ΘΕΜΑ 2^o (Β) - 2024: Επαναληπτικές Εξετάσεις (μαζί με Μη Ομαδοποιημένα Δεδομένα + Διαστήματα Εμπιστοσύνης)

Σε μια τράπεζα, ο χρόνος που απαιτείται για να αποφασιστεί αν θα εγκριθεί ένα δάνειο προς μια μικρομεσαία επιχείρηση, από τη στιγμή που θα υποβληθεί η αντίστοιχη αίτηση, αποτελεί σημαντική παράμετρο ανταγωνιστικότητας. Έχει δειχθεί, από ιστορικά δεδομένα, ότι ο χρόνος αυτός ακολουθεί την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 4 ώρες.

i. Ένα σώμα επιθεωρητών έλεγξε αυτόν τον χρόνο από 25 πελάτες της συγκεκριμένης τράπεζας και βρήκε ότι ο μέσος χρόνος απόφασης έγκρισης ήταν 28 ώρες. Κατασκευάστε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον πραγματικό μέσο χρόνο που απαιτείται για την απόφαση έγκρισης του δανείου από την τράπεζα αυτή. (**0.5 μονάδες**)

ii. Τι θα συνέβαινε αν το σώμα των επιθεωρητών επέλεγε να κατασκευάσει ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης; Υπολογίστε το νέο διάστημα και συγκρίνετέ το με το διάστημα που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Τι παρατηρείτε; (**0.7 μονάδες**)

iii. Μετά από ανάλυση ιστορικών δεδομένων της τράπεζας βρέθηκε ότι ο πραγματικός μέσος χρόνος που απαιτείται για την απόφαση έγκρισης δανείου είναι 27 ώρες.

   α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας να περιμένει περισσότερο από 30 ώρες για να λάβει την απόφαση έγκρισης του δανείου; (**0.4 μονάδες**)

   β. Ποια είναι η πιθανότητα ανάμεσα σε 5 τυχαία επιλεγμένους πελάτες της τράπεζας τουλάχιστον ένας να περιμένει περισσότερο από 30 ώρες για την απόφαση έγκρισης του δανείου; (**0.4 μονάδες**)

Λύση

Έστω X τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που εκφράζει τον χρόνο απόφασης για την έγκριση δανείου μικρομεσαίας επιχείρησης. Η τ.μ. ακολουθεί την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma = 4$ ώρες.

Β.i (0.5 μονάδες)

Επειδή η διακύμανση σ^2 του πληθυσμού είναι γνωστή, το $(1-\alpha)100\%$ διάστημα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή μ του πληθυσμού είναι:

$$\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\sigma_{\bar{X}}, \qquad \mu\varepsilon \quad \sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$$

Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\bar{X} = 28, \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

ενώ από τους πίνακες της z-κατανομής, για $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$:

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$$

Άρα το 95% διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζεται:

$$28 \pm 1.96 \cdot 0.8, \qquad \text{ή} \quad (26.432, 29.568)$$

B.ii (0.7 μονάδες)

Αν αυξήσουμε τον βαθμό εμπιστοσύνης ενός διαστήματος εμπιστοσύνης, το εύρος του θα διευρυνθεί. Πραγματικά από τους πίνακες της z-κατανομής, για $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$, $z_{1-\alpha/_2} = z_{0.995} = 2.575$.

Άρα το 99% διάστημα εμπιστοσύνης υπολογίζεται:

$$28 \pm 2.575 \cdot 0.8 \text{ ή } \quad (25.94, 30.06),$$

και είναι όντως ευρύτερο από το διάστημα $(26.432, 29.568)$ που είχε υπολογιστεί στο προηγούμενο ερώτημα.

B.iii.α (0.4 μονάδες)

Η πληροφορία που μας δίνεται εδώ είναι ότι η μέση τιμή της τ.μ. είναι 27 ώρες.

Η πιθανότητα ένας νέος πελάτης να περιμένει περισσότερο από 30 ώρες για να λάβει την απόφαση έγκρισης του δανείου είναι:

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{30-27}{4}\right) = 1 - \Phi(0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$$

B.iii.β (0.4 μονάδες)

Έστω Y η τ.μ. που παριστά το πλήθος των πελατών, στο σύνολο των πέντε, που χρειάζεται να περιμένουν περισσότερο από 30 ώρες για την απόφαση έγκρισης του δανείου. Η τ.μ. Y ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή. Έτσι έχουμε ότι $Y \sim B(n = 5, p = 0.2266)$, οπότε η πιθανότητα τουλάχιστον ένας από τους πέντε πελάτες να περιμένει περισσότερο από 30 ώρες για την απόφαση έγκρισης του δανείου θα είναι:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0.2266^0 \cdot 0.7734^5 = 1 - 0.7734^5 = 1 - 0.2767 = 0.7233$$

ΘΕΜΑ 3ο (Β) - 2024: Τελικές Εξετάσεις

Είναι γνωστό από έρευνες ότι το ποσοστό των αριστερόχειρων ενηλίκων είναι 8%.

i. Ανάμεσα σε 15 τυχαία επιλεγμένους ενήλικες, ποια είναι η πιθανότητα ένας (1) να είναι αριστερόχειρας; (**0.5 μονάδες**)

ii. Ανάμεσα σε 15 τυχαία επιλεγμένους ενήλικες, ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας (1) να είναι αριστερόχειρας. (**0.7 μονάδες**)

iii. Αν σε μια αίθουσα βρίσκονται 150 ενήλικες πόσοι από αυτούς περιμένουμε να είναι αριστερόχειρες; (**0.3 μονάδες**)

Λύση

Ερώτημα Β (1.5 μονάδες)

Έστω X η τ.μ. που παριστά τον αριθμό των αριστερόχειρων ενηλίκων. Τότε:

$$X \sim B(n = 15, p = 0.08)$$

B.i. (0.5 μονάδες)

$$P(X = 1) = \binom{15}{1} \cdot 0.08^1 \cdot 0.92^{14} = 0.3734$$

B.ii. (0.7 μονάδες)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{15}{0} \cdot 0.08^0 \cdot 0.92^{15} = 1 - 0.2863$$
$$= 0.7137$$

B.iii. (0.3 μονάδες)

Είναι η μέση τιμή της διωνυμικής με $n = 150$ και $p = 0.08$. Επομένως:

$$n \cdot p = 150 \cdot 0.08 = 12$$

ΘΕΜΑ 3ο (Β) - 2023: Επαναληπτικές Εξετάσεις

Ορισμένα από τα μηνύματα που δέχεται ένας διευθυντής εταιρείας στο εταιρικό του mail από άγνωστους σε αυτόν αποστολείς είναι κακόβουλα με πιθανότητα 35%. Αν θεωρήσουμε ότι τα μηνύματα που έρχονται από άγνωστους αποστολείς είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους:

i. Βρείτε την πιθανότητα ανάμεσα σε 10 μηνύματα από άγνωστους αποστολείς:
   (α) ένα (1) να είναι κακόβουλο (**0.5 μονάδες**)
   (β) τουλάχιστον δύο (2) να είναι κακόβουλα (**0.5 μονάδες**)

ii. Πόσα κακόβουλα μηνύματα αναμένεται να λάβει ο διευθυντής της εταιρείας, αν πάρει συνολικά 40 μηνύματα από άγνωστους αποστολείς; (**0.5 μονάδες**)

[*Υπόδειξη*: *Όπου χρειαστεί να κάνετε στρογγυλοποίηση κατά τους υπολογισμούς σας, διατηρήστε τρία (3) δεκαδικά ψηφία.*]

Λύση

Β.i

Έστω X η τ.μ. που παριστά τον αριθμό των κακόβουλων μηνυμάτων που λαμβάνει ο διευθυντής από άγνωστους αποστολείς. Τότε, $X \sim b(n = 10, p = 0.35)$.

Β.i(α) (0.5 μονάδες)

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0.35^1 0.65^9 = 0.072$$

Β.i(β) (0.5 μονάδες)

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$
$$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.35^0 0.65^{10} + \binom{10}{1} 0.35^1 0.65^9\right] = 1 - [0.013 + 0.072]$$
$$= 0.915$$

Β.ii (0.5 μονάδες)

Ο αναμενόμενος αριθμός κακόβουλων μηνυμάτων είναι η μέση τιμή διωνυμικής κατανομής με $n = 40$ και $p = 0.35$. Επομένως, θα είναι $n \cdot p = 40 \cdot 0.35 = 14$.

Ο τελειόφοιτος ενός τμήματος διαβάζει σε μια έρευνα ότι το ποσοστό των αποφοίτων του τμήματος αυτού που επιλέγουν να προχωρήσουν σε μεταπτυχιακές σπουδές είναι 40%. Αν επιλέξουμε τυχαία πέντε (5) αποφοίτους του συγκεκριμένου τμήματος:

i. Ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον ένας (1) απόφοιτος να έχει προχωρήσει σε μεταπτυχιακές σπουδές; (**0.5 μονάδες**)

ii. Ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν το πολύ δύο (2) απόφοιτοι που έχουν προχωρήσει σε μεταπτυχιακές σπουδές; (**0.5 μονάδες**)

iii. Πόσοι από τους πέντε (5) αποφοίτους αναμένεται να προχωρήσουν σε μεταπτυχιακές σπουδές; (**0.5 μονάδες**)

Λύση

Έστω X η τ.μ. που παριστά τον αριθμό των αποφοίτων του τμήματος που προχωρούν σε μεταπτυχιακές σπουδές, ανάμεσα στους 5 αποφοίτους του τμήματος που επιλέχτηκαν. Τότε, $X \sim b(n = 5, p = 0.40)$.

B.i (0.5 μονάδες)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0.40^0 0.60^5 = 1 - 0.6^5 = 1 - 0.078 = 0.922$$

B.ii (0.5 μονάδες)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \binom{5}{0} 0.40^0 0.60^5 + \binom{5}{1} 0.40^1 0.60^4 + \binom{5}{2} 0.40^2 0.60^3 \\ &= 0.078 + 0.259 + 0.346 = 0.683 \end{aligned}$$

B.iii (0.5 μονάδες)

Είναι η μέση τιμή της διωνυμικής με $n = 5$ και $p = 0.40$. Επομένως,

$$n \cdot p = 5 \cdot 0.4 = 2$$

Το ποσοστό των φοιτητών που δεν καταθέτουν έγκαιρα την πτυχιακή τους είναι 15%. Σε μια ορισμένη ημερομηνία διαπιστώθηκε ότι σε 20 φοιτητές είχε ανατεθεί πτυχιακή.

(α) Ποια η πιθανότητα ότι δεν θα καταθέσουν έγκαιρα τις πτυχιακές τους ακριβώς 3 φοιτητές; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**

(β) Ποια η πιθανότητα ότι δεν θα καταθέσουν έγκαιρα τις πτυχιακές τους περισσότεροι από 3 φοιτητές; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**

(γ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός φοιτητών που δεν θα παραδώσουν έγκαιρα τις πτυχιακές τους; **(ΜΟΝΑΔΕΣ 4)**

Λύση:

(α) Έστω X η τ.μ. που εκφράζει το πλήθος των φοιτητών (από τους 20) που δεν παραδίδουν έγκαιρα τις πτυχιακές τους.

Προφανώς η X μπορεί να πάρει τιμές από 0 ως 20.

Η πιθανότητα ένας φοιτητής να μην παραδώσει την πτυχιακή του έγκαιρα είναι p=0.15.

Οι προϋποθέσεις της διωνυμικής κατανομής ικανοποιούνται και τελικά έχουμε:

$$X \sim B(20,\ 0.15), x = 0,1,\ldots,20$$

Αρα,

$$P(X=3) = \binom{20}{3} 0.15^3\ (1-0.15)^{20-3} = 0,2428$$

(β)

$$P(X>3) = 1-P(X \le 3) = 1-[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)]$$
$$= 1-0,647725 = 0,352275 \qquad =$$

(γ)

Ο αναμενόμενος αριθμός φοιτητών που δεν θα παραδώσουν έγκαιρα τις πτυχιακές τους είναι $EX = np = \ 20*0,15 = 3$, δηλ. 3 φοιτητές.

ΘΕΜΑ 3ο (Α) - 2019: Επαναληπτικές Εξετάσεις

Α. Οι φοιτητές μιας θεματικής ενότητας εξετάζονται σε ένα τεστ που περιλαμβάνει 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, καθεμία από τις οποίες έχει 4 δυνατές απαντήσεις. Θεωρούνται επιτυχόντες όσοι απαντήσουν σωστά σε τουλάχιστον 10 ερωτήσεις.

1. Υπολογίστε την πιθανότητα ένας διαγωνιζόμενος που απάντησε τυχαία στις ερωτήσεις του διαγωνίσματος να είναι επιτυχών. **(5%)**
2. Έστω Χ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των σωστών απαντήσεων ενός φοιτητή. Να υπολογιστεί ο αναμενόμενος αριθμός των σωστών απαντήσεων και η τυπική τους απόκλιση όταν ο διαγωνιζόμενος απαντά τυχαία σε όλες τις ερωτήσεις. **(5%)**
3. Αν για κάθε σωστή απάντηση ο φοιτητής έχει βαθμολογία +1 ενώ για κάθε λανθασμένη έχει βαθμολογία -0.2 ποιος είναι ο αναμενόμενος βαθμός που θα πάρει ένας φοιτητής στο τεστ εάν απαντά τυχαία σε όλες τις ερωτήσεις; **(5%)**

Λύση:

1

Εφόσον ο διαγωνιζόμενος απαντάει με τυχαίο τρόπο η πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε ένα ερώτημα είναι p=1/4=0,25. Η τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει το πλήθος των σωστών απαντήσεων ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή, δηλαδή: $X \sim B\,(n = 20, p = 0{,}25)$.

Ζητάμε την πιθανότητα $P(X \geq 10)$.

Ο Πίνακας 2 του Προσαρτήματος περιέχει τις αθροιστικές πιθανότητες της διωνυμικής κατανομής δηλαδή τις πιθανότητες της μορφής $P(X \leq k)$ για επιλεγμένες τιμές των n, p, k. Επομένως,

$$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0{,}986 = 0{,}0139.$$

2

Ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων είναι ίσος με $E(X) = np = 20 * 0{,}25 = 5$

και η διακύμανση

$$Var(X) = np(1-p) = 20 * 0{,}25 * 0{,}75 = 3{,}75$$

3

Αν $E(X)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός των σωστών απαντήσεων, τότε $20 - E(X)$ είναι ο αναμενόμενος αριθμός λανθασμένων απαντήσεων. Συνεπώς η αναμενόμενη βαθμολογία του φοιτητή είναι

$1 * E(X) - 0{,}2 * \left(20 - E(X)\right) = 1.1$ με άριστα το 20

Αν δεν υπάρχει αρνητική βαθμολογία ο αναμενόμενος αριθμός είναι $1 * E(X) = 5$.

ΘΕΜΑ 4^{Ο} (Β) - 2016: Τελικές Εξετάσεις

(4Β) Ένας καθηγητής θέλει να προετοιμάσει ένα τεστ με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής για τους μαθητές του. Ξέροντας πως κάποιοι θα απαντήσουν στην τύχη, θέλει να κάνει την πιθανότητα να επιτύχει κανείς στο τεστ απαντώντας τυχαία (δηλαδή να απαντήσει σωστά τουλάχιστον στις μισέςερωτήσεις) όσο γίνεται μικρότερη. Θα του προτείνατε το τεστ να έχει 6 ερωτήσεις με 4 δυνατές απαντήσεις ή 4 ερωτήσεις με 5 δυνατές απαντήσεις; **(10%)**

Λύση:

Ορίζουμε την τ.μ. X : πλήθος σωστών απαντήσεων όταν ο ερωτώμενος απαντάει όλες τις ερωτήσεις στην τύχη.

- Περίπτωση τεστ 6 ερωτήσεων με 4 δυνατές απαντήσεις

X ~Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\left(\mathrm{n} = 6, \mathrm{p} = \frac{1}{4} = 0.25\right)$

Οπότε η πιθανότητα να περάσει κάποιος το τεστ στην τύχη είναι:

$$P(X \ge 3) = \sum_{x=3}^{6} P(X = x) = \sum_{x=3}^{6} \binom{6}{x} 0.25^x 0.75^{6-x}$$
$$= 0.1318 + 0.0329 + 0.0043 + 0.0002$$
$$= 0.1694$$

- Περίπτωση τεστ 4 ερωτήσεων με 5 δυνατές απαντήσεις

X ~Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\left(\mathrm{n} = 4, \mathrm{p} = \frac{1}{5} = 0.20\right)$

Οπότε η πιθανότητα να περάσει κάποιος το τεστ στην τύχη είναι:

$$P(X \ge 2) = \sum_{x=2}^{4} P(X = x) = \sum_{x=2}^{4} \binom{4}{x} 0.2^x 0.8^{4-x}$$
$$= 0.1536 + 0.0256 + 0.0016$$
$$= 0.1808$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα να περάσει το τεστ κάποιος μαθητής που απαντάει στην τύχη είναι μικρότερη στην περίπτωση του τεστ 6 ερωτήσεων με 4 δυνατές απαντήσεις και άρα αυτό το τεστ προτείνουμε στον καθηγητή.

ΘΕΜΑ Β4 (β) - 2008: Τελικές Εξετάσεις

β) Οι φοιτητές, στο πλαίσιο της εξέτασης του μαθήματος των Αγγλικών υποβάλλονται σε ένα τεστ 10 ερωτήσεων, για καθεμία από τις οποίες έχουν να επιλέξουν μεταξύ δύο εναλλακτικών απαντήσεων (Σωστό-Λάθος) .

i. Αν για να περάσει κανείς το συγκεκριμένο τεστ απαιτούνται τουλάχιστον 6 σωστές απαντήσεις, να υπολογισθεί η πιθανότητα να το περάσει απαντώντας στην τύχη σε όλα τα ερωτήματα ....**(30%)**

ii. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να αριστεύσει ένας φοιτητής (δηλαδή να απαντήσει σωστά σε 9 τουλάχιστον ερωτήματα) όταν έχει διαβάσει τόσο ώστε η πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε ένα ερώτημα είναι 75% ....**(30%)**

Λύση:

β) (i) Αν X είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων ενός ατόμου που απαντά όλες τις ερωτήσεις στην τύχη, τότε η τ.μ. X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$ και $p = 0,50$, δηλ. $X \sim B(10, 0.5)$.

Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$P(X \geq 6) \quad \sum_{i=6}^{10} P(X \quad i)$$

$$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

$$= \binom{10}{6} 0,5^6 (1-0,5)^4 + \binom{10}{7} 0,5^7 (1-0,5)^3 + \binom{10}{8} 0,5^8 (1-0,5)^2 + \binom{10}{9} 0,5^9 (1-0,5)^1 + \binom{10}{10} 0,5^{10} (1-0,5)^0$$

$$= (0,5)^{10} \left[\binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} \right]$$

$$= \frac{1}{1024} [210 + 120 + 45 + 10 + 1]$$

$$= \frac{1}{1024} * 386$$

$$= 0,377$$

Άρα, η πιθανότητα να περάσει το τεστ κάποιος που απαντά σε όλα τα ερωτήματα στην τύχη είναι 37,7%.

(ii) Αν X είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων ενός ατόμου που απαντά σωστά με πιθανότητα 0,75 όλες τις ερωτήσεις, τότε η τ.μ. X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 10$ και $p = 0,75$, δηλ. $X \sim B(10, 0,75)$.
Τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 9) \quad & P(X \quad 9) + P(X = 10) \\
&= \binom{10}{9} 0,75^9 (1-0,75)^1 + \binom{10}{10} 0,75^{10} (1-0,75)^0 \\
&= 10 * 0,075 * 0,25 + 1 * 0,056 * 1 \\
&= 0,2435
\end{aligned}
$$

Άρα, η πιθανότητα να αριστεύει ένας φοιτητής που απαντάει κάθε ερώτημα με πιθανότητα επιτυχίας 0.75 είναι 24,35%.

ΘΕΜΑ Α4 (β) - 2008: Επαναληπτικές Εξετάσεις

β) Δύο καλαθοσφαιριστές παίζουν ένα παιχνίδι κατά το οποίο εκτελούν 10 βολές ο καθένας και κερδίζει αυτός που θα βάλει τα περισσότερα καλάθια. Μετά την

ολοκλήρωση των βολών του πρώτου παίκτη, ο οποίος πέτυχε 8 καλάθια, πρέπει να παίξει ο δεύτερος παίκτης ο οποίος, έχει ποσοστό ευστοχίας 75% στις βολές. Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογισθούν οι πιθανότητες να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης. Σημειώνεται ότι οι βολές κάθε παίκτη είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ……………………………………………………………………………………………**(30%)**

Λύση:

Αν X είναι ο αριθμός των καλαθιών που θα επιτύχει ο $2^{ος}$ παίχτης τότε
X~Διωνυμική(n=10, p=0.75)

Άρα η πιθανότητα νίκης του $2^{ου}$ παίκτη είναι ίση
$P(X > 8) \quad P(X \quad 9) + P(X = 10)$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{10}{9}\left(\frac{3}{4}\right)^9 \left(\frac{1}{4}\right)^{10-9} + \binom{10}{10}\left(\frac{3}{4}\right)^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^{10-10} \\
&= \frac{10!}{9!1!}\frac{3^9}{4^{10}} + \frac{10!}{10!0!}\frac{3^{10}}{4^{10}} = \frac{3^9}{4^{10}}(10+3) = 0,244025 \text{ (δηλ. 24,4\%)}
\end{aligned}
$$

ΘΕΜΑ B4 (A) - 2006: Τελικές Εξετάσεις

A. Από ιστορικά στοιχεία που τηρεί η εταιρεία παρασκευής του φαρμάκου ΑΒ που χρησιμοποιείται για μια συγκεκριμένη ασθένεια, προκύπτει ότι αυτό ήταν αποτελεσματικό στο 30% των περιπτώσεων για τις οποίες χορηγήθηκε. Αν ένας γιατρός συνταγογραφήσει σήμερα το συγκεκριμένο φάρμακο σε τέσσερις ασθενείς ποια είναι η πιθανότητα ότι θα είναι αποτελεσματικό σε τουλάχιστον τρεις από αυτούς; ....**(50%)**

Λύση:

A. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει τον αριθμό των ασθενών στους οποίους το φάρμακο **AB** ήταν αποτελεσματικό. Από την υπόθεση έχουμε 4 ανεξάρτητες δοκιμές, τη χορήγηση του φαρμάκου στους 4 ασθενείς. Η σταθερή πιθανότητα της «επιτυχίας» είναι, από την υπόθεση, 0,30. Είναι φανερό ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί Διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n = 4$ και $p = 0{,}30$.

Δηλαδή $X \sim B(n, p)$ με n=4, p=0,30.

Ζητάμε την πιθανότητα $P(X = 3$ ή $X = 4)$. Τα ενδεχόμενα $X = 3$ & $X = 4$ είναι ασυμβίβαστα. Από το τρίτο αξίωμα των πιθανοτήτων προκύπτει ότι $P(X = 3$ ή $X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4)$. Είναι επίσης γνωστό ότι $P(X = x) \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$.

Κατά συνέπεια,

$$P(X = 3) \binom{4}{3} (0,30)^3 (1 - 0.30)^1$$

$$= 4 * 0{,}30^3 * 0{,}70^1$$

$$= 4 * 0{,}027 * 0{,}70$$

$$= 0{,}0756$$

Και

$$P(X = 4) \quad \binom{4}{4} 0,3\cancel{0}^4 (1 - 0,03)^0$$

$$= 1 * 0,0081 * 1$$

$$= 0,0081$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$P(X = 3$ ή $X = 4) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,0756 + 0,0081 = 0,0837$.

Αυτό σημαίνει, πως στο 8,37% των φορών που χορηγείται το AB θα είναι αποτελεσματικό σε τουλάχιστον 3 ασθενείς.

ΘΕΜΑ Β3 (α) - 2005: Επαναληπτικές Εξετάσεις

α) Στις προσεχείς εξετάσεις των Μαθηματικών του πρώτου έτους ενός Τμήματος Διοίκησης Επιχειρήσεων θα υπάρχουν 20 ερωτήσεις πολλαπλών επιλογών με 5 δυνατές επιλογές η κάθε μια. Οι 15 πρώτες ερωτήσεις καλύπτουν το θεωρητικό μέρος του μαθήματος και οι υπόλοιπες 5 πρακτικές εφαρμογές. Υποθέτουμε ότι ένας φοιτητής έχει μελετήσει άριστα το θεωρητικό μέρος και θα απαντήσει σωστά στις ερωτήσεις που αναφέρονται σε αυτό, ενώ δεν έχει μελετήσει τις πρακτικές εφαρμογές και θα απαντήσει στην τύχη στις ερωτήσεις που αναφέρονται σε αυτό. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι κάθε σωστή απάντηση δίνει ένα βαθμό, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται ένας βαθμός. Με βάση τα στοιχεία αυτά να υπολογισθεί για το συγκεκριμένο φοιτητή:

i. Η πιθανότητα να απαντήσει σωστά μόνο στις 15 ερωτήσεις του θεωρητικού μέρους. **(25%)**

ii. Η αναμενόμενη βαθμολογία του στην παραπάνω περίπτωση. **(25%)**

Λύση:

α) Σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης ο φοιτητής θα απαντήσει στις 15 πρώτες ερωτήσεις σωστά με βεβαιότητα. Για τις επόμενες 5 ερωτήσεις ο αριθμός των σωστών απαντήσεων που θα δώσει αποτελεί τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί την Διωνυμική κατανομή με $n = 5$ και $p = 0,2$ (μια σωστή απάντηση μεταξύ 5 δυνατών επιλογών).

Δηλαδή $X \sim B(n = 5, p = 0,2)$.

i. Ζητάμε ουσιαστικά την πιθανότητα να μην απαντήσει σωστά σε καμία από τις τελευταίες πέντε ερωτήσεις. Δηλαδή $P\left(X = 0 \middle| n = 5, p = 0,2\right)$

$$P(X=0) = \binom{5}{0} 0,2^0 (1-0,2)^5$$

$$= \frac{5!}{0!(5-0)!} * 0,2^0 * 0,8^5 = 1*1*0,8^5 = 0,32768 \simeq 0,3277$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 32,77%.

ii Οι πρώτες 15 ερωτήσεις που θα απαντηθούν σωστά με βεβαιότητα θα του δώσουν 15 μονάδες.

Ο αναμενόμενος αριθμός σωστών απαντήσεων στις τελευταίες 5 ερωτήσεις είναι:

$E(X) = n*p = 5*0,2 = 1$

Αντίστοιχα, ο αναμενόμενος αριθμός λανθασμένων απαντήσεων στις τελευταίες 5 ερωτήσεις είναι:

$E(X') = n*q = 5*\left(1-0,2\right) = 5*0,8 = 4$.

Άρα η αναμενόμενη βαθμολογία του φοιτητή από τις 5 τελευταίες ερωτήσεις είναι:

1*1+4*(-1) = 1- 4= -3 μονάδες

Κατά συνέπεια η αναμενόμενη συνολική βαθμολογία του και στις 20 ερωτήσεις είναι:

15 + (- 3) = 15 – 3 = 12 μονάδες.

ΘΕΜΑ Β4 (α) - 2004: Τελικές Εξετάσεις

(α) Δεκαπέντε άτομα, τα οποία αποφασίζουν ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, πρέπει να επιλέξουν μεταξύ δύο επενδυτικών σχεδίων E_1 και E_2 για να τοποθετήσουν το κεφάλαιό τους. Αν από ιστορικά στοιχεία γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα επένδυσης στο σχέδιο E_1 είναι κατά 50% μεγαλύτερη από την πιθανότητα επένδυσης στο σχέδιο E_2, να υπολογισθεί η πιθανότητα 10 από τα 15 άτομα να επιλέξουν το ίδιο επενδυτικό σχέδιο. [33%]

Λύση:

(α) *Έστω τα ενδεχόμενα:*

- *E1: επιλογή επενδυτικού σχεδίου E1*
- *E2: επιλογή επενδυτικού σχεδίου E2*

Δίνεται ότι:

$$P(E_1) = 1,5P(E_2)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

$$P(E_1) + P(E_2) = 1 \to 1,5P(E_2) + P(E_2) = 1 \to 2,5P(E_2) = 1 \to P(E_2) = 1/2,5 \to P(E_2) = 0,4$$

Άρα $P(E_1) = 0,6$

Έστω οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 όπου:

- *X_1 ο αριθμός των ατόμων που επιλέγουν το επενδυτικό σχέδιο E_1*
- *X_2 ο αριθμός των ατόμων που επιλέγουν το επενδυτικό σχέδιο E_2*

Προφανώς $X_1 \sim B\,(n=15, p_1=0,6)$ *και* $X_2 \sim B\,(n=15, p_2=0,4)$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

P(10 άτομα επενδύουν στο ίδιο σχέδιο) =

= P(10 άτομα επενδύουν στο E_1 ή στο E_2) =

= P(10 άτομα επενδύουν στο E_1)+P(10 άτομα επενδύουν στο E_2) =

$$= P(X=10 \mid n=15,\ p_1=0,6) + P(X=10 \mid n=15,\ p_2=0,4)$$

$$= \binom{15}{10} \times 0,6^{10} \times 0,4^{5} + \binom{15}{10} \times 0,4^{10} \times 0,6^{5} =$$

$$\frac{15!}{5!*10!} * 0,6^{10} * 0,4^{5} + \frac{15!}{5!*10!} * 0,4^{10} * 0,6^{5} = 3003 * 0,006 * 0,01 + 3003 * 0,0001 * 0,07$$

$= 0,1859 + 0,0245$

$= 0,2104$

ΘΕΜΑ B4 (a) - 2004: Επαναληπτικές Εξετάσεις

a. Οι κινητήρες που χρησιμοποιούν τα αεροσκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου έχουν πιθανότητα q=0,25 να παρουσιάσουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο κάποια βλάβη κατά τη διάρκεια μιας πτήσης. Το αεροσκάφος μπορεί να συνεχίσει απρόσκοπτα την πτήση του αν λειτουργούν τουλάχιστον οι μισοί κινητήρες του. Σε διαφορετική περίπτωση θα πρέπει να προσγειωθεί στο πλησιέστερο αεροδρόμιο. Αν για την πραγματοποίηση μιας πτήσης σας έχετε τη δυνατότητα επιλογής μεταξύ ενός τετρακινητήριου και ενός δικινητήριου αεροσκάφους του συγκεκριμένου τύπου ποιο από τα δύο θα επιλέγατε ώστε να μεγιστοποιήσετε την πιθανότητα απρόσκοπτης πτήσης; [50%]

Λύση:

Έστω η τυχαία μεταβλητή X που εκφράζει τον αριθμό των κινητήρων ενός αεροσκάφους που λειτουργούν κανονικά.

Προφανώς $X \sim B(N, p)$

όπου:

N *ο αριθμός των κινητήρων του αεροσκάφους*

$$p = 1 - q = 1 - 0,25 = 0,75 = \frac{3}{4}$$

Στην περίπτωση <u>δικινητήριου αεροσκάφους</u>, (N=2), η πιθανότητα απρόσκοπτης πτήσης είναι:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) \qquad \textbf{(1)}$$

όμως

$$P(X = 0) = \frac{2!}{0!(2-2)!}\left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{2-0} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \approx 0,0625$$

*Άρα η σχέση **(1)** γίνεται:*

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0,9375$$

Στην περίπτωση <u>τετρακινητήριου αεροσκάφους</u>, (N=4), η πιθανότητα απρόσκοπτης πτήσης είναι:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right]$$

(2)

όμως

$$P(X=0) = \frac{4!}{0!(4-0)!}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-0} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} = 0,0039$$

$$P(X=1) = \frac{4!}{1!(4-1)!}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(1-\frac{3}{4}\right)^{4-1} = \frac{4*3!}{1*3!}*\frac{3}{4}*\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{64} = 0,0469$$

*άρα η σχέση **(2)** γίνεται:*

$$P(X \geq 2) = 1 - \left[P(X=0)+P(X=1)\right] = 1 - \left[\frac{1}{256}+\frac{3}{64}\right] = 1 - \left[\frac{1}{256}+\frac{12}{256}\right] = \frac{243}{256} = 0,9492$$

Αφού 0,9492>0,9375 η επιλογή που μεγιστοποιεί την πιθανότητα απρόσκοπτης πτήσης είναι το τετρακινητήριο αεροσκάφος.

ΘΕΜΑ B4 (α) - 2003: Επαναληπτικές Εξετάσεις

α. Στον τελικό αγώνα κυπέλλου μπάσκετ μεταξύ των δύο ομάδων Α και Β, η ομάδα Β προηγείται της Α με ένα πόντο. Με το σφύριγμα της λήξης η ομάδα Α κερδίζει φάουλ σε προσπάθεια παίκτη της για τρίποντο, γεγονός που δίνει στον παίκτη τη δυνατότητα εκτέλεσης 3 ελεύθερων βολών σε νεκρό χρόνο. Αν ο παίκτης που θα εκτελέσει τις βολές έχει αστοχήσει στις 51 από τις 85 βολές που εκτέλεσε μέχρι τώρα σε αγώνες, να υπολογιστεί η πιθανότητα η ομάδα Α να κατακτήσει το κύπελλο.

Λύση:

α. Πρόκειται για Διωνυμική Κατανομή.
Ο παίκτης που θα εκτελέσει τις βολές έχει πιθανότητα επιτυχίας σε μια βολή:

$$p = \frac{85-51}{85} = \frac{34}{85} \Rightarrow p = 0,4 \text{ ή } 40\%$$

Έστω x ο αριθμός των εύστοχων βολών από τις 3 που θα εκτελέσει. Η ομάδα του θα κατακτήσει το κύπελλο αν $x \geq 2$.
Άρα θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(x \geq 2)$

$$P(x \geq 2 / n = 3, p = 0,4) = 1 - P(X < 2 / n = 3, p = 0,4) =$$

$$= 1 - \left[P(x = 0 / n = 3, p = 0,4) + P(x = 1 / n = 3, p = 0,4)\right] =$$

$$= 1 - \left[\left(\binom{3}{0}*0,4^0*0,6^3\right) + \left(\binom{3}{1}*0,4^1*0,6^2\right)\right] = 1 - \left(\frac{3!}{0!*3!}*1*0,216 + \frac{3!}{1!*2!}*0,4*0,36\right) =$$

$$= 1 - (0,216 + 3*0,4*0,36) = 1 - 0,648 = 0,352$$

Άρα $P(x \geq 2) = 0,352$ ή 35,2%