμάσαι ότι η **προσπάθεια ανταμείβεται και οι θυσίες τελικά δικαιώνονται**. Μην περιορίζεις τον πήχη της επίδοσής σου, απλώς δώσε ό,τι παραπάνω και όσο περισσότερο μπορείς. **Έχεις δυνατότητες παραπάνω απ' όσο νομίζεις...** γι αυτό τόλμησε και μη φοβάσαι. Άλλωστε, η επιτυχία στη ζωή μετριέται αποκλειστικά από το κουράγιο και τη δύναμη που δείξαμε στις μάχες που δώσαμε. Για αυτό να σε οπλίζει η δύναμη, η αισιοδοξία και η ελπίδα και να επικεντρώσεις τη συνείδησή σου μόνο σε αυτά που επιθυμείς.

Σου ευχόμαστε ολόψυχα Καλή Επιτυχία και Κάθε Δύναμη.

Βασίλειος Κ. Τσιλιβής
Καθηγητής Μαθηματικών

ΜΕΡΟΣ 1ο

Επιχειρησιακή Στατιστική

Το συγκεκριμένο μέρος αποτελεί το 1ο εκ των δύο συνολικά μερών της ύλης της Θ.Ε. ΔΗΔ 22. Βαθμολογικά το σύνολο των θεμάτων που συναντώνται σε αυτό το μέρος στις εξετάσεις της ενότητας, καταλαμβάνουν κατά μέσο όρο τις 6,5 έως 7 μονάδες με άριστα το 10.

Αποτελείται από τις ακόλουθες θεματικές περιοχές της ύλης:

- **Περιγραφική Στατιστική** (είναι η κλασική Στατιστική που συναντάται είτε για μη ομαδοποιημένα είτε για ομαδοποιημένα δεδομένα).
- **Δεσμευμένη Πιθανότητα** (ή «υπό συνθήκη πιθανότητα»).
- **Διωνυμική Κατανομή**
- **Κανονική Κατανομή** (ή αλλιώς Gauss Κατανομή)
- **Poisson Κατανομή**

Συνήθως από αυτήν την «τριπλέτα», ζητήται μία ή δύο κατανομές

- **Διαστήματα Εμπιστοσύνης - Έλεγχος υποθέσεων**

Και σε αυτό το μέρος της ύλης, λαμβάνουν χώρα οι Λέξεις-Κλειδιά. Οι Λέξεις-Κλειδιά είναι αυτές που αναγνωρίζοντας τες μέσα στο κείμενο, έστω και να μην έχουμε διαβάσει εξαρχής όλα τα λεγόμενά του, γνωρίζουμε ακριβώς τι θα κάνουμε για να το λύσουμε. Κι αυτό διότι κάθε Λέξη-Κλειδί συνδέεται με την αντίστοιχη **Μεθοδολογία Επίλυσης**.

1.1. Α. Περιγραφική Στατιστική (Μη Ομαδοποιημένα Δεδομένα)

Πρόκειται για το θέμα του οποίου η εκφώνηση μας παραθέτει ένα πλήθος από ορισμένα νούμερα, χωρίς καμία διάταξη ή ταξινόμηση. Για αυτόν ακριβώς το λόγο έχουμε να κάνουμε με **Μη Ομαδοποιημένα** ή αλλιώς με **Μη Ταξινομημένα Δεδομένα**. Για αυτά τα δεδομένα ζητείται να υπολογίσουμε ορισμένα εκ των ακόλουθων μέτρων:

- Αριθμητικός μέσος $\bar{X}$ (ή «μέσος όρος» ή «μέση τιμή»)
- Διάμεσος M
- Επικρατούσα τιμή T_0
- Εύρος R
- 1ο και 3ο τεταρτημόριο, Q_1 και Q_3 αντίστοιχα, ή οτιδήποτε σχετίζεται με αυτά όπως «το Ενδοτεταρτημορικό εύρος IR» ή «η τεταρτημοριακή απόκλιση Q».
- Διακύμανση S^2 (ή αλλιώς «Διασπορά»), καθώς και η Τυπική Απόκλιση S.
- Συντελεστής μεταβλητότητας (ή ανομοιογένειας) CV
- Ασυμμετρία και Κύρτωση

Η Περιγραφική Στατιστική έχει το πολύ θετικό στοιχείο ότι οι Λέξεις-Κλειδιά του θέματος που συναντώνται σε αυτήν, είναι ταυτόχρονα όλες οι προηγούμενες Λέξεις-Κλειδιά οι οποίες διατυπώνονται έτσι ακριβώς και το **Τυπολόγιο των Εξετάσεων**. Συνεπώς… με το που θα τις αντικρύσουμε, αντιλαμβανόμαστε ακριβώς και σε ποιο κεφάλαιο είμαστε, αλλά και ποιον τύπο πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ώστε να δώσουμε απάντηση!

Σημαντική Σημείωση:

Πριν ξεκινήσουμε να λύνουμε ένα Θέμα Μη Ομαδοποιημένων (*Μη Ταξινομημένων*) Δεδομένων, **η πρώτη μας κίνηση** είναι να βάλουμε τα νούμερα σε αύξουσα σειρά, δηλαδή σε σειρά **από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο**.
Προσοχή… **μην ξεχάσουμε κάποιο νούμερο**!

Παράδειγμα: Σε μία έρευνα καταγράφηκε ο Ωριαίος Μισθός ενός τυχαίου δείγματος 25 στελεχών μίας εταιρείας, όπως φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

3.15	2.15	2.23	2.34	3.63	2.48	3.41	3.54	2.55	2.64
2.68	2.75	2.78	2.85	2.76	2.94	2.96	3.05	2.45	2.52
3.34	2.62	2.04	2.89	3.25					

Να προσδιορίσετε τον αριθμητικό μέσο, τη διάμεσο, το εύρος, το ενδοτεταρτημοριακό εύρος, τη διασπορά (διακύμανση) και το συντελεστή μεταβλητότητας των δεδομένων.

Λύση: Έχουμε 25 μη ομαδοποιημένα δεδομένα. Η πρώτη μας κίνηση πριν ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς, είναι να βάλουμε τα δεδομένα μας σε **αύξουσα σειρά**:

2,040, 2,150, 2,230, 2,340, 2,450, 2,480, 2,520, 2,550, 2,620, 2,640, 2,680, 2,750, 2,760, 2,780, 2,850, 2,890, 2,940, 2,960, 3,050, 3,150, 3,250, 3,340, 3,410, 3,540, 3,630

Έχουμε λοιπόν, βάσει Τυπολογίου:

- **Αριθμητικός Μέσος**

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{25} X_i}{n} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{25}}{n} = \frac{70,000}{25} = 2,800$$

Προσθέτουμε όλα τα νούμερα μεταξύ τους (προκύπτει το 70).

Αυτό το αποτέλεσμα, το **διαιρούμε** με το πλήθος των αριθμών, δηλαδή με το 25.

- **Διάμεσος**: Καθώς το πλήθος 25 των αριθμών είναι περιττός (μονός) αριθμός, η διάμεσος υπολογίζεται ως εξής:

$$M = X_{\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)} = X_{\left(\frac{25+1}{2}\right)} = \underbrace{X_{(13)}} = 2,760$$

Το $X_{(13)}$: το 13ο νούμερο της αύξουσας σειράς.

Σημείωση: Όταν το πλήθος είναι **περιττός** αριθμός, τότε η διάμεσος είναι το **μεσαίο** νούμερο της αύξουσας σειράς, ενώ όταν είναι **άρτιος** τότε η διάμεσος είναι το **ημιάθροισμα των δύο μεσαίων** αριθμών.

Περιττοί (Μονοί): 1, 3, 5, 7, 9, 11, …, 25,…

Άρτιοι (Ζυγοί): 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

- **Εύρος**: $R = X_{max} - X_{min} = 3,630 - 2,040 = 1,590$
- **Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος: IR = $Q_3 - Q_1$**
- **Το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 υπολογίζεται ως εξής**:

$$Q_1 = X_{(A)} + \Delta \cdot [X_{(A+1)} - X_A],$$

όπου εκτελώντας τη διαίρεση:

$$\frac{i \cdot (n+1)}{4} = \frac{1 \cdot (25+1)}{4} = 6,5$$

Σημαντική Σημείωση:

Για να βρούμε το 1ο και 3ο τεταρτημόριο, πρώτα εκτελούμε τη διαίρεση (*για να βρούμε τη **θέση** του εκάστοτε τεταρτημορίου*): $\frac{i \cdot (n+1)}{4}$, βάζοντας όπου i = 1 ή i = 3. Από αυτήν τη διαίρεση προκύπτει ένας αριθμός, ως αποτέλεσμα.

Το **Α** είναι το **ακέραιο** μέρος αυτού του αριθμού και το **Δ είναι το δεκαδικό** μέρος αυτού του αριθμού.

οπότε: Α = 6 και Δ = 0,5

Αντικαθιστώντας στον τύπο του 1ου τεταρτημορίου, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} Q_1 &= X_{(6)} + 0,5 \cdot [X_{(6+1)} - X_{(6)}] = \\ &= X_{(6)} + 0,5 \cdot [X_{(7)} - X_{(6)}] = \\ &= 2,480 + 0,5 \cdot (2,520 - 2,480) = 2,500 \end{aligned}$$

Αντιστοίχως, το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 υπολογίζεται ως εξής:

$$Q_3 = X_{(A)} + \Delta \cdot [X_{(A+1)} - X_{(A)}],$$

όπου εκτελώντας τη διαίρεση: $\frac{i \cdot (n+1)}{4} = \frac{3 \cdot (25+1)}{4} = 19,5$,
οπότε: $A = 19$, Δ = 0,5

Αντικαθιστώντας στον τύπο του 3ου τεταρτημορίου, έχουμε ότι:

1.2. Α. Δεσμευμένη Πιθανότητα

Πριν μελετήσουμε το συγκεκριμένο εδάφιο, είναι ωφέλιμο **όπως μελετήσουμε πρωτίστως** από την ιστοσελίδα www.arnos.gr το **Εισαγωγικό Κεφάλαιο των Πιθανοτήτων** και των **Αρχών Απαρίθμησης**, απλώς και μόνον για στοχευμένη εξοικείωση με τη λογική και τη φιλοσοφία της συγκεκριμένης θεματικής περιοχής που συναντάται πάντα και παντού στην καθημερινότητά μας.

Υπάρχουν λοιπόν αρκετές περιπτώσεις στην καθημερινή μας ζωή, όπου υπολογίζουμε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα γεγονός, έχοντας πρωτίστως ήδη κάποιες πληροφορίες για αυτό.

Ως παράδειγμα Δεσμευμένης Πιθανότητας θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε την πιθανότητα το κασετόφωνο που έχουμε να είναι ελαττωματικό, δεδομένου ότι το αγοράσαμε από το κατάστημα Ε. Σε αυτό το παράδειγμα λοιπόν, η ποιότητα του κασετόφωνου που έχουμε στο σπίτι μας, *εξαρτάται/καθορίζεται/δεσμεύεται* από μία προϋπόθεση… από **μία συνθήκη**. Ποια; Από ποιο κατάστημα το αγοράσαμε!

Για αυτό και ασκήσεις όπου ζητείται ο υπολογισμός μίας κατάστασης **Α** υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει μία άλλη συνθήκη, **Β**, εντάσσονται στη θεματική κατηγορία των προβλημάτων **Δεσμευμένης Πιθανότητας**.

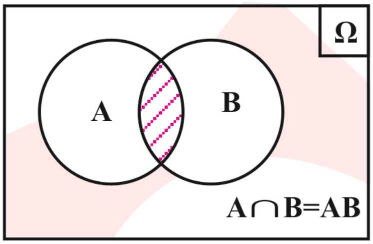
Η πιθανότητα αυτή συμβολίζεται ως P(**A**/**B**) και εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο **Α**, εάν γνωρίζουμε ότι έχει συμβεί το ενδεχόμενο **Β**. Υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\boxed{P(\mathbf{A}/B) = \frac{P(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})}{P(\mathbf{B})}, \text{ όταν } P(\mathbf{B}) \neq \mathbf{0}}$$

Ο τύπος $P(A/B)$ διαβάζεται ως: η πιθανότητα να ισχύει το γεγονός Α δεδομένου/εφόσον όταν έχει πραγματοποιηθεί το γεγονός Β.

Με βάση αυτήν τη σχέση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύουν και τα ακόλουθα:

- $P(\mathbf{A} \cap B) = P(\mathbf{A}/B) \cdot P(\mathbf{B})$
- $P(\mathbf{A} \cap B) = P(\mathbf{B}/\mathbf{A}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{A})$



Σημαντική Σημείωση:

Στην παραπάνω παρένθεση **ΠΑΝΤΑ** το **αριστερό** γράμμα εκφράζει το ενδεχόμενο του οποίου την πιθανότητα **ΖΗΤΟΥΜΕ** και το δεξί εκφράζει την **προϋπόθεση** (*που την αναγνωρίζουμε εύκολα διότι συνοδεύεται από μία εκ των παραπάνω Λέξεων-Κλειδιών*).

Παράδειγμα: Μία εταιρεία κατηγοριοποίησε τους υπαλλήλους της, σε χαμηλόμισθους και υψηλόμισθους, ανάλογα με το επίπεδο της εκπαίδευσής τους. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα:

Επίπεδο εκπαίδευσης	Μισθός	
	Χαμηλόμισθοι	Υψηλόμισθοι
Απόφοιτοι Δημοτικού	40	5
Απόφοιτοι Μέσης εκπαίδευσης	25	60
Απόφοιτοι Πανεπιστημίου	5	25

Εάν ένας από τους εργαζόμενους είναι απόφοιτος Πανεπιστημίου, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι υψηλόμισθος.

Λύση: Πρωτίστως ορίζουμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:

ΑΔ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι απόφοιτος Δημοτικού»

ΑΜ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι απόφοιτος Μέσης Εκπαίδευσης»

Π: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι απόφοιτος Πανεπιστημίου»

Χ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι χαμηλόμισθος»

Υ: το ενδεχόμενο «ένας εργαζόμενος να είναι υψηλόμισθος».

Ζητούμε την πιθανότητα: $P(\Upsilon/\Pi) =;$

Δηλαδή: $P(Y/\Pi) = \dfrac{P(Y\cap\Pi)}{P(\Pi)} =;$

Ζητούμε δεδομένης της πραγματοποίησης του ενδεχομένου Π «να είναι απόφοιτος Πανεπιστημίου», να βρούμε την πιθανότητα του Υ «να είναι υψηλόμισθος».

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$P(Y\cap\Pi) = \frac{N(Y\cap\Pi)}{N(\Omega)} =$$

$$= \frac{25}{40+5+25+60+5+25} = \frac{25}{160} = 0,15625$$

και

$$P(\Pi) = \frac{\mathrm{N}(\Pi)}{\mathrm{N}(\Omega)} = \frac{5+25}{40+5+25+60+5+25} = \frac{30}{160} = 0,1875$$

Πώς καταλαβαίνουμε αν το θέμα αναφέρεται σε «ΤΟΜΗ»;

Το σύμβολο $\cap$ ονομάζεται «**ΤΟΜΗ**» και εκφράζει την ταυτόχρονη πραγματοποίηση.

Λέξεις-Κλειδιά είναι: «**ταυτόχρονα**», ο συζευκτικός σύνδεσμος «**ΚΑΙ**».

Το $N(Y\cap\Pi)$ εκφράζει το πλήθος των ατόμων που είναι Υψηλόμισθοι και **ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ** απόφοιτοι Πανεπιστημίου.

Πόσοι είναι; Είναι **25** σε πλήθος!

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(Y/\Pi) = \frac{0,15625}{0,1875} = 0,8333 = 83,33\%$$

(ή **πιο γρήγορα**: $P(Y/\Pi) = \dfrac{25}{\boxed{25+5}} = 0,8333$)

Επίπεδο εκπαίδευσης	Μισθός	
	Χαμηλόμισθοι	Υψηλόμισθοι
Απόφοιτοι Δημοτικού	40	5
Απόφοιτοι Μέσης εκπαίδευσης	25	60
Απόφοιτοι Πανεπιστημίου	5	25

Το N(Ω) είναι το πλήθος ΟΛΩΝ των ατόμων. Προσθέτοντας όλα τα παραπάνω νούμερα βγαίνει 160!

Παράδειγμα (κατανόηση της ΤΟΜΗΣ $\cap$)

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι κάποιος απόφοιτος Μέσης Εκπαίδευσης και ταυτόχρονα υψηλόμισθος.

Λύση: Η πιθανότητα του ενδεχομένου μας, υπολογίζεται ως εξής:

$$P(AM \cap Y) = \frac{N(AM \cap Y)}{N(\Omega)} = \frac{60}{40+5+25+60+5+25} =$$
$$= \frac{60}{160} = 0,375 = 37,5\%$$

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα ισούται με:

$$P(AM \cap Y) = 0,375 = 37,5\%$$

Το σύμβολο $\cap$ ονομάζεται «**ΤΟΜΗ**» και εκφράζει την **ΤΑΥΤΟ-ΧΡΟΝΗ** ΠΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ.

Το $N(AM \cap Y)$ εκφράζει το πλήθος των ατόμων που είναι Απόφοιτοι Μέσης Εκπαιδευσης και **ΤΑΥΤΟΧΡΟΝΑ** Υψηλόμισθοι.

Είναι πόσοι; Είναι **60** σε πλήθος!

Επίπεδο εκπαίδευσης	Μισθός	
	Χαμηλόμισθοι	Υψηλόμισθοι
Απόφοιτοι Δημοτικού	40	5
Απόφοιτοι Μέσης εκπαίδευσης	25	60
Απόφοιτοι Πανεπιστημίου	5	25

Παράδειγμα (κατανόηση της ΕΝΩΣΗΣ $\cup$)

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προηγούμενου παραδείγματος, να υπολογίσετε την πιθανότητα να είναι κάποιος απόφοιτος Πανεπιστημίου ή χαμηλόμισθος.

Λύση: Η πιθανότητα του ενδεχομένου μας, υπολογίζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
P(\Pi \cup X) &= P(\Pi) + P(X) - P(\Pi \cap X) = \\
&= \frac{5+25}{160} + \frac{40+25+5}{160} - \frac{5}{160} \\
&= \frac{95}{160} = 0,59375 = 59,375\%
\end{aligned}
$$

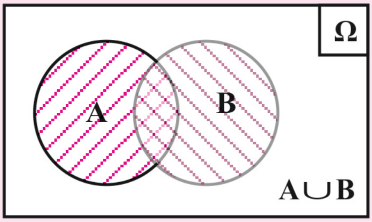
Πώς καταλαβαίνουμε αν θέμα αναφέρεται σε «ένωση»;

Το σύμβολο $\cup$ ονομάζεται «**ΕΝΩΣΗ**» και σημαίνει να πραγματοποιηθεί **ΤΟΥΛΑΧΙΣΤΟΝ** το ένα ενδεχόμενο.

Λέξεις-Κλειδιά είναι: «**τουλάχιστον**» ή ο διαζευκτικός σύνδεσμος «**Ή**».

Τύπος υπολογισμού:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



1.2. Β. Δεσμευμένη Πιθανότητα, Θεώρημα Bayes - Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας

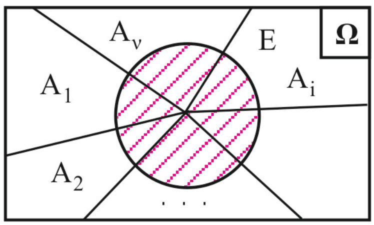
Έστω ότι ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος τύχης που πραγματεύεται το εκάστοτε θέμα, «**τεμαχίζεται**» στα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ κλπ, όπου **δεν μπορούν** δύο οποιαδήποτε από αυτά να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα, ισχύουν τα ακόλουθα:

- Κάποιο από τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ θα πραγματοποιηθεί.
- Δεν μπορούν να γίνουν **συγχρόνως δύο** οποιαδήποτε από αυτά.

Άρα, θα πραγματοποιηθεί ακριβώς ένα από τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \ldots$

Ακόμη, έστω το ενδεχόμενο Ε το οποίο όταβ πραγματοποιήται, τότε συμβαίνει ένα από τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots A_i$ κλπ.:

Τότε, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να συμβεί <u>ένα από τα ενδεχόμενα</u> $A_1, A_2, \ldots A_i$ υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί το Ε, βάσει του ακόλουθου τύπου:



$$P(\mathbf{A}_i/E) = \frac{P(\mathbf{A}_i) \cdot P(E/\mathbf{A}_i)}{P(E)}$$

(Θεώρημα του Bayes)

ΠΡΙΝ εφαρμόσουμε τον παραπάνω τύπο, πρέπει πρωτίστως να βρούμε την πιθανότητα $\mathrm{P(E)}$:

Είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου E το οποίο «σχετίζεται» με **ΟΛΑ** τα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ κ.λπ. (*βλέπε Σχήμα*).

Για αυτό λοιπόν και το θεώρημα, μέσω του οποίου θα υπολογίσουμε την P(E), ονομάζεται Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας.

Είναι:

$$\boxed{P(E)} = P(\mathbf{A}_1 \cap E) + P(\mathbf{A}_2 \cap E) + \ \ldots \ + P(\mathbf{A}_i \cap E)$$

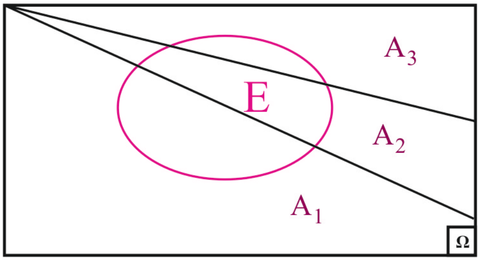
$$= \underbrace{P(\mathbf{A}_1) \cdot P(E/\mathbf{A}_1)}_{\text{αφορά το ενδεχόμενο } A_1} + \underbrace{P(\mathbf{A}_2) \cdot P(E/\mathbf{A}_2)}_{\text{αφορά το ενδεχόμενο } A_2} + \ldots + \underbrace{P(\mathbf{A}_i) \cdot P(E/\mathbf{A}_i)}_{\text{αφορά το ενδεχόμενο } A_i}$$

Παράδειγμα: Όταν κάποιος παίρνει λεωφορείο για να πάει στη δουλειά του, πηγαίνει καθυστερημένος στο 30% των περιπτώσεων, όταν παίρνει ταξί πηγαίνει καθυστερημένος στο 10% των περιπτώσεων και όταν παίρνει το μετρό πηγαίνει καθυστερημένος στο 40% των περιπτώσεων.
Γενικά, προτιμάει λεωφορείο στο 70%, ταξί στο 20% των περιπτώσεων και μετρό στο 10% των περιπτώσεων.

- (α) Ποια είναι η πιθανότητα να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μία μέρα;
- (β) Εάν μία μέρα πήγε καθυστερημένος στη δουλειά του, ποια είναι η πιθανότητα να πήγε με λεωφορείο;

Λύση: Ορίζουμε **ΠΡΩΤΙΣΤΩΣ** τα ακόλουθα ενδεχόμενα για έναν τυχαία επιλεγμένο άνθρωπο:

A$_1$: «να πάει στη δουλειά του με λεωφορείο»
A$_2$: «να πάει στη δουλειά του με ταξί»
A$_3$: «να πάει στη δουλειά του με μετρό»
E: «να καθυστερήσει να πάει στη δουλειά του μία μέρα».



Αναπαράσταση των ενδεχομένων **A$_1$, A$_2$, A$_3$** και του **κοινού** ενδεχομένου E

<u>Γνωρίζουμε τις ακόλουθες πιθανότητες</u>:

$$P(A_1) = 70\% = 0,70,\ \ P(A_2) = 20\% = 0,20,\ \ P(A_3) = 10\% = 0,10$$

και

$$P(E/A_1) = 30\% = 0,30, \quad P(E/A_2) = 10\% = 0,10, \quad P(E/A_3) = 40\% = 0,40$$

(α) Ζητούμε την πιθανότητα για έναν άνθρωπο να πάει καθυστερημένος στη δουλειά του μία μέρα. Δηλαδή ζητούμε την πιθανότητα P(E). Σύμφωνα με το **Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας**, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1)\cdot P(E/A_1) + P(A_2)\cdot P(E/A_2) + P(A_3)\cdot P(E/A_3) \\ &= 0,70\cdot 0,30 + 0,20\cdot 0,10 + 0,10\cdot 0,40 = 0,27 \ \text{ ή } \ 27\% \end{aligned}$$

(β) Ζητούμε την πιθανότητα να πήγε κάποιος με λεωφορείο στη δουλειά του μία μέρα, εάν γνωρίζουμε ότι πήγε καθυστερημένος. Δηλαδή ζητούμε την πιθανότητα P(A$_1$/E). Σύμφωνα με το **Θεώρημα του Bayes**, έχουμε το ακόλουθο:

$$P(A_1/E) = \frac{P(A_1)\cdot P(E/A_1)}{P(E)} = \frac{0,70\cdot 0,30}{0,27} = 0,7778 \ \text{ ή } \ 77,78\%$$

Σημαντική Σημείωση:

Πώς καταλαβαίνουμε αμέσως ότι το θέμα σχετίζεται με το Θεώρημα Bayes και το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, της Δεσμευμένης Πιθανότητας;

Απάντηση: Όταν δίδονται στην εκφώνηση του θέματος πιθανοτήτων, ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ από ένα ποσοστά! Από την στιγμή λοιπόν που έχουμε καταλάβει σε ποιο κεφάλαιο είμαστε, τότε πρωτίστως:

- «**Μεταφράζουμε**» τα λόγια της άσκησης, καταλαβαίνοντας ποια είναι τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3, \ldots$κλπ στα οποία «κομματιάζεται» το θέμα, αλλά και ποιο είναι το κοινό ενδεχόμενο **Ε** το οποίο σχετίζεται με καθένα από αυτά.
- Έτσι, βρίσκουμε ποιων ενδεχομένων τις **πιθανότητες**, εκφράζουν αυτά τα ποσοστά.

Τι μπορεί να μας ζητηθεί σε ένα τέτοιο θέμα;

1ο Σενάριο: Να υπολογίσουμε την πιθανότητα P(E) για το ΚΟΙΝΟ ενδεχόμενο E, με τη βοήθεια του **Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας** (**μόνον αυτό**)

2ο Σενάριο: Να μας ζητήσουν να υπολογίσουμε διαδοχικά:

α) την πιθανότητα P(E) για το ΚΟΙΝΟ ενδεχόμενο E, με τη βοήθεια του **Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας** και

1.3. Διωνυμική Κατανομή

Κατανομές Διακριτές και Συνεχείς

Τι ακριβώς εννοούμε όταν λέμε **Κατανομές Πιθανότητας**; Κατανομή της Τυχαίας Μεταβλητής είναι το πώς «κατανέμεται» η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τυχαίο γεγονός. Έχουμε δύο ειδών κατανομές:

- τις **διακριτές**, όπου ο δειγματικός χώρος Ω είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ή το σύνολο N των φυσικών αριθμών.
  Χαρακτηριστικά παραδείγματα διακριτών μεταβλητών είναι το πλήθος των εύστοχων βολών ενός παίκτη μπάσκετ ή το πλήθος των ασθενών που θεραπεύονται σε μια χώρα.
- τις **συνεχείς**, όπου ο δειγματικός χώρος είναι συνήθως όλο το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή ένα διάστημα αυτού.
  Χαρακτηριστικά παραδείγματα συνεχών μεταβλητών είναι το βάρος ή η κατανάλωση γάλακτος σε λίτρα

Τι σημαίνει όμως **Τυχαία Μεταβλητή**;
Τυχαία μεταβλητή είναι μία συνάρτηση $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, όπου το Ω είναι ο δειγματικός χώρος και μπορούμε για κάθε ενδεχόμενο A αυτού, να βρούμε την πιθανότητα P(A).

Σε θέματα Διωνυμικής κατανομής, η οποία αποτελεί μία **διακριτή κατανομή**, περιγράφεται μία κατάσταση η οποία επαναλαμβάνεται n πλήθος φορών. Η κατάσταση αυτή ονομάζεται **Διωνυμικό Πείραμα** το οποίο επαναλαμβάνεται n πλήθος φορών. Σε κάθε επανάληψη μπορεί να συμβεί ένα από συνολικά δύο ενδεχόμενα. Αυθαίρετα το ένα το καλούμε «**Επιτυχία**» και το άλλο καλείται «**Αποτυχία**».

Στην πραγματικότητα η Δι-ωνυμική κατανομή… σχετίζεται με ένα Δί-λημμα!

Χαρακτηριστικά τέτοια «διλήμματα» - παραδείγματα της Διωνυμικής κατανομής, είναι τα ακόλουθα:

- Ένας παίκτης μπάσκετ ρίχνει 20 βολές, όπου η κάθε μία βολή θα είναι εύστοχη (*ή άστοχη*). Το Διωνυμικό Πείραμα είναι η ρίψη της μπάλας.
  Εν προκειμένω έχουμε για το Διωνυμικό Πείραμα, n = 20 επαναλήψεις και η τυχαία μεταβλητή εκφράζει το πλήθος των εύστοχων (*ή των άστοχων*) βολών του παίκτη.

- Ένας φοιτητής απαντάει σε ένα διαγώνισμα που αποτελείται από 30 ερωτήσεις. Η κάθε μία θα απαντηθεί Σωστά (*ή Λάθος*).
  Εν προκειμένω έχουμε, n = 30 επαναλήψεις του Διωνυμικού Πειράματος και η τυχαία μεταβλητή εκφράζει το πλήθος των σωστών (*ή λανθασμένων*) απαντήσεων του φοιτητή.

- Σε ένα θάλαμο ενός στρατώνα υπάρχουν 40 φαντάροι. Ο καθένας ενδέχεται να φοράει Large ή όχι.
  Εν προκειμένω έχουμε, n = 40 επαναλήψεις του Διωνυμικού Πειράματος και η τυχαία μεταβλητή εκφράζει το πλήθος των φαντάρων που φορούν «Large» (*ή το πλήθος αυτών που δεν φορούν*).

Τύπος υπολογισμού πιθανοτήτων στη Διωνυμική Κατανομή:

$$\boxed{P(X=\kappa)=\frac{n!}{\kappa!\cdot(n-\kappa)!}\cdot p^{\kappa}\cdot(1-p)^{n-\kappa}, \kappa=0,1,2,3...,n}$$

όπου:

- X: το πλήθος των «ευνοϊκών» περιπτώσεων του Διωνυμικού Πειράματος.
- n: το πλήθος των επαναλήψεων του Διωνυμικού Πειράματος.
- p: η πιθανότητα να συμβεί σε κάθε επανάληψη το «ευνοϊκό» ενδεχόμενο (πιθανότητα Επιτυχίας).
- q: η πιθανότητα να μη συμβεί σε κάθε επανάληψη το «ευνοϊκό» ενδεχόμενο (πιθανότητα Αποτυχίας).

Ισχύει ότι:

1! = 1

2! = 1 · 2

3! = 1· 2 · 3

4! = 1· 2 · 3 · 4

5! = 1· 2 · 3 · 4 · 5

6! = 1· 2 · 3 · 4 · 5 · 6

κλ.π

⇨**SOS Αξίωμα**: 0! =1

⇨**SOS!!! Μεθοδολογική Παρατήρηση**:

Πώς αντιλαμβανόμαστε εάν το Θέμα σχετίζεται με την Διωνυμική Κατανομή;

Άπαξ και στο θέμα φαίνεται η περιγραφή ενός φαινομένου (Διωνυμικό Πείραμα) το οποίο επαναλαμβάνεται n πλήθος φορών και στην κάθε του επανάληψη πραγματοποιείται ένα από τα δυο συγκεκριμένα αποτελέσματα, τότε το θέμα αυτό είναι Θέμα Διωνυμικής Κατανομής.

Παράδειγμα: Μία νέα θεραπεία βελτιώνει την κατάσταση των πασχόντων με συγκεκριμένη πάθηση στο 30% των περιπτώσεων. Εάν εφαρμοστεί σε 9 πάσχοντες, ποια είναι η πιθανότητα:

- (i). Ακριβώς 5 από αυτούς να δουν βελτίωση;
- (ii). Το πολύ 2 από αυτούς να δουν βελτίωση;

Τύπος Διωνυμικής Κατανομής

(**με** παραμέτρους **n, p**):

$$P(X=\kappa)=\frac{n!}{\kappa!\cdot(n-\kappa)!}\cdot p^{\kappa}\cdot(1-p)^{n-\kappa},$$

με $\kappa = 0, 1, 2, 3..., n$

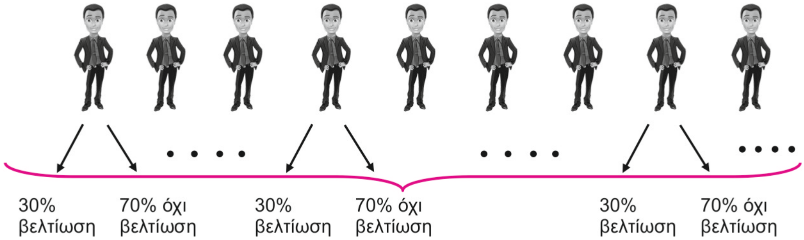
Ο τύπος ισχύει **ΜΟΝΟΝ** για το = .
Εάν έχουμε όμως <, >, ≤ , ≥
τότε τι θα κάνουμε;
(αναλυτική διδασκαλία www.arnos.gr)

Λύση: Ορίζουμε ως τυχαία μεταβλητή:

Χ: «το πλήθος των ασθενών με βελτιωμένη υγεία» με:

- **n = 9** άτομα (πόσες φορές που επαναλαμβάνεται το δίλημμα).
- **p = 0,30** = 30% η πιθανότητα κάποιος να δει βελτίωση.
- **q = 1 – p = 0,70** = 70% η πιθανότητα να μη δει βελτίωση.

Το Δίλημμα είναι: «*Θα δει κάποιος βελτίωση στην υγεία του… ή όχι;*».



Σημαντική Σημείωση:

Το p είναι η ζητούμενη πιθανότητα να συμβεί ό,τι από τα δύο ενδεχόμενα του διλήμματος θέλει το ερώτημα. Δηλαδή είναι η πιθανότητα να γίνει το «ευνοϊκό» σενάριο του πειράματος.

Τι αναφέρεται στα ερωτήματα; Η φράση «*να δει βελτίωση*» ή η φράση «*να μη δει βελτίωση*»; Αναφέρεται η φράση «*να δουν βελτίωση*». Άρα, το p είναι η πιθανότητα να δει κάποιος βελτίωση. Εάν το ερώτημα έλεγε τη φράση «*να μη δουν βελτίωση*», τότε το p θα ήταν η πιθανότητα να μη δει κάποιος βελτίωση και θα ήταν ίση με p = 70%.

(i) Ζητούμε την πιθανότητα να έχουμε πέντε υγιή άτομα και με χρήση του τύπου της Διωνυμικής Κατανομής έχουμε ότι:

- $$\mathbf{P}(X=5)=\frac{9!}{5!\cdot(9-5)!}\cdot 0,30^5\cdot(1-0,30)^{9-5}=$$
$$=\frac{9!}{5!\cdot 4!}\cdot 0,30^5\cdot 0,70^4=0,07351=7,351\%$$

Παράδειγμα 2: Η αξία των διαμερισμάτων σε ένα δήμο ακολουθεί την **Κανονική Κατανομή** με μέση αξία 100 χιλιάδες Ευρώ και τυπική απόκλιση 30 χιλιάδες. Ποια είναι η πιθανότητα για ένα τυχαία επιλεγμένο διαμέρισμα να έχει αξία τουλάχιστον 60 χιλιάδες Ευρώ;

Λύση: Ορίζουμε ως τυχαία μεταβλητή:

X: *«η αξία (σε χιλιάδες ευρώ) των διαμερισμάτων σε ένα δήμο» με:*

- μ =100 χιλιάδες ευρώ (*η μέση τιμή*)
- σ = 30 χιλιάδες Ευρώ (*η τυπική απόκλιση*)

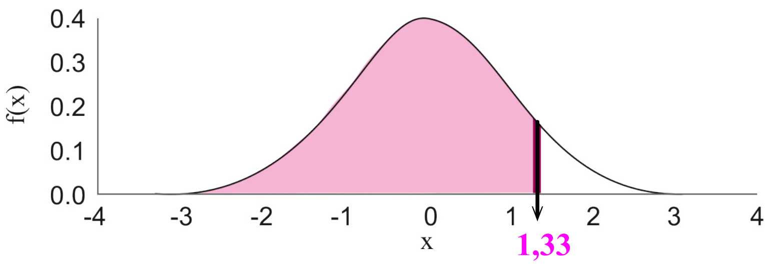
Ζητούμε την πιθανότητα:

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{60-100}{30}\right) =$$

$$= P\left(Z \geq -\frac{40}{30}\right) =$$

$$= P(Z \geq -1,33) =;$$

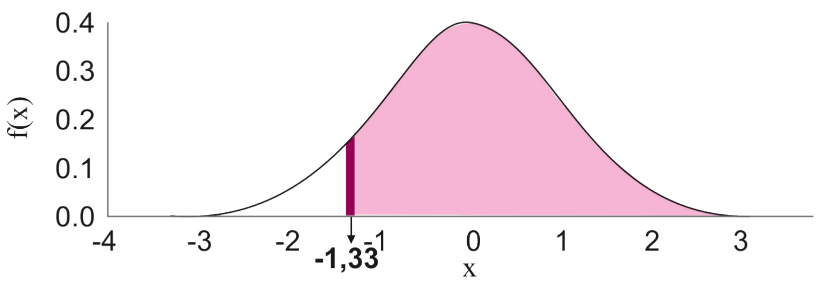
Ας παρατηρήσουμε την ομορφιά της συμμετρίας της καμπύλης της Κανονικής Κατανομής, με τις ακόλουθες δύο εικόνες:



Διάγραμμα 1

Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο **διάγραμμα 1**, δηλώνει την πιθανότητα $P(Z \leq 1,33)$

Το γραμμοσκιασμένο χωρίο στο **διάγραμμα 2**, δηλώνει την πιθανότητα $P(Z \geq -1,33)$



Διάγραμμα 2

Παρατηρούμε ότι λόγω συμμετρίας της καμπύλης τα δύο χωρία έχουν την ίδια έκταση, το ίδιο εμβαδόν.

Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε:

$$\underbrace{\mathbf{P(Z \geq -1,33) = P(Z \leq 1,33)}}$$

ίσα εμβαδά, άρα ίσες πιθανότητες.

<ins>Γενικά λοιπόν</ins>:

$$P(Z \geq \mathbf{z_0}) = P(Z \leq -\mathbf{z_0})$$

Άρα, η προηγούμενη πιθανότητα υπολογίζεται πλέον ως εξής:

$$\begin{aligned} P(X \geq 60) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{60-100}{30}\right) = \\ &= P\left(Z \geq -\frac{40}{30}\right) = P(Z \geq -1,33) = \\ &= P(Z \leq 1,33) = \\ &= 0,9082 = \underbrace{90,82\%} \end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα το λαμβάνουμε αυτομάτως από τους προηγούμενους πίνακες. Σε αυτούς εντοπίζουμε τον αριθμό 1,3 στην πρώτη στήλη και τον αριθμό 0,03 στην πρώτη γραμμή του πίνακα, οι οποίοι διασταυρώνονται στον αριθμό 0,9082.

Εναλλακτικά, σύμφωνα με όσα είχαμε διδαχθεί και στη Διωνυμική Κατανομή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το γενικότερο κανόνα:

$\boxed{\mathbf{P(Z \geq -1,33)} = \text{ΟΛΑ - ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ}}$

Μιας και μιλάμε για πιθανότητες, η **ΟΛΙΚΗ** τιμή της είναι το ποσοστό 100% δηλαδή το **1**.

Το ερώτημα εστιάζει στις τιμές $\mathbf{Z \geq -1,33}$, άρα οι προηγούμενες είναι οι τιμές $\mathbf{Z < -1,33}$.