ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΤ – ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΧΟΛΕΙΑ

3.1. ΘΕΩΡΙΑ

Μάθημα 3^{o} – Άγνωστος αριθμός – Έξυπνες Πράξεις

- **Άγνωστος αριθμός – Ευθείες και αντίστροφες πράξεις**
- **Έξυπνες πράξεις**
- **Τελευταίο ψηφίο γινομένου φυσικών αριθμών**

Στο Course Αυτομάθησης **Μαθηματικά ΣΤ – Πρότυπα Σχολεία**, φροντίζουμε να κατανοήσεις τις μαθηματικές έννοιες και την υπόστασή τους, οπτικά και βιωματικά, συνδέοντας τες με την ίδια την καθημερινότητα.

- **Φύλλα Εξάσκησης**
  Στο Course καλλιεργείς την σκέψη σου και εμπεδώνεις τον τρόπο εφαρμογής της Θεωρίας σε ασκήσεις κατηγοριοποιημένες ανά διδακτικό στόχο. Με τα Φύλλα μαθαίνεις και γίνεσαι άριστος στο μάθημα.

- **Μελέτη σε Video**
  Στο Course μελετάς Λυμένα σε Video τα Θέματα **34, 35, 36, 37, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48** (σελ. 29 - 31) , από το Κεφ. 1 «**Φυσικοί αριθμοί**» του **Βιβλίου ΑΡΝΟΣ**

- **Εμβάθυνση σε Θέματα Εξετάσεων**
  Θέματα **30 έως και 48** (σελ. 28 – 31), Θέματα **87, 88, 91, 92** (σελ. 36 – 37), από το Κεφ. 1 «Φυσικοί αριθμοί» του **Βιβλίου ΑΡΝΟΣ**

Σολωμού 29 Αθήνα τηλ: 210 38 22 157 protypa@arnos.gr www.arnos.gr

ΘΕΩΡΙΑ

Έξυπνη πρόσθεση του Gauss

Πώς προσθέτουμε διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς με έξυπνο και γρήγορο τρόπο;

Για να προσθέσουμε, για παράδειγμα, όλους τους αριθμούς από το 1 έως το 30, γράφουμε το άθροισμά τους στην 1η σειρά από το μικρότερο μέχρι και το μεγαλύτερο αριθμό και κατόπιν στη 2η σειρά το άθροισμα από το μεγαλύτερο μέχρι και το μικρότερο αριθμό.

Προσθέτουμε →

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 28 & + & 29 & + & 30 \\ 30 & + & 29 & + & 28 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 31 & + & 31 & + & 31 & + & \dots & + & 31 & + & 31 & + & 31 \end{array}$$

Το άθροισμα είναι: 31 + 31 + 31 + ... + 31 + 31 + 31

Παρατηρούμε ότι:

- Έχουμε πάρει 2 φορές το άθροισμα από το 1 έως το 30
- Όλα τα ζευγάρια έχουν άθροισμα το 31.
- Το πλήθος των ζευγαριών είναι 30.

Οπότε: $1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \dfrac{30 \cdot 31}{2} = 15 \cdot 31 = 465$

Το άθροισμα των φυσικών αριθμών από το 1 έως το 100 είναι:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 100 \\ \nu & + & (\nu-1) & + & (\nu-2) & + & \dots & + & 1 \\ \hline (\nu+1) & + & (\nu+1) & + & (\nu+1) & + & \dots & + & (\nu+1) \end{array}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + \nu = \frac{\nu \cdot (\nu + 1)}{2}$$

Έξυπνη καταμέτρηση αριθμών

ΑΣΚΗΣΗ

Πόσα είναι τα πολλαπλάσια του 3 που είναι μεγαλύτερα από το 9 και μικρότερα από το 100;

ΛΥΣΗ

Τα συγκεκριμένα πολλαπλάσια είναι οι ακόλουθοι αριθμοί: 12, 15, 18, 21, ..., 99 δηλαδή:

$$3 \cdot 4,\ 3 \cdot 5,\ 3 \cdot 6,\ 3 \cdot 7,\ ...,\ 3 \cdot 33$$

Το πλήθος τους, λοιπόν, είναι όσοι είναι οι αριθμοί από το 4 έως και το 33.

Αυτοί είναι σε πλήθος **33 – 4 + 1** = 30 αριθμοί γιατί, εφόσον έχουμε παραλείψει τους αριθμούς 1, 2, 3, είναι 33 – 3 = 30 αριθμοί.

π.χ. Οι φυσικοί αριθμοί από το 100 έως και το 850, είναι σε πλήθος:
850 – 100 + 1 = 751

Τελευταίο Ψηφίο Γινομένου Φυσικών Αριθμών

Μπορούμε να γνωρίζουμε ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου κάποιων αριθμών; Π.χ. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου

$$22 \cdot 222 \cdot 22 \cdot 222 \cdot 22 \cdot 222 \cdot 22 \cdot 222 \cdot 22 \cdot 222$$

Δύσκολο πρόβλημα θα έλεγε κάποιος;
Και όμως αν κάνουμε μια βασική παρατήρηση γίνεται πανεύκολο. Δες το παρακάτω παράδειγμα:
Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των αριθμών;

$$A = 232 \cdot 332 \cdot 432 \cdot 532 \cdot 632$$

Το γινόμενο γράφεται ως $A = (230 + \mathbf{2}) \cdot (330 + \mathbf{2}) \cdot (430 + \mathbf{2}) \cdot (530 + \mathbf{2}) \cdot (630 + \mathbf{2})$.
Τα γινόμενα των παραπάνω αριθμών με την επιμεριστική ιδιότητα δίνουν πάντα δεκάδες, εκτός από το γινόμενο των μονάδων **2 · 2 · 2 · 2 · 2**.
Έτσι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου Α είναι $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3\mathbf{2}$ δηλαδή 2.

Θυμάμαι ότι το τελευταίο ψηφίο ενός γινομένου προκύπτει από το γινόμενο των μονάδων (τελευταίο ψηφίο) κάθε αριθμού.

Παράδειγμα
Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των αριθμών;

$$A = 232 \cdot 312 \cdot 433 \cdot 537 \cdot 631 \cdot 233 \cdot 3132 \cdot 40032 \cdot 512332 \cdot 32$$

Το τελευταίο ψηφίο του $A = 23\mathbf{2} \cdot 31\mathbf{2} \cdot 43\mathbf{3} \cdot 53\mathbf{7} \cdot 63\mathbf{1} \cdot 23\mathbf{3} \cdot 313\mathbf{2} \cdot 4003\mathbf{2} \cdot 51233\mathbf{2} \cdot 3\mathbf{2}$ είναι το τελευταίο ψηφίο του γινομένου των μονάδων: $\mathbf{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$.
Να σκεφθούμε λίγο έξυπνα για να μην αναλωθούμε στις πράξεις και να βρούμε τα γινόμενα: 1, 3·3·7, 2 ·2·2·2·2·2.
Προφανώς το 1 δεν επηρεάζει το γινόμενο των μονάδων.
Έχουμε 3·3·7 = 63 και 2 ·2·2·2·2·2 = 2^6 = 64
Το γινόμενο ενός αριθμού που λήγει σε 3 με έναν άλλο αριθμό που λήγει σε 4 , λόγω του ότι $3 \cdot 4 = 12$ λήγει σε **2**.
Άρα το τελευταίο ψηφίο του γινομένου Α είναι το **2**.

Θα δούμε στη συνέχεια το τελευταίο ψηφίο για όλους τους αριθμούς όταν επαναλαμβάνονται πολλές φορές και θα ανακαλύψουμε τα μοτίβα επανάληψης.

Α.1 Πολλαπλασιασμός πολλών δυαριών μεταξύ τους

Για το 2 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$2 \cdot 1 = \mathbf{2}$

$2 \cdot 2 = 2^2 = \mathbf{4}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = \mathbf{8}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 1\mathbf{6}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 3\mathbf{2}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 6\mathbf{4}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7 = 12\mathbf{8}$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 = 25\mathbf{6}$ ...

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε δυάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι 2, 4, 8, 6. Αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 4.

Παράδειγμα
Ο αριθμός 2·2·2·2·2…·2·2 όπου τα δυάρια είναι σε πλήθος 203, σε τι ψηφίο λήγει ;
Είναι 203 = 50 · 4 + 3, έτσι έχουμε 50 φορές το μοτίβο να επαναλαμβάνεται και στην 51^{η} επανάληψή του έχουμε το 3^{ο} ψηφίο του μοτίβου, δηλαδή 2·2·2 = **8**
Άρα το γινόμενο θα λήγει (ψηφίο μονάδων) σε **8**.

Α.2 Πολλαπλασιασμός πολλών τριαριών μεταξύ τους

Για το 3 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$3\cdot 1 = \mathbf{3}$

$3\cdot 3 = 3^2 = \mathbf{9}$

$3\cdot 3\cdot 3 = 3^3 = 2\mathbf{7}$

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^4 = 8\mathbf{1}$

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^5 = 24\mathbf{3}$

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^6 = 72\mathbf{9}$

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^7 = 2.18\mathbf{7}$

$3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 3^8 = 6.56\mathbf{1}$ ...

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε τριάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι 3, 9, 7, 1 αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 4.

Α.3 Πολλαπλασιασμός πολλών τεσσαριών μεταξύ τους

Για το 4 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$4\cdot 1 = \mathbf{4}$

$4\cdot 4 = 4^2 = 1\mathbf{6}$

$4\cdot 4\cdot 4 = 4^3 = 6\mathbf{4}$

$4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^4 = 25\mathbf{6}$

$4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^5 = 1.02\mathbf{4}$

$4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 4^6 = 4.09\mathbf{6}$...

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε τεσσάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι 4, 6 και αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 2.

Α.4 Πολλαπλασιασμός πολλών πενταριών μεταξύ τους

Για το 5 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$$5\cdot 1 = \mathbf{5},\quad 5\cdot 5 = 5^2 = 2\mathbf{5},\quad 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3 = 12\mathbf{5},\quad 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 5^4 = 62\mathbf{5}...$$

Το πιο γρήγορο μοτίβο έχουν οι αριθμοί με αξία μονάδων το 5.
Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε πεντάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι πάντα το 5. Εδώ το μοτίβο επαναλαμβάνεται ανά 1.

Α.5 Πολλαπλασιασμός πολλών εξαριών μεταξύ τους

Για το 6 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$$6\cdot 1 = \mathbf{6},\quad 6\cdot 6 = 6^2 = 3\mathbf{6},\quad 6\cdot 6\cdot 6 = 6^3 = 21\mathbf{6},\quad 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6 = 6^4 = 1.29\mathbf{6}...$$

Το πιο γρήγορο μοτίβο έχουν οι αριθμοί με αξία μονάδων το 6.
Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε εξάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι το ίδιο το 6.

Α.6 Πολλαπλασιασμός πολλών εφταριών μεταξύ τους

Για το 7 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$7\cdot 1 = \mathbf{7}$

$7\cdot 7 = 7^2 = 4\mathbf{9}$

$7\cdot 7\cdot 7 = 7^3 = 34\mathbf{3}$

$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^4 = 2.40\mathbf{1}$

$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^5 = 16.80\mathbf{7}$

$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^6 = 117.64\mathbf{9}$

$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^7 = 823.54\mathbf{3}$

$7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7 = 7^8 = 5.764.80\mathbf{1}$

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε εφτάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι το 7,9,3,1 και αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται.

Α.7 Πολλαπλασιασμός πολλών οχταριών μεταξύ τους

Για το 8 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$8\cdot 1 = \mathbf{8}$

$8\cdot 8 = 8^2 = 6\mathbf{4}$

$8\cdot 8\cdot 8 = 8^3 = 51\mathbf{2}$

$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^4 = 4.09\mathbf{6}$

$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^5 = 32.76\mathbf{8}$

$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^6 = 262.14\mathbf{4}$

$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^7 = 2.097.15\mathbf{2}$

$8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8 = 8^8 = 16.777.21\mathbf{6}$

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε οχτάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι το 8, 4, 2, 6 και αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται.

Σχόλιο: Ο πολλαπλασιασμός οχταριών δίνει όλους τους ζυγούς, εκτός αυτών που λήγουν σε 0.

Α.8 Πολλαπλασιασμός πολλών εννιαριών μεταξύ τους

Για το 9 έχουμε διαδοχικά τους ακόλουθους πολλαπλασιασμούς:

$9\cdot 1 = \mathbf{9}$

$9\cdot 9 = 9^2 = 8\mathbf{1}$

$9\cdot 9\cdot 9 = 9^3 = 72\mathbf{9}$

$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 9^4 = 6.56\mathbf{1}$

$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 9^5 = 59.04\mathbf{9}$

$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 9^6 = 531.44\mathbf{1}$

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε εννιάρια μεταξύ τους, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου είναι το 9, 1, 9, 1, 9, 1… και αυτό το μοτίβο επαναλαμβάνεται.

Α.9 Πολλαπλασιασμός αριθμών που λήγουν σε μηδέν

Πολλαπλασιάζοντας μεταξύ τους αριθμούς που λήγουν σε 0, προκύπτουν δυνάμεις του 10. Δίνονται τα παρακάτω παραδείγματα:

$$10 \cdot 10 = 100$$

$$20 \cdot 20 \cdot 10 = (2 \cdot 10) \cdot (2 \cdot 10) \cdot 10 = 4 \cdot 10^3 = 4.000$$

$$10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 30 = 10 \cdot (2 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 10) = 18 \cdot 10^4 = 180.000$$

$$10 \cdot 50 \cdot 50 = 10 \cdot (5 \cdot 10) \cdot (5 \cdot 10) = 25 \cdot 10^3 = 25.000 \quad ....$$

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους αριθμούς που λήγουν σε μηδέν, το τελευταίο ψηφίο του γινομένου τους είναι μηδέν και έχουμε τόσα μηδενικά όσα υπάρχουν στην θέση των μονάδων σε όλους τους αριθμούς.

Σε γινόμενο φυσικών αριθμών, πότε προκύπτει τελευταίο ψηφίο το 0;

Το γινόμενο φυσικών αριθμών έχει τελευταίο ψηφίο το 0, αν ένας από τους αριθμούς έχει τελευταίο ψηφίο το 0. Για να έχει τελευταίο ψηφίο το 0 το γινόμενο δύο μη μηδενικών μονοψηφίων, θα πρέπει ο ένας να είναι άρτιος (ζυγός) και ο άλλος το 5. Πράγματι

$$2 \cdot 5 = 10 \quad 4 \cdot 5 = 20 \quad 6 \cdot 5 = 30 \quad 8 \cdot 5 = 40$$

<u>Προσέξτε γιατί ισχύει αυτό</u>.
Αν ένας αριθμός λήγει σε 0, τότε διαιρείται με το 5 και το 2.
Αν λοιπόν το γινόμενο δύο μονοψηφίων τελειώνει σε 0, θα πρέπει το 5 και το 2 να διαιρεί αυτό. Άρα ο ένας θα πρέπει να διαιρείται με το 2 και ο άλλος με το 5.
Ο μόνος μονοψήφιος που διαιρείται με το 5 είναι το 5.

Σε πόσα μηδενικά λήγει το γινόμενο κάποιων αριθμών;

Όπως είδαμε προηγουμένως, το γινόμενο φυσικών αριθμών που λήγουν σε 0 δημιουργεί μηδενικά. Από τους φυσικούς αριθμούς 2, 3, 4, 5,6 ,7 κλπ, έχουμε μηδενικό στο γινόμενο (προπαίδεια), στα $2 \cdot 5$, $4 \cdot 5$, $6 \cdot 5$, $8 \cdot 5$,...
δηλαδή όταν πολλαπλασιάζουμε το 5 με έναν ζυγό (άρτιο) αριθμό.
Θυμάμαι ότι προκύπτει μηδέν από το γινόμενο $5 \cdot 2$ και αναζητώ πόσα είναι τα ζευγάρια $5 \cdot 2$, για να βρω πόσα μηδενικά έχει το γινόμενο.

Εδώ θα δούμε σε πόσα μηδενικά λήγει το γινόμενο κάποιων αριθμών.

Παράδειγμα 1ο

Σε πόσα μηδενικά λήγει το γινόμενο $22\cdot 55\cdot 155\cdot 252\cdot 75$;

Έχουμε ότι $22\cdot 55\cdot 155\cdot 252\cdot 75=(2\cdot 11)\cdot(5\cdot 11)\cdot(5\cdot 31)\cdot(2^2\cdot 63)\cdot(5^2\cdot 3)$

- Έχουμε τον αριθμό 5: 4 φορές και τον αριθμό 2: 3 φορές
  Άρα έχουμε τα ζευγάρια γινομένου 5 · 2 = 10, συνολικά 3 φορές.
  Οπότε το αποτέλεσμα του γινομένου έχει **3 μηδενικά**.

Παράδειγμα 2ο

Σε πόσα μηδενικά λήγει το γινόμενο $8\cdot 16\cdot 125\cdot 625\cdot 12\cdot 12$

Διαδοχικά έχουμε $8\cdot 16\cdot 125\cdot 625\cdot 12\cdot 12=2^3\cdot 2^4\cdot 5^3\cdot 5^4\cdot(2^2\cdot 3)\cdot(2^2\cdot 3)$

- Έχουμε τον αριθμό 2: 11 φορές και τον αριθμό 5: 7 φορές
  Άρα έχουμε τα ζευγάρια γινομένου 5 · 2 = 10, συνολικά 7 φορές.
  Οπότε το αποτέλεσμα του γινομένου έχει **7 μηδενικά**.